Zwartość kul

Iwona Chlebicka

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego

wykład inauguracyjny r.a. 2020/2021

Zwartość domkniętej kuli jednostkowej

Zwartość

Zbiór A nazywamy ciągowo zwartym jeśli z każdego ciągu punktów $\{a_n\} \subset A$ można wybrać ciąg zbieżny do pewnego $a \in A$.

Zwartość domkniętej kuli jednostkowej

Zwartość

Zbiór A nazywamy ciągowo zwartym jeśli z każdego ciągu punktów $\{a_n\} \subset A$ można wybrać ciąg zbieżny do pewnego $a \in A$.

Domknięta kula jednostkowa

Zwartość domkniętej kuli jednostkowej

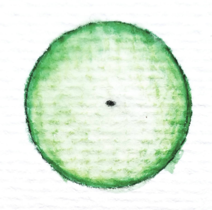
Zwartość

Zbiór A nazywamy ciągowo zwartym jeśli z każdego ciągu punktów $\{a_n\} \subset A$ można wybrać ciąg zbieżny do pewnego $a \in A$.

Domknięta kula jednostkowa

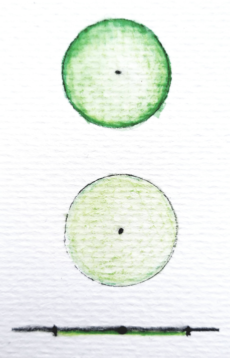
o środku w zerze i promieniu $= 1$

$$B = \{x : \quad \|x\| \leqslant 1\}$$



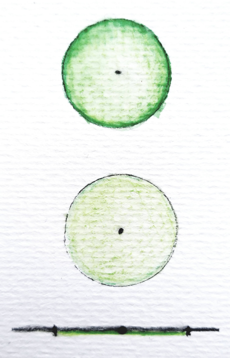
Kule w $\mathbb{R}^n$

Kule w $\mathbb{R}^n$



$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| \leqslant 1\}$$

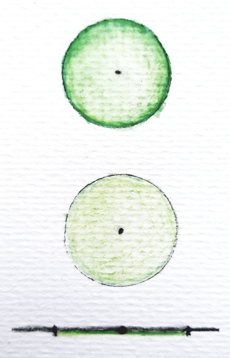
Kule w $\mathbb{R}^n$



$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| \leqslant 1\}$$

- w przestrzeni 3–wymiarowej

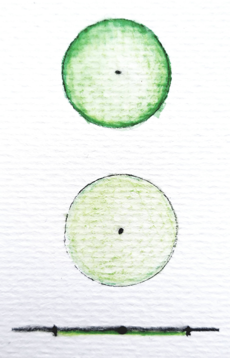
Kule w $\mathbb{R}^n$



$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| \leqslant 1\}$$

- w przestrzeni 3–wymiarowej
- w przestrzeni 2–wymiarowej

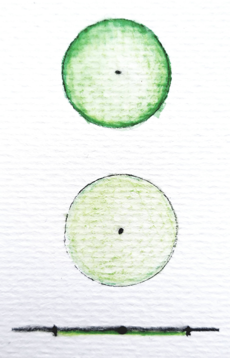
Kule w $\mathbb{R}^n$



$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| \leqslant 1\}$$

- w przestrzeni 3–wymiarowej
- w przestrzeni 2–wymiarowej (znana szerszej publiczności jako koło na płaszczyźnie)

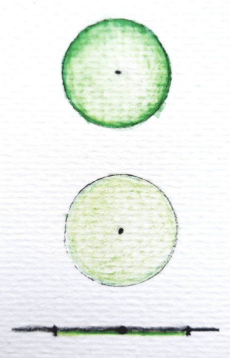
Kule w $\mathbb{R}^n$



$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| \leqslant 1\}$$

- w przestrzeni 3–wymiarowej
- w przestrzeni 2–wymiarowej (znana szerszej publiczności jako koło na płaszczyźnie)
- w przestrzeni 1–wymiarowej

Kule w $\mathbb{R}^n$

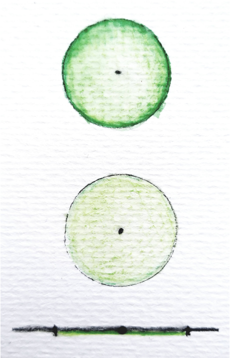


$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| \leqslant 1\}$$

- w przestrzeni 3–wymiarowej
- w przestrzeni 2–wymiarowej (znana szerszej publiczności jako koło na płaszczyźnie)
- w przestrzeni 1–wymiarowej (znana również jako odcinek na prostej)

Czy każdy ciąg punktów z kuli ma podciąg zbieżny?

