Formy przestrzenne triangulacji grafów toroidalnych

Michał Zawalski

Maj 2020

Źródła problemu

Twierdzenie Steinitza (1916)

Dany graf G jest grafem wielościanu wypukłego wtedy i tylko wtedy, gdy jest planarny i 3-spójny wierzchołkowo.

Źródła problemu

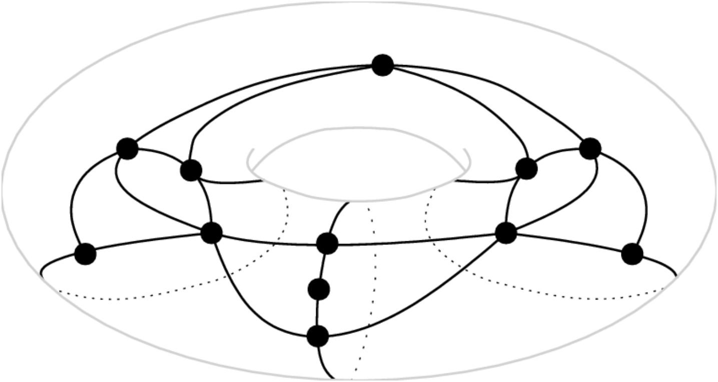
Twierdzenie Steinitza (1916)

Dany graf G jest grafem wielościanu wypukłego wtedy i tylko wtedy, gdy jest planarny i 3-spójny wierzchołkowo.

Hipoteza Grünbauma (1970)

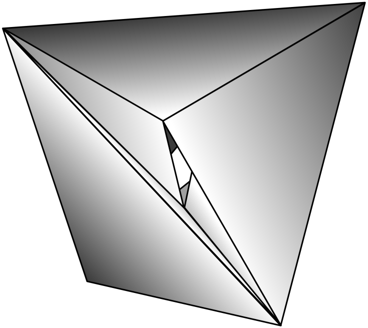
Czy analogiczna własność jest prawdziwa dla wielościanów toroidalnych?
Czy każdy graf toroidalny 3-spójny triangulowany można zrealizować jako wielościan prostoliniowy?

Grafy zanurzone



Hipoteza Grünbauma

Z uogólnionego wzoru Eulera wynika, że najmniejszym grafem toroidalnym jest K_7. Istnieje jego przestrzenna realizacja.



Hipoteza Grünbauma

Lavrenchenko (2004)

Istnieje dokładnie 21 nieredukowalnych triangulacji torusa.

Hipoteza Grünbauma

Lavrenchenko (2004)

Istnieje dokładnie 21 nieredukowalnych triangulacji torusa.

Archdeacon et al. (2007)

Każdy graf toroidalny 3-spójny triangulowany można zrealizować jako wielościan.

Nieredukowalne triangulacje torusa

Definicja

Graf toroidalny to graf prosty, trójkątny, posiadający komórkowe zanurzenie w powierzchnię torusa. Powiemy, że taki graf jest **minimalny** jeśli żaden inny graf toroidalny nie jest jego minorem powstałym przez kontrakcję pojedynczej krawędzi.

Nieredukowalne triangulacje torusa

Definicja

Graf toroidalny to graf prosty, trójkątny, posiadający komórkowe zanurzenie w powierzchnię torusa. Powiemy, że taki graf jest **minimalny** jeśli żaden inny graf toroidalny nie jest jego minorem powstałym przez kontrakcję pojedynczej krawędzi.

Lemat

Niech G będzie minimalnym grafem toroidalnym. Wówczas każda krawędź G leży na nieściągalnym 3-cyklu.

Nieredukowalne triangulacje torusa

Wzór Eulera dla topologicznych zanurzeń grafów

Jeśli G posiada komórkowe zanurzenie w powierzchnię o genusie g, które ma V wierzchołków, E krawędzi i F ścian, to spełnione jest równanie $V - E + F = 2 - 2g$.

