Twierdzenie Lebesgue'a-Radona-Nikodyma

Maria Bochenek

16 kwietnia 2020

Przypomnienie

Załóżmy, że μ jest miarą na σ-algebrze $\mathscr{F}$, a ν jest miarą lub miarą zespoloną na $\mathscr{F}$.

Definicja 1. Miara ν jest **absolutnie ciągła** względem miary μ i piszemy

$$\nu \ll \mu$$

jeżeli dla każdego zbioru $E \in \mathscr{F}$ takiego, że $\mu(E) = 0$ zachodzi również $\nu(E) = 0$.

Definicja 2. Jeżeli istnieje taki zbiór $A \in \mathscr{F}$, że $\nu(E) = \nu(A \cap E)$ dla każdego $E \in \mathscr{F}$, to mówimy, że miara ν jest **skupiona na zbiorze A**. Równoważnie: $\nu(E) = 0$, jeżeli $E \cap A = \emptyset$.

Definicja 3. Przypuśćmy, że ν_1 i ν_2 są miarami na $\mathscr{F}$ oraz istnieje para zbiorów rozłącznych A i B takich, że miara ν_1 jest skupiona na A, a ν_2 skupiona na B. Mówimy wtedy, że miary ν_1 i ν_2 są **wzajemnie osobliwe** i piszemy

$$\nu_1 \perp \nu_2.$$

Twierdzenie Lebesgue'a-Radona-Nikodyma

Załóżmy, że μ i ν są skończonymi miarami określonymi na σ-algebrze $\mathscr{F}$ w zbiorze X.

Twiedzenie (Lebesgue) *(Lebesgue decomposition theorem)*
Istnieje dokładnie jedna para miar ν_a, ν_s określonych na $\mathscr{F}$ takich, że

$$\nu = \nu_a + \nu_s, \qquad \nu_a \ll \mu, \qquad \nu_s \perp \mu$$

Twierdzenie (Radon-Nikodym)
Istnieje dokładnie jedna klasa funkcji $h \in L^1(\mu)$ taka, że

$$\nu_a(E) = \int_E h \, d\mu \qquad (E \in \mathscr{F})$$

Nazewnictwo

Parę (ν_a, ν_s) nazywamy **rozkładem Lebesgue'a** miary ν względem miary μ.

Funkcję $h \in L^1(\mu)$ taką, że

$$\nu_a(E) = \int_E h \, d\mu \qquad (E \in \mathscr{F})$$

nazywamy **pochodną Radona-Nikodyma** miary ν_a względem miary μ. Równość możemy wyrazić w postaci

$$d\nu_a = h \, d\mu \quad \text{lub} \quad h = \frac{d\nu_a}{d\mu}$$

.

Dowód

KROK 1

Definiujemy: $\rho := \nu + \mu$, wówczas ρ – skończona miara na $\mathscr{F}$

Rozważamy przestrzeń Hilberta (nad ciałem liczb rzeczywistych): $L^2(X, \rho)$

Definiujemy funkcjonał φ wzorem $\varphi(f) = \int_X f\, d\nu$.

Fakt 1. Jeżeli $f \in L^2(X, \rho)$, to z nierówności Schwarza otrzymujemy:

$$\left|\int_X f\, d\nu\right| \leqslant \int_X |f|\, d\nu \leqslant \int_X |f|\, d\rho \leqslant \left(\int_X |f|^2\, d\rho\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X d\rho\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2(\rho)} (\rho(X))^{\frac{1}{2}}$$

Ponieważ $\rho(X) < \infty$ to φ jest **dobrze określonym i ciągłym** na $L^2(X, \rho)$ funkcjonałem liniowym.

Dowód – twierdzenie Riesza

KROK 2

Twierdzenie.
Jeżeli φ jest ciągłym funkcjonałem liniowym na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, to istnieje dokładnie jeden element $y \in \mathcal{H}$ taki, że $\varphi(x) = \langle x, y \rangle$.