Kule w $\mathbb{R}^n$



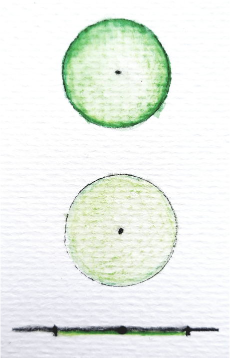
$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| \leqslant 1\}$$

- w przestrzeni 3–wymiarowej
- w przestrzeni 2–wymiarowej (znana szerszej publiczności jako koło na płaszczyźnie)
- w przestrzeni 1–wymiarowej (znana również jako odcinek na prostej)

Czy każdy ciąg punktów z kuli ma podciąg zbieżny? **TAK.**

Dziękuję za uwagę!

Kule w $\mathbb{R}^n$



$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| \leqslant 1\}$$

- w przestrzeni 3–wymiarowej
- w przestrzeni 2–wymiarowej (znana szerszej publiczności jako koło na płaszczyźnie)
- w przestrzeni 1–wymiarowej (znana również jako odcinek na prostej)

Czy każdy ciąg punktów z kuli ma podciąg zbieżny? **TAK.**

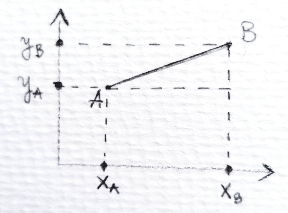
Dziękuję za uwagę!

nie... tak łatwo nie będzie...

Rozważymy co to jest $\|x\|$

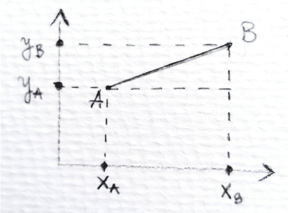
Rozważymy co to jest $\|x\|$

Na płaszczyźnie mamy



Rozważymy co to jest $\|x\|$

Na płaszczyźnie mamy

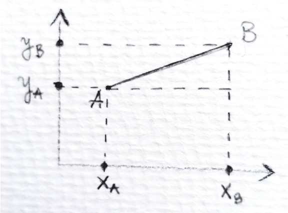


a wtedy odległość punktów to

$$\|A - B\| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

Rozważymy co to jest $\|x\|$

Na płaszczyźnie mamy



a wtedy odległość punktów to

$$\|A - B\| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

Podobnie w 3d, gdy $A = (x_A, y_A, z_A)$ oraz $B = (x_B, y_B, z_B)$ odległość punktów to

$$\|A - B\| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

Czy inna definicja długości ma sens?

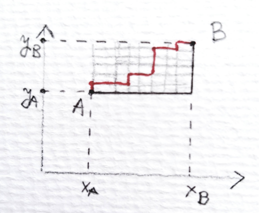
Czy inna definicja długości ma sens?

W mieście, gdy nie wolno
przechodzić przez budynki

Czy inna definicja długości ma sens?

W mieście, gdy nie wolno przechodzić przez budynki odległość, którą musimy przejść między punktami to

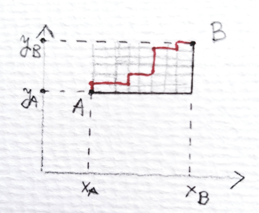
$$\|A-B\|_M = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|.$$



Czy inna definicja długości ma sens?

W mieście, gdy nie wolno przechodzić przez budynki odległość, którą musimy przejść między punktami to

$$\|A-B\|_M = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|.$$

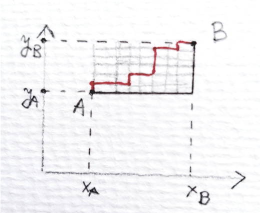


Jak wygląda kula $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ \|x\|_M \leqslant 1\}$?

Czy inna definicja długości ma sens?

W mieście, gdy nie wolno przechodzić przez budynki odległość, którą musimy przejść między punktami to

$$\|A-B\|_M = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|.$$

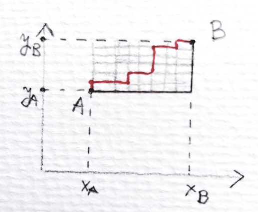


Jak wygląda kula $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ \|x\|_M \leqslant 1\}$?

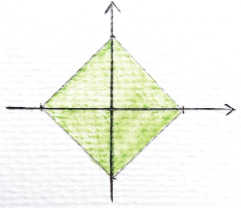
Czy inna definicja długości ma sens?

W mieście, gdy nie wolno przechodzić przez budynki odległość, którą musimy przejść między punktami to

$$\|A-B\|_M = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|.$$



Jak wygląda kula $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ \|x\|_M \leqslant 1\}$?



Czy inna definicja długości ma sens?

Czy inna definicja długości ma sens?

