Wykład 5: gęstość $C^\infty([0,1])$ w $AC([0,1])$

Wiktor Wichrowski, Patryk Rutkowski, Kamil Fahmi

Będziemy rozpatrywać następujący problem:

$$\int_0^1 F(x, y, y')\,dx \qquad (1)$$

- F – ciągła jako funkcja trzech zmiennych
- y, y' są ciągłe na $[0,1]$
- $y([0,1]) \subseteq [0,1]$

Lemat:

- F jest ciągła i ma ograniczoną pochodną: $\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| < M$
- $f \in AC[0,1]$ $\quad f(0) = y_0 \quad f(1) = y_1$
- $F(x, f(x), f'(x))$ jest całkowalna

$\forall_\varepsilon$ istnieje $\varphi \in C^1[0,1]$

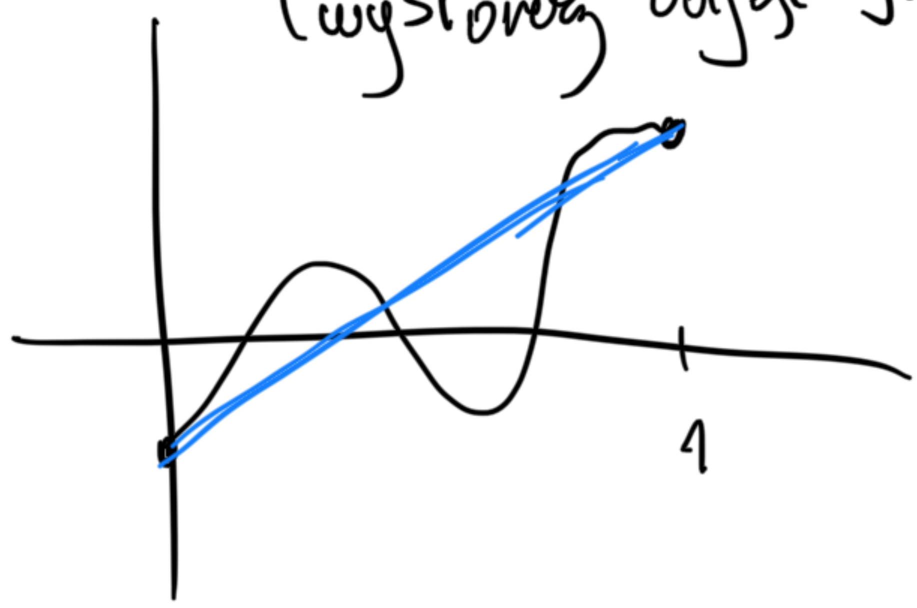
1°) $\varphi(0) = y_0$, $\varphi(1) = y_1$

2°) $\forall_x \; |\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon$

3°) $$\left| \int_0^1 F(x, f(x), f'(x))\,dx - \int_0^1 F(x, \varphi(x), \varphi'(x))\,dx \right| < \varepsilon$$

D-w:

1) f możemy przesunąć tak, aby $f(0)=0$, $f(1)=0$
(wystarczy odjąć f. liniową, a na końcu ją dodać)



$$\tilde{f}(x) = f(x) - \ell(x)$$

$$\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x) + \ell(x)$$

2) zał. że $g_0 = 0$ i $g_1 = 0$

$$u_k = \begin{cases} f'(x) & \text{jeśli } |f'(x)| < k \\ 0 & \text{w. p.p.} \end{cases}$$

$$u_k \longrightarrow f'(x) \quad \text{punktowo}$$

$$f_k = \int_0^x u_k(t)\,dt$$

$$f_k \longrightarrow f \quad \text{punktowo}$$

bo wiadomo, to $|f'(x)|$ - jest całkowalna

3) f_k możemy przybliżać funkcjami $f_{kj} \in C^1[0,1]$

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases},$$

$$j(x) = c\,h(1-x^2) \quad , c > 0;$$

$$\int j(x) = 1$$

$$j_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\, j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$$f_\varepsilon = j_\varepsilon * f$$

$$f_{kn} := j_{\frac{1}{n}} * f_k$$

$$|f_{kn} - f_k|_\infty < \frac{k}{n}$$

---

4) Sprawdzamy warunki 2°) oraz 3°)