Zatem na mocy twierdzenia Riesza istnieje $g \in L^2(X, \rho)$ takie, że

$$\int_X f\, d\nu = \varphi(f) = \langle f, g \rangle = \int_X f\, g\, d\rho \qquad \text{dla } f \in L^2(X, \rho) \qquad (\bigstar)$$

Dowód

KROK 3

Chcemy pokazać $0 \leqslant g \leqslant 1$ prawie wszędzie względem miary ρ.

W $(\bigstar)$ bierzemy $f = \mathbb{1}_A$. Dla $A = \{x : g(x) > 1\}$ otrzymujemy

$$\nu(A) = \int_X \mathbb{1}_A \, d\nu = \int_X \mathbb{1}_A \, g \, d\rho \geqslant \int_X \mathbb{1}_A \, d\rho = \rho(A) \geqslant \nu(A).$$

Zatem powyżej musi być równość. W takim razie $\int_A (g-1) \, d\rho = 0$, więc mamy $g = 1$ ρ – p.w. na A.
Ale na A mamy $g > 1$, czyli $\rho(A) = 0$.

Dla $A = \{x : g(x) < 0\}$ otrzymujemy

$$\nu(A) = \int_X \mathbb{1}_A \, d\nu = \int_X \mathbb{1}_A \, g \, d\rho \leqslant 0,$$

więc $\rho(A) = 0$, bo w przeciwnym wypadku byłoby $\nu(A) < 0$.

Dowód

KROK 4

Fakt 2. Z określenia sumy dwu miar mamy:

$$\int_X f\,d\rho = \int_X f\,d\nu + \int_X f\,d\mu$$

dla dowolnej funkcji prostej, a w konsekwencji dla dowolnej nieujemnej funkcji mierzalnej.

Z **Faktu 2** możemy ($\bigstar$) zapisać jako

$$\int_X f\,(1-g)\,d\nu = \int_X f\,g\,d\mu \qquad (f \in L^2(\rho)). \qquad (\bigstar\bigstar)$$

Dowód

KROK 5

Niech $B = \{x : g(x) = 1\}$ oraz ν_s – miara ν obcięta do zbioru B tzn. $\nu_s(E) := \nu(E \cap B)$.

Wówczas $\nu_s(X \setminus B) = \nu((X \setminus B) \cap B) = 0$.

Biorąc $f = \mathbb{1}_B$ w $(\bigstar\bigstar)$ otrzymujemy

$$0 = \int_X \mathbb{1}_B \,(1 - g)\, d\nu = \int_X \mathbb{1}_B \, g \, d\mu = \int_B d\mu = \mu(B)$$

a więc $\nu_s \perp \mu$.

Dowód

KROK 6

Ponieważ g jest funkcją ograniczoną, więc $(\bigstar\bigstar)$ zachodzi także dla $f = (1 + g + \dots + g^n)\,\mathbb{1}_E$, gdzie $n = 1,2,\dots$ oraz $E \in \mathscr{F}$.

Otrzymujemy wówczas równość

$$\int_E (1 - g^{n+1})\,d\nu = \int_E g\,(1 + g + \dots + g^n)\,d\mu.$$

Niech $\nu_a := \nu - \nu_s$.
Dla dowolnego $E \in \mathscr{F}$ mamy $\nu_a(E) = \nu(E \cap (X \setminus B))$.

Dowód

KROK 6 cd.

Dla każdego $x \in (X \setminus B)$ mamy $0 \leqslant g(x) < 1$,
zatem z **Twierdzenia o zbieżności monotonicznej** otrzymujemy

$$\nu_a(E) = \nu(E \cap (X \setminus B)) = \lim_{n \to +\infty} \int_{E \cap (X \setminus B)} (1 - g^{n+1})\, d\nu =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \int_{E \cap (X \setminus B)} g\,(1 + g + \ldots + g^n)\, d\mu = \int_{E \cap (X \setminus B)} \frac{g}{1-g} d\mu = \int_E h\, d\mu,$$

co pokazuje, że $\nu_a \ll \mu$ oraz $h = \frac{g}{1-g} \mathbb{1}_{X \setminus B}$.