Rozważmy zbiór X i pomyślmy jak zdefiniować odległości pomiędzy jego elementami.

Czy inna definicja długości ma sens?

Rozważmy zbiór X i pomyślmy jak zdefiniować odległości pomiędzy jego elementami.

Metryka to funkcja $d : X \times X \to [0, \infty]$,

Czy inna definicja długości ma sens?

Rozważmy zbiór X i pomyślmy jak zdefiniować odległości pomiędzy jego elementami.

Metryka to funkcja $d : X \times X \to [0, \infty]$, która dla dowolnych wektorów $x_1, x_2, z \in X$ spełnia warunki

- $d(x_1, x_2) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2$,

Czy inna definicja długości ma sens?

Rozważmy zbiór X i pomyślmy jak zdefiniować odległości pomiędzy jego elementami.

Metryka to funkcja $d : X \times X \to [0, \infty]$, która dla dowolnych wektorów $x_1, x_2, z \in X$ spełnia warunki

- $d(x_1, x_2) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2$,
- $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$,

Czy inna definicja długości ma sens?

Rozważmy zbiór X i pomyślmy jak zdefiniować odległości pomiędzy jego elementami.

Metryka to funkcja $d : X \times X \to [0, \infty]$, która dla dowolnych wektorów $x_1, x_2, z \in X$ spełnia warunki

- $d(x_1, x_2) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2$,
- $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$,
- $d(x_1, x_2) \leqslant d(x_1, z) + d(z, x_2)$.

Czy inna definicja długości ma sens?

Rozważmy zbiór X i pomyślmy jak zdefiniować odległości pomiędzy jego elementami.

Metryka to funkcja $d : X \times X \to [0, \infty]$, która dla dowolnych wektorów $x_1, x_2, z \in X$ spełnia warunki

- $d(x_1, x_2) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2$,
- $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$,
- $d(x_1, x_2) \leqslant d(x_1, z) + d(z, x_2)$.

Długość to funkcja $\| \cdot \| : X \to [0, \infty]$, która wektorowi przypisuje jej odległość od zera, zatem definiujemy wzorem

$$\|x\| = d(x, 0).$$

Jeszcze przykłady

Nie ma więc problemu, żeby określić

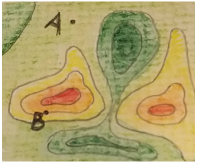
$$d(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & x_1 = x_2, \\ 1 & x_1 \neq x_2, \end{cases}$$

Jeszcze przykłady

Nie ma więc problemu, żeby określić

$$d(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & x_1 = x_2, \\ 1 & x_1 \neq x_2, \end{cases}$$

...albo, żeby definiować odległość punktów po powierzchni

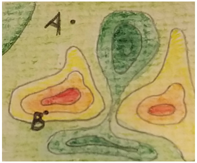


Jeszcze przykłady

Nie ma więc problemu, żeby określić

$$d(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & x_1 = x_2, \\ 1 & x_1 \neq x_2, \end{cases}$$

...albo, żeby definiować odległość punktów po powierzchni



...albo mówić jak daleko od siebie są ciągi albo funkcje...

Skoro mamy zdefiniowaną **długość**, to mamy też pojęcie **zbieżności**

Skoro mamy zdefiniowaną **długość**, to mamy też pojęcie **zbieżności**

Mówimy, że ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny do x (ozn. $x_n \to x$), gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N>0} : \quad \forall_{n>N} \qquad \|x_n - x\| \leqslant \varepsilon.$$

Skoro mamy zdefiniowaną **długość**, to mamy też pojęcie **zbieżności**

Mówimy, że ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny do x (ozn. $x_n \to x$), gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{N>0} : \quad \forall_{n>N} \qquad \|x_n - x\| \leqslant \varepsilon.$$

Na płaszczyźnie (i w $\mathbb{R}^n$) z metryką euklidesową
z każdego ciągu ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny.

Skoro mamy zdefiniowaną długość, to mamy też pojęcie zbieżności

Mówimy, że ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny do x (ozn. $x_n \to x$), gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{N>0} : \quad \forall_{n>N} \qquad \|x_n - x\| \leqslant \varepsilon.$$

Na płaszczyźnie (i w $\mathbb{R}^n$) z metryką euklidesową
z każdego ciągu ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny.

$\simeq$ kula na płaszczyźnie jest zwarta

A w innych przestrzeniach?

Ciągi

Rozważmy $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ oraz $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, \dots)$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$.

Jak możemy zdefiniować ich odległość?

Ciągi

Rozważmy $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ oraz $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, \dots)$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$.

Jak możemy zdefiniować ich odległość?