2°) $$|f_k(x) - f_{kn}(x)| \leq \frac{k}{n}$$

3°) $$\left|\int_0^1 F(x, f_k(x), f_k'(x))\,dx - \int_0^1 F(x, f_{kn}(x), f_{kn}'(x))\right| < \varepsilon$$

majoranta:

$$|F(x, f_{kn}(x), f_{kn}'(x))| \leq \sup_{\substack{x \in [0,1] \\ y,z \in [-C_k, C_k]}} |F(x,y,z)|$$

5) pokaż, że f_k dobre

Aproksymacja f:

2° $\forall_\varepsilon \exists_k \forall_x \; |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$

bo $$\left|\int_0^x u_k(t)\,dt - \int_0^x f'(t)\,dt\right| =$$

$$\left|\int f'(t)\,dt\right| \leq \int |f'(t)|\,dt \to 0$$

$[0,x] \cap \{|f'| > k\} \qquad \{|f'| > k\}$

bo f' jest całkowalne.

Zatem:

$$\forall_{\varepsilon} \exists_{k_n} \forall_x \ |f_{k_n}(x) - f(x)| \le |f_{k_n}(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| \le 2\varepsilon$$

pozostało pokazać 3°):

$$\left| \int_0^1 F(x, f(x), f'(x))\,dx - \int_0^1 F(x, f_{k_n}(x), f'_{k_n}(x))\,dx \right| \le$$

$$\le \left| \int_0^1 F(x, f(x), f'(x))\,dx - \int_0^1 F(x, f_k(x), f_k'(x))\,dx \right|$$

$$+ \left| \int_0^1 F(x, f_k(x), f_k'(x))\,dx - \int_0^1 F(x, f_{k_n}(x), f'_{k_n}(x))\,dx \right|$$

$$\le 2\varepsilon$$

$$f_k'(x) = \begin{cases} f'(x) & |f'(x)| < k \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

Majoranta:

$$|F(x, f_k(x), f_k'(x))| \le |F(x, f_k(x), f'(x))| \overset{(*)}{+} |F(x, f_k(x), 0)|$$

ograniczone bo ciągła na zbiorze zwartym

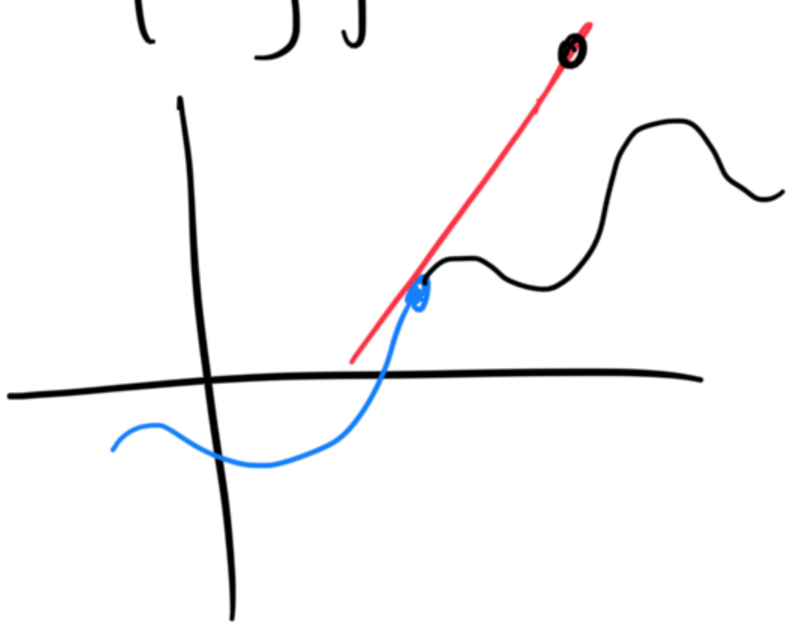
$$\circledast \leq |F(x, f_k(x), f'(x))| \leq |F(x, f(x), f'(x))| +$$

całkowalne z zał

zał:

$$\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| < M$$

$$M \cdot \underbrace{|f(x) - f_k(x)|}_{<\varepsilon}$$



6) Musimy jeszcze uzgodnić brzegi:

$$A_m := \{x : |f'(x)| < m\}$$

Niech $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ będzie f. gładką $h \in C^\infty$ o nośniku zwartym, zwartym w A_m oraz

$$H = \int_0^1 h(t)\,dt$$ będzie skończona.