Nieredukowalne triangulacje torusa

Wzór Eulera dla topologicznych zanurzeń grafów

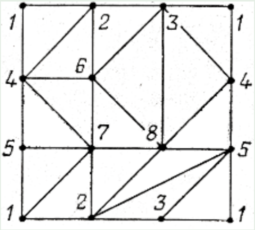
Jeśli G posiada komórkowe zanurzenie w powierzchnię o genusie g, które ma V wierzchołków, E krawędzi i F ścian, to spełnione jest równanie $V - E + F = 2 - 2g$.

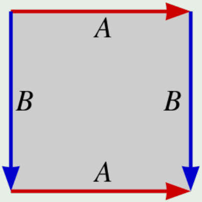
W szczególności, zanurzenia grafów toroidalnych spełniają $V + F = E$. To oznacza, że średni stopień wierzchołka w grafie toroidalnym wynosi 6.

Nieredukowalne triangulacje torusa

Definicja

Siatką toroidalną S nazwiemy graf prosty planarny, którego zewnętrzna ściana jest kwadratem mającym dokładnie 12 krawędzi bocznych i jest jedyną nie będącą trójkątem.





Nieredukowalne triangulacje torusa

Lemat

Niech G będzie minimalnym grafem toroidalnym, a v jego dowolnym wierzchołkiem. Wówczas przez v przechodzą co najmniej dwa nieściągalne 3-cykle rozłączne wierzchołkowo, przecinające się w v.

Nieredukowalne triangulacje torusa

Lemat

Niech G będzie minimalnym grafem toroidalnym, a v jego dowolnym wierzchołkiem. Wówczas przez v przechodzą co najmniej dwa nieściągalne 3-cykle rozłączne wierzchołkowo, przecinające się w v.

Wniosek

Każdy minimalny graf toroidalny G można rozciąć tak, aby otrzymać minimalną siatkę toroidalną. Dodatkowo, dowolny wierzchołek v grafu G może odpowiadać narożnikowi takiej siatki.

Nieredukowalne triangulacje torusa

Lemat

W minimalnej siatce toroidalnej S końce v_1, v_2 dowolnej krawędzi wewnętrznej sąsiadują z parą różnych, odpowiających sobie wierzchołków na ścianie zewnętrznej.

Nieredukowalne triangulacje torusa

Lemat

W minimalnej siatce toroidalnej S końce v_1, v_2 dowolnej krawędzi wewnętrznej sąsiadują z parą różnych, odpowiających sobie wierzchołków na ścianie zewnętrznej.

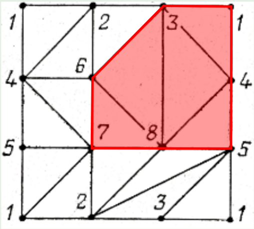
Wniosek

Graf wewnętrzny minimalnej siatki toroidalnej S jest zewnętrznie planarny.

Nieredukowalne triangulacje torusa

Definicja

Niech S będzie minimalną siatką. Niech $C = v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$ będzie dowolnym cyklem prostym w S. Jeżeli żadna para wierzchołków na tym cyklu nie jest parą odpowiadających sobie wierzchołków zewnętrznych S, to powiemy, że frament S ograniczony przez C jest **obszarem zamkniętym**.



Nieredukowalne triangulacje torusa

Lemat

Niech C będzie obszarem zamkniętym, w którego wnętrzu wierzchołki mają stopień co najmniej d, a na brzegu jest ich n. Wówczas wewnątrz C leży co najwyżej $\lfloor \frac{n-2}{d-2} \rfloor$ wierzchołków.

Nieredukowalne triangulacje torusa

Lemat

Niech C będzie obszarem zamkniętym, w którego wnętrzu wierzchołki mają stopień co najmniej d, a na brzegu jest ich n. Wówczas wewnątrz C leży co najwyżej $\lfloor \frac{n-2}{d-2} \rfloor$ wierzchołków.

Lemat

Graf wewnętrzny minimalnej siatki toroidalnej S jest spójny.

Nieredukowalne triangulacje torusa

Twierdzenie

Minimalna siatka toroidalna ma co najwyżej 8 wierzchołków wewnętrznych.

Nieredukowalne triangulacje torusa

Dowód

Każdy wierzchołek wewnętrzny sąsiaduje z narożnikiem lub z parą prostopadłych boków.

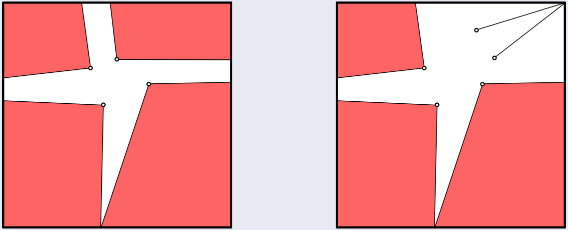
Nieredukowalne triangulacje torusa

Formy przestrzenne triangulacji grafów toroidalnych

Michał Zawalski

Dowód

Każdy wierzchołek wewnętrzny sąsiaduje z narożnikiem lub z parą prostopadłych boków.



Nieredukowalne triangulacje torusa

Podsumowując, udowodniliśmy, że:

Nieredukowalne triangulacje torusa

Podsumowując, udowodniliśmy, że:

- Każdy graf toroidalny można rozłożyć na siatkę.

Nieredukowalne triangulacje torusa

Podsumowując, udowodniliśmy, że:

- Każdy graf toroidalny można rozłożyć na siatkę.
- Każda minimalna siatka ma 12 wierzchołków zewnętrznych i co najwyżej 8 wewnętrznych.

Nieredukowalne triangulacje torusa

Podsumowując, udowodniliśmy, że:

- Każdy graf toroidalny można rozłożyć na siatkę.
- Każda minimalna siatka ma 12 wierzchołków zewnętrznych i co najwyżej 8 wewnętrznych.
- Graf wewnętrzny jest spójny, zewnętrznie planarny.

Nieredukowalne triangulacje torusa

Podsumowując, udowodniliśmy, że:

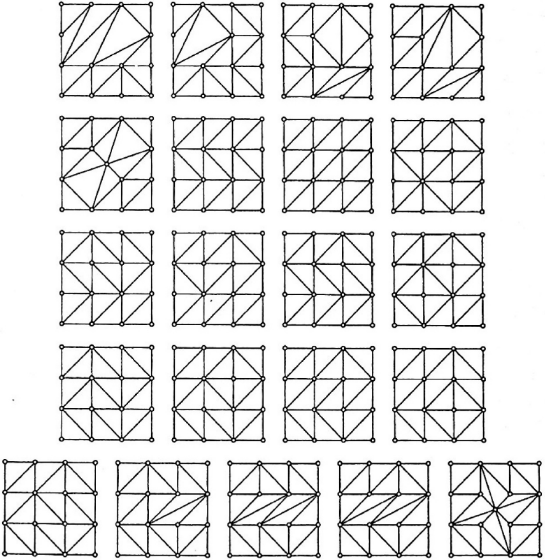
- Każdy graf toroidalny można rozłożyć na siatkę.
- Każda minimalna siatka ma 12 wierzchołków zewnętrznych i co najwyżej 8 wewnętrznych.
- Graf wewnętrzny jest spójny, zewnętrznie planarny.

Czyli:

Wniosek

Nieredukowalnych triangulacji torusa jest skończenie wiele.

Nieredukowalne triangulacje torusa



Wielościany toroidalne

Fakt

Wszystkie minimalne triangulacje torusa można przedstawić w przestrzeni jako wielościany.

Wielościany toroidalne

Fakt

Wszystkie minimalne triangulacje torusa można przedstawić w przestrzeni jako wielościany.

Wniosek

Wszystkie grafy toroidalne można przedstawić w przestrzeni jako wielościany.

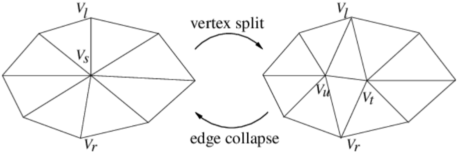
Wielościany toroidalne

Fakt

Wszystkie minimalne triangulacje torusa można przedstawić w przestrzeni jako wielościany.

Wniosek

Wszystkie grafy toroidalne można przedstawić w przestrzeni jako wielościany.



Dziękuję za uwagę