1. $d_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \forall_i \; x_i = y_i, \\ 1, & \exists_i : \; x_i \neq y_i. \end{cases}$

Ciągi

Rozważmy $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ oraz $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, \dots)$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$.

Jak możemy zdefiniować ich odległość?

1. $d_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \forall_i \; x_i = y_i, \\ 1, & \exists_i : \; x_i \neq y_i. \end{cases}$
2. $d_{\sup}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} |x_i - y_i|$

Ciągi

Rozważmy $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ oraz $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, \dots)$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$.

Jak możemy zdefiniować ich odległość?

1. $d_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \forall_i \; x_i = y_i, \\ 1, & \exists_i : \; x_i \neq y_i. \end{cases}$
2. $d_{\sup}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} |x_i - y_i|$
3. $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{\infty} |x_i - y_i|$

Ciągi

Rozważmy $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ oraz $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, \dots)$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$.

Jak możemy zdefiniować ich odległość?

1. $d_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \forall_i \ x_i = y_i, \\ 1, & \exists_i : \ x_i \neq y_i. \end{cases}$
2. $d_{\sup}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} |x_i - y_i|$
3. $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{\infty} |x_i - y_i|$

A) Która z tych odległości jest najlepsza?

Ciągi

Rozważmy $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ oraz $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, \dots)$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$.

Jak możemy zdefiniować ich odległość?

1. $d_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \forall_i \ x_i = y_i, \\ 1, & \exists_i : \ x_i \neq y_i. \end{cases}$
2. $d_{\sup}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} |x_i - y_i|$
3. $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{\infty} |x_i - y_i|$

A) Która z tych odległości jest najlepsza? To zależy.

Ciągi

Rozważmy $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ oraz $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, \dots)$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$.

Jak możemy zdefiniować ich odległość?

1. $d_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \forall_i \; x_i = y_i, \\ 1, & \exists_i : \; x_i \neq y_i. \end{cases}$

2. $d_{\sup}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} |x_i - y_i|$

3. $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{\infty} |x_i - y_i|$

A) Która z tych odległości jest najlepsza? To zależy.

B) Z każdego ciągu ograniczonego* można wybrać podciąg zbieżny?

Ciągi

Rozważmy $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ oraz $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, \dots)$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$.

Jak możemy zdefiniować ich odległość?

1. $d_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \forall_i \ x_i = y_i, \\ 1, & \exists_i : \ x_i \neq y_i. \end{cases}$

2. $d_{\sup}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} |x_i - y_i|$

3. $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{\infty} |x_i - y_i|$

A) Która z tych odległości jest najlepsza? To zależy.

B) Z każdego ciągu ograniczonego* można wybrać podciąg zbieżny?

* takiego $\{x_n\}$, że $\|x_n\| = d(x_n, 0) \leqslant M$

Ciągi

Rozważmy $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ oraz $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, \ldots)$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$.

Jak możemy zdefiniować ich odległość?

1. $d_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \forall_i \; x_i = y_i, \\ 1, & \exists_i : \; x_i \neq y_i. \end{cases}$
2. $d_{\sup}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} |x_i - y_i|$
3. $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{\infty} |x_i - y_i|$

A) Która z tych odległości jest najlepsza? To zależy.

B) Z każdego ciągu ograniczonego* można wybrać podciąg zbieżny?

* takiego $\{x_n\}$, że $\|x_n\| = d(x_n, 0) \leqslant M$ (czyli z kuli!)

Ciągi

Rozważmy $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ oraz $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, \dots)$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$.

Jak możemy zdefiniować ich odległość?

1. $d_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \forall_i \ x_i = y_i, \\ 1, & \exists_i : \ x_i \neq y_i. \end{cases}$
2. $d_{\sup}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} |x_i - y_i|$
3. $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{\infty} |x_i - y_i|$

A) Która z tych odległości jest najlepsza? To zależy.
B) Z każdego ciągu ograniczonego* można wybrać podciąg zbieżny?
* takiego $\{x_n\}$, że $\|x_n\| = d(x_n, 0) \leqslant M$ (czyli z kuli!)

$$(0, \dots, 0, 1, 0, \dots,)$$

Odległość funkcji

$$\text{Rozważmy} \quad f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}.$$

Jak możemy zdefiniować ich odległość?

Odległość funkcji

$$\text{Rozważmy} \quad f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}.$$

Jak możemy zdefiniować ich odległość?

1. $d_D(f, g) = \begin{cases} 0, & \forall_x \; f(x) = g(x), \\ 1, & \exists_x : \; f(x) \neq g(x). \end{cases}$

Odległość funkcji

$$\text{Rozważmy} \quad f, g : [0,1] \to \mathbb{R}.$$

Jak możemy zdefiniować ich odległość?

1. $d_D(f,g) = \begin{cases} 0, & \forall_x