O aproksymacji wielomianowej

Maciej Nowacki

Prezentacja na proseminarium, kwiecień 2020

Twierdzenie Weierstrassa

Twierdzenie Weierstrassa. *Zbiór wielomianów jest gęsty w* $C(I)$*. Innymi słowy, zbiór wszystkich skończonych kombinacji liniowych funkcji* $1, t, t^2, t^3, \dots$ *jest gęsty w* $C(I)$*. Wyrażamy to czasem mówiąc, że funkcje tej postaci rozpinają przestrzeń* $C(I)$*.*

- Karl Weierstrass, 1885
- Czy wszystkie potęgi t są niezbędne by to twierdzenie działało?
- Pytanie to w ogólniejszej formie zadał Bernstein w 1912

Twierdzenie Müntza–Szásza

Twierdzenie Müntza–Szásza. $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, *niech* X *będzie domknięciem zbioru wszystkich skończonych kombinacji liniowych funcji* $1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, \ldots$ *wtedy:*
a) Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$ *to* $X = C(I)$
b) Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$ *i* $\lambda \notin \{\lambda_n\}, \lambda \neq 0$ *to* X *nie zawiera funkcji* t^{λ}

- Pierwotny dowód Hermana Müntza, 1914
- Uproszczony dowód Otto Szásza, 1916
- Herman Müntz urodził się w 1884 roku w Łodzi, w 1919 przyjął obywatelstwo niemieckie
- W 1927 roku pracował blisko z Albertem Einsteinem
- Otto Szász był węgierskim matematykiem urodzonym w 1884 roku
- W 1939 roku odebrał nagrodę Juliusa Königa

Funkcjonały liniowe i ich reprezentacja

Definicja funkcjonału liniowego. V*-przestrzeń liniowa nad ciałek K,* $\phi : V \to \mathbb{K}$ *jest funkcjonałem liniowym wtedy i tylko wtedy gdy jest:*
a)jednorodny
b)addytywny

Twierdzenie. *Każdy funkcjonał liniowy na* $C(I)$ *można przedstawić w postaci całki względem zespolonej miary borelowskiej na I.*

Przekształcenie tezy a) w tw. M-Sz

Twierdzenie będące wnioskiem z twierdzenia Hahna-Banaha. Jeżeli M jest podprzestrzenią unormowanej przestrzeni liniowej X i $x_0 \in X$ to x_0 należy do domknięcia przestrzeni $M \iff$ nie istnieje ograniczony funkcjonał liniowy f na X taki, że $f(x) = 0$ dla każdego $x \in M$ oraz $f(x_o) \neq 0$.

Wniosek: $f \in C(I), f \notin X \iff \exists$ ograniczony funkcjonał liniowy na C(I), który nie znika w punkcje f lecz znika we wszystkich punktach zbioru X.

Więc teza a) M-Sz jest wnioskiem z:
Twierdzenie. Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$ i jeżeli μ jest zespoloną miarą na I t. że:
(1) $\int_I t^{\lambda_n} d\mu(t) = 0$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ to:
(2) $\int_I t^k d\mu(t) = 0$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$
Dzięki temu przestrzeń X będzie zawierać wszystkie funkcje t^k, ponieważ $1 \in X$ zatem wszystkie wielomiany będą należały do X a więc z tw. Weistrassa
$X = C(I)$

Twierdzenie o pierwiastkach

Twierdzenie o rozkładzie pierwiastków w kole Załóżmy, że $f \in H^\infty$, f nie znika tożsamościowo na U gdzie U jest otwartym kołem jesdnostkowym na płaszczyźnie zespolonej i $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ są pierwiastkami f wypisanymi z uwzględnieniem krotności wtedy $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |\lambda_n|) < \infty$

Wniosek: Jeżeli f holomorficzna i $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ pierwiastki w U i $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |\lambda_n|) = \infty$ to $f(z) = 0 \ \forall z \in U$

Teza a) M-Sz

Wracamy do naszej tezy a).

Niech $f(z) = \int_I t^z d\mu_n(t)$, jest ona ograniczona w prawej półpłaszczyźnie i (1) orzeka że $f(\lambda_n) = 0$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Niech $g(z) = f(\frac{1+z}{1-z})$ $z \in U$, $g(\alpha_n) = 0$ gdzie $\alpha_n = (\lambda_n - 1)/(\lambda_n + 1)$.

Morał: Na mocy wniosku z tw. o pierwiastkach otrzymujemy, że g(z)=0 dla wszystkich $z \in U$. Zatem f=0 a w szczególności f(k)=0 dla $k = 1, 2, 3, \ldots$ a to stanowi warunek (2) z czego wynika nasza teza a)

Teza b)

Nasza teza b):

Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$ i $\lambda \notin \{\lambda_n\}, \lambda \neq 0$ to X nie zawiera funkcji t^λ

Żeby tego dowieść wystarczy zbudować miarę μ na I taką, żeby $f(z) = \int_I t^z d\mu_n(t)$ była funkcją holomorficzną w półpłaszczyźnie $Re z > -1$, która jest równa zeru w punktach $0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ i która nie ma innych pierwiastków w tej półpłaszczyźnie. Funcjonał indukowany przez tą miarę będzie znikał wtedy na przestrzeni X lecz nie będzie znikał na żadnej z funkcji t^λ, jeśli $\lambda \neq 0$ i $\lambda \notin \{\lambda_n\}$