Biorąc $E = X$ widzimy, że $h \in L^1(\mu)$, ponieważ $\nu_a(X) < \infty$.

Przypomnienie cd.

Definicja 4.
Miara zespolona to taka funkcja $\nu : \mathscr{F} \to \mathbb{C}$, że

$$\nu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) \qquad (E \in \mathscr{F})$$

dla dowolnego rozkładu $\{E_n\}$ zbioru E.

Definicja 5.
Miara μ jest **miarą σ-skończoną**, jeżeli istnieje przeliczalna rodzina zbiorów X_n taka, że $\mu(X_n) < \infty$ dla $n \in \mathbb{N}$ spełniająca

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n.$$

Uogólnienie twierdzenia Lebesgue'a-Radona-Nikodyma

1. μ - miara σ-skończona, ν - miara skończona
Stosujemy rozumowanie do każdego ze zbiorów X_n.
Dostajemy rozkłady $\nu_n = \nu_{n,a} + \nu_{n,s}$, bierzemy $\nu_a = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_{n,a}$ oraz $\nu_s = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_{n,s}$.
Funkcje h_n określone na X_n wyznaczają funkcję h na X: $h(x) = h_n(x)$, gdy $x \in X_n$.
Co więcej $h \in L^1(\mu)$, bo $\nu(X) < \infty$.

Uogólnienie twierdzenia Lebesgue'a-Radona-Nikodyma

1. **μ - miara σ-skończona, ν - miara skończona**
Stosujemy rozumowanie do każdego ze zbiorów X_n.
Dostajemy rozkłady $\nu_n = \nu_{n,a} + \nu_{n,s}$, bierzemy $\nu_a = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_{n,a}$ oraz $\nu_s = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_{n,s}$.
Funkcje h_n określone na X_n wyznaczają funkcję h na X: $h(x) = h_n(x)$, gdy $x \in X_n$.
Co więcej $h \in L^1(\mu)$, bo $\nu(X) < \infty$.

2. **μ - miara σ-skończona, ν - miara zespolona na $\mathscr{F}$**
Wtedy $\nu = \nu_1 + i\nu_2$, gdzie ν_1, ν_2 są miarami rzeczywistymi.
Rozumowanie stosujemy do wariacji dodatniej i ujemnej miar ν_1, ν_2.

Uogólnienie twierdzenia Lebesgue'a-Radona-Nikodyma

1. **μ - miara σ-skończona, ν - miara skończona**
Stosujemy rozumowanie do każdego ze zbiorów X_n.
Dostajemy rozkłady $\nu_n = \nu_{n,a} + \nu_{n,s}$, bierzemy $\nu_a = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_{n,a}$ oraz $\nu_s = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_{n,s}$.
Funkcje h_n określone na X_n wyznaczają funkcję h na X: $h(x) = h_n(x)$, gdy $x \in X_n$.
Co więcej $h \in L^1(\mu)$, bo $\nu(X) < \infty$.

2. **μ - miara σ-skończona, ν - miara zespolona na $\mathscr{F}$**
Wtedy $\nu = \nu_1 + i\nu_2$, gdzie ν_1, ν_2 są miarami rzeczywistymi.
Rozumowanie stosujemy do wariacji dodatniej i ujemnej miar ν_1, ν_2.

3. **μ - miara σ-skończona, ν - miara σ-skończona**
Rozpatrujemy μ_n i ν_n - obcięcia miar μ i ν do X_n.
Jak w 1. uzyskujemy rozkład Lesbegue'a.
Istnieje też funkcja h, ale jest tylko "lokalnie klasy L^1" tzn. $\int_{X_n} h \, d\mu < \infty$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.