O (mojej) przygodzie z upowszechnianiem matematyki: od Marka Kordosa do Griszy Perelmana

Paweł Strzelecki, Instytut Matematyki UW

Maraton wykładowy *Delty*, 8 listopada 2018

Hipoteza Poincarégo

Hipoteza. *Jeśli* $M = M^3$ *jest trójwymiarową rozmaitością zamkniętą i* $\pi_1(M) = 0$*, to* M *jest homeomorficzna ze sferą* $\mathbb{S}^3$.

- Henri Poincaré, 1904; od 2000 r. jeden z problemów milenijnych
- Anons dowodu: Grigorij J. Perelman, trzy preprinty XI.2002–VII.2003; łącznie **68 stron**; **nieoczekiwana metoda (potoki geometryczne)**
- Pełna akceptacja dowodu przez ekspertów w ciągu ok. 2 lat
- Perelman nie przyjął
  - ani Medalu Fieldsa w 2006 roku,
  - ani Nagrody Instytutu Claya w 2010 roku.
- **2006:** czasopismo *Science* uznaje wyniki Perelmana za najważniejsze osiągnięcie roku w **całej** nauce.

Potok krzywiznowy na płaszczyźnie

- Dana w chwili $t = 0$: gładka krzywa zamknięta $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}^2$;
- Przepis na ruch: $\vec{\mathbf{v}} = \kappa \cdot \vec{\mathbf{n}}$, gdzie κ oznacza krzywiznę ze znakiem, a $\vec{\mathbf{n}}$ jest wektorem normalnym *wewnętrznym*

Najprostsze własności:

- Lokalne istnienie rozwiązań, Γ_t dla $t \in [0, t_\dagger)$;
- "Zakaz wyprzedzania" (zasada maksimum);
- Okrąg pozostaje okręgiem;
- Pole ograniczone krzywą maleje w stałym tempie.

Zachowanie rozwiązań dla dużych czasów

Twierdzenie (Gage, Hamilton). Krzywe zamknięte **wypukłe** kurczą się w skończonym czasie do tzw. **okrągłych punktów**.

Twierdzenie (Grayson). Każda krzywa zamknięta w skończonym czasie stanie się **wypukła**.

Morał: nie ma osobliwości; potok krzywiznowy jest ilustracją istnienia homeomorfizmu, o którym mowa w twierdzeniu Jordana.

Twierdzenie Graysona na obrazku

Żywot skomplikowanej krzywej niewypukłej (po przeskalowaniu)

Inny przykład: potok średniokrzywiznowy

- Dana w chwili $t = 0$: zamknięta gładka powierzchnia $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}^3$;
- Przepis na ruch: $\vec{\mathbf{v}} = H \cdot \vec{\mathbf{n}}$, gdzie H oznacza krzywiznę średnią, a $\vec{\mathbf{n}}$ jest wektorem normalnym *wewnętrznym*

Własności:

- Lokalne istnienie rozwiązań, Γ_t dla $t \in [0, t_\dagger)$;
- "Zakaz wyprzedzania" (zasada maksimum) ;
- Sfera pozostaje sferą;
- **Twierdzenie (Huisken).** Powierzchnie zamknięte **wypukłe** kurczą się w skończonym czasie do tzw. *okrągłych punktów*.

Istotna różnica: mogą pojawiać się osobliwości

Osobliwości potoku średniokrzywiznowego: hantelek Graysona

Długa cienka rurka kurczy się znacznie szybciej niż okrągłe bąble (prosty argument z wykorzystaniem ‘zakazu wyprzedzania’)

Geometria wg. Williama Thurstona

Geometria to jednorodna i jednospójna rozmaitość Riemannowska X, która ma dyskretną grupę izometrii G taką, że iloraz X/G jest zwarty.

Przykład: $X = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{Z}^2$; iloraz X/G jest torusem.

Geometrie dwuwymiarowe są trzy: $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^2$ i $\mathbb{H}^2$.

Geometrii trójwymiarowych jest osiem:

- oczywiste $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$ i $\mathbb{H}^3$; dość oczywiste $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ i $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$;
- trzy wyjątkowe, bardziej egzotyczne.

Struktura geometryczna: metryka zupełna, lokalnie jednorodna.

Hipoteza Geometryzacyjna (W. Thurston): Zwartą rozmaitość M^3 można pociąć (wzdłuż sfer i torusów) na części i każdej nadać strukturę geometryczną.

UNIVERSITAS VARSOVIENSIS

Potok Ricciego i pomysł Hamiltona

- **Potok Ricciego:** trójwymiarowy odpowiednik poprzednich dwóch — deformacja metryki na rozmaitości M^3 w tempie zależnym od zakrzywienia.
- Analogia: równanie ciepła, **ale z dodatkową kwadratową nieliniowością**.
- **Hamilton, 1983:** Hipoteza Poincarégo zachodzi dla tych M^3, na których istnieje metryka riemannowska o dodatniej krzywiźnie Ricciego.
- **Pomysł Hamiltona:** wykorzystać potok Ricciego do dowodu HP w pełnej ogólności.
- **Wkład Perelmana**: rozwiązanie głównego problemu, tzn. analiza osobliwości i metoda chirurgii…

William Thurston o Perelmanie (laudacja z lata 2010):

Awersja, jaką Perelman darzy publiczne spektakle, zaszczyty i bogactwo, jest dla wielu osób zagadką (...) Nie mam prawa wypowiadać się w jego imieniu, ale chcę powiedzieć, że darzę pełną empatią i podziwem jego wewnętrzną siłę i jasność myśli oraz zdolność świadomego dochowania wierności samemu sobie.

Nasze prawdziwe potrzeby są głębsze – jednak we współczesnym świecie większość z nas odruchowo i nieustępliwie walczy o bogactwo, dobra doczesne i podziw innych. Uczyliśmy się od Perelmana matematyki. Może powinniśmy zatrzymać się na chwilę, zastanowić nad sobą i wynieść lekcję także ze stosunku Perelmana do życia.

William Thurston o Perelmanie (laudacja z lata 2010):

Awersja, jaką Perelman darzy publiczne spektakle, zaszczyty i bogactwo, jest dla wielu osób zagadką (...) Nie mam prawa wypowiadać się w jego imieniu, ale chcę powiedzieć, że darzę pełną empatią i podziwem jego wewnętrzną siłę i jasność myśli oraz zdolność świadomego dochowania wierności samemu sobie.

Nasze prawdziwe potrzeby są głębsze – jednak we współczesnym świecie większość z nas odruchowo i nieustępliwie walczy o bogactwo, dobra doczesne i podziw innych. Uczyliśmy się od Perelmana matematyki. Może powinniśmy zatrzymać się na chwilę, zastanowić nad sobą i wynieść lekcję także ze stosunku Perelmana do życia.

Ja to samo mogę powiedzieć o Marku Kordosie.
Nie mam lepszych i trafniejszych słów, niż powyższe.