Funkcje Lipschitzowskie

Bartosz Budnarowski
Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Lipschitzowska ciągłość

Definicja: Załóżmy że (X, d_X) oraz (Y, d_Y) są dowolnymi przestrzeniami metrycznymi. Powiemy, że funkcja $f : X \to Y$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L \geqslant 0$, jeżeli dla wszystkich $x, y \in X$ zachodzi

$$d_Y(f(y), f(x)) \leqslant L \cdot d_X(x, y)$$

- Warunek który nakładamy na f ma naturę "czysto metryczną".
- Każda funkcja lipschitzowsko ciągła ma wahanie skończone, jest też jednostajnie ciągła, a nawet absolutnie ciągła.
- Jest to dosyć "silna" własność – jak silna, przekonamy się za chwilę.

Twierdzenie Rademachera

Problem: *Co charakteryzuje funkcje spełniające warunek Lipschitza? Czy mają dobre własności analityczne? A może ta ciągłość jest już wystarczająco silna, by pokusić się o stwierdzenie, że muszą być różniczkowalne?*

- **(Rademacher)** Niech U będzie otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Załóżmy ponadto, że funkcja $f : U \to \mathbb{R}^m$ spełnia warunek Lipschitza z pewną stałą $L \geqslant 0$. Wówczas f jest różniczkowalna prawie wszędzie w zbiorze U względem miary Lebesgue'a.
- Dzięki twierdzeniom o przedłużaniu funkcji lipschitzowskich (Kirszbraun), możemy zakładać że $U = \mathbb{R}^n$.
- W przypadku gdy $n = m = 1$, mamy tak naprawdę do czynienia z funkcjami o wahaniu skończonym, które są różniczkowalne prawie wszędzie. Dowód zawdzięczamy Lebesgue'owi (wykorzystuje on lemat Vitaliego).

Szkic dowodu

- Mając już przypadek jednowymiarowy, możemy założyć że $m = 1$. Dowodzimy istnienia prawie wszędzie pochodych cząstkowych i dostajemy kandydata na pochodną f w postaci gradientu ∇f. Jak w wielu takich przejściach do wyższych wymiarów, również i tutaj kluczowe okazuje się twierdzenie Fubiniego.
- Wybieramy wektor $v \in \mathbb{R}^n$ i pokazujemy, że $D_v f(x) = v \cdot \nabla f(x)$ prawie wszędzie (wykorzystujemy funkcje gładkie).
- W ostatnim kroku wybieramy przeliczalny, gęsty zbiór wektorów $\{v_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ i odpowiednio przybliżamy każdy wektor $v \in \mathbb{R}^n$. Potem pokazujemy, że faktycznie $\nabla f(x) = Df(x)$ (to tu, w szacowaniach, wykorzystujemy warunek Lipschitza).

Twierdzenie Stiepanowa

(Stiepanow): Niech Ω będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$,. Załóżmy że $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ jest funkcją i zdefiniujmy zbiór $L(f)$ jako:

$$L(f) := \left\{ x \in \Omega : \limsup_{y \to x} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} < \infty \right\}.$$

Wówczas f jest różniczkowalna prawie wszędzie w zbiorze $L(f)$.

- Zauważmy że nie zakładamy tutaj nic o mierzalności zbioru Ω czy też samej funkcji f.
- Twierdzenie bywa spotykane pod nazwą "kryterium Stiepanowa".
- Klasyczny dowód korzystający z twierdzenie Lebsgue'a o punktach gęstości wymaga założenia mierzalności.
- Jan Maly skonstruował elegancki dowód, w którym nie potrzebujemy powyższego założenia.

Szkic dowodu (Jan Maly)

- W pierwszym kroku pokrywamy zbiór $L(f)$ przeliczalną rodziną kul $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ o dowolnie małych promieniach
- Następnie definiujemy na tych kulach funkcje spełniające warunek Lipschitza, które przybliżają z dołu i z góry funkcję f
- Twierdzenie Rademachera gwarantuje nam, że zbiór, na którym nie są one różniczkowalne, jest zbiorem miary zero
- W ostatnim kroku pokazujemy, że możemy "przybliżać" różniczkowalność f przez zdefiniowane funkcje lipschitzowskie, co ostatecznie implikuje istnienie pochodnej f prawie wszędzie w $L(f)$.

Uogólnienia twierdzenia Rademachera

Problem: *Czy da się udowodnić to samo twierdzenie, zamieniając przestrzenie* $\mathbb{R}^n$ *na przykład na dowolne przestrzenie Banacha? A może chociaż przestrzenie Hilberta? Jeżeli tak, to jaką różniczkowalnosć będziemy rozważać? I jak zdefiniujemy miarę na tych przestrzeniach, jak określimi czym są zbiory miary zero? A może są potrzebne jakieś specjalne, dodatkowe założenia?*

- S.A. Shkarin pokazał, że istnieje funkcja $f : \ell^2 \to \mathbb{R}$, **nigdzie nieciągła** i **wszędzie różniczkowalna** w sensie Gateaux (widzimy więc że ta rożniczkowalność ma poważne wady)
- Rozważając różniczkowalność w sensie Frecheta, również napotykamy problem: zdefiniujmy funkcję $f : \ell^1 \to \mathbb{R}$ jako

$$f(x) = ||x||_{\ell^1}$$

Własności (Aronszajn):

- funkcja f **spełnia warunek Lipschitza** ze stałą 1
- funckja f **nie jest różniczkowalna w sensie Frecheta w żadnym punkcie** w przestrzeni ℓ^1.

Uogólnienia twierdzenia Rademachera

W ogólności, takie sytuacje mogą się pojawiać, gdy mamy do czynienia z ośrodkowymi przestrzeniami Banacha (ℓ^1 takie jest), które mają nieośrodkową przestrzeń dualną. Powyższy przykład ilustruje, że nie obędzie się bez dodatkowych założeń o przestrzeniach, z którymi pracujemy. W książce pt. *Lipschitz functions* autorstwa Adriana Nicolae, Radu Miculescu oraz Stefana Cobzasa można znaleźć wiele uogólnień i propozycji dotyczących tego problemu.