- $g_{kn}'(x) := f_{kn}'(x) + \frac{1}{H}\left(f_{kn}(0) - f_{k,n}(1)\right) \cdot h(x)$
- $g_{kn}(x) := \int_0^x g_{kn}'(t)\,dt$

Dzięki temu naprawiliśmy warunki brzegowe:

- $g_{kn}(0) = 0$

$$g_{kn}(1) = \int_0^1 g_{kn}'(t)\,dt = \int_0^1 f_{kn}'(t)\,dt + $$

$$+ \int_0^1 \frac{1}{M} \cdot \left(f_{kn}(0) - f_{kn}(1) \right) \cdot h(t)\,dt$$

$$= f_{kn}(1) - f_{kn}(0) + \frac{1}{M} \cdot \left(f_{kn}(0) - f_{kn}(1) \right) \cdot \int_0^1 h(t)\,dt$$

$$= 0$$

7) pozostaje sprawdzić 2°) i 3°):

2°) $$\left| f_{kn}(x) - g_{kn}(x) \right| =$$

$$= \left| \int_{[0,x]} \frac{1}{M} \left(f_{kn}(0) - f_{kn}(1) \right) h(t)\,dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{M} \cdot M \cdot \left(f_{kn}(0) - f_{kn}(1) \right) < 2\varepsilon$$

3°) $$\left| \int_0^1 F(x, f_{kn}(x), f_{kn}'(x))\,dx - \int_0^1 F(x, g_{kn}(x), g_{kn}'(x))\,dx \right| \leq$$

$$\leq \underbrace{\left| \int_0^1 F(x, f_{kn}(x), \underline{f_{kn}'(x)})\,dx - \int_0^1 F(x, f_{kn}(x), \underline{g_{kn}'(x)})\,dx \right|}_{}$$

i)

$$+\left|\int_0^1 F(x, f_{kn}(x), g'_{kn}(x))\,dx - \int_0^1 F(x, g_{kn}(x), g'_{kn}(x))\,dx\right|$$

ii)

Oszacujmy teraz obie części osobno:

i) z definicji otrzymujemy:

$$=\left|\int_{A_m} F(x, f_{kn}(x), f'_{kn}(x)) - F\left(x, f_{kn}(x), f'_{kn}(x) + \frac{1}{M}\left(f_{kn}(0) - f_{kn}(1)\right)h(x)\right)dx\right|$$

a) F jest jednostajnie ciągła na A_m, bo:

- $x \in A_m \subseteq [0,1]$
- $|f_{kn}(x)| < C$ f - ograniczony jako f. ciągła.
- $|f'_{kn}(x)| < m+1$ (oraz $\frac{1}{M}(f_{kn}(0) - f_{kn}(1)) \cdot h(x) < \infty$)

b) jeśli dobierzemy δ z ciągłości jednostajnej F tak aby $|F(\ldots) - F(\ldots)| < \varepsilon$

wtedy: i) $\leq \int_{A_m} \varepsilon\, dt \leq \varepsilon$

... pokazać, że:

c) Czyli wystarczy pokazać, że:

$$\left|\frac{1}{M}\cdot\left(f_{k_n}(0)-f_{k_n}(1)\right)\right|<\delta$$

ddd k_n mamy (pokazaliśmy to w 7.2°)):

$$\left|f_{k_n}(x)-f(x)\right|<\varepsilon_1$$

ii) $$\left|\int_0^1 F(x,f_{k_n}(x),g'_{k_n}(x))\,dx-\int_0^1 F(x,g_{k_n}(x),g'_{k_n}(x))\,dx\right|\le$$

$\boxed{\text{przypomnienie: } \left|\frac{\partial M}{\partial y}\right|<M}$

$$\le\left|\int_0^1 F(x,f_{k_n}(x),g'_{k_n}(x))\right. +$$

$$\left. -\left(\int_0^1 F(x,f_{k_n}(x),g'_{k_n}(x))\,dx+M\cdot\left|f_{k_n}(x)-g_{k_n}(x)\right|\right)\right|\le\varepsilon$$

bo $|f_{k_n}(x)-g_{k_n}(x)|$ jest dowolnie małe ∎

Z tego otrzymujemy następujące tw:

tw. 1 $F(x, y, y')$ ciągła oraz

$\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| < M$ to infimum (1) na AC

$$\int_0^1 F(x, f(x), f'(x))\,dx \qquad (1)$$

Jest takie samo w klasie $C^\infty([0,1])$

D-d:
Wniosek z lematu, bo możemy funkcje AC przybliżać C^∞.

tw 2 Jeśli w klasie $C^\infty([0,1])$ istnieje minimizer to jest on też minimizerem w klasie $AC([0,1])$.

D-d: $C^\infty([0,1]) \subseteq AC([0,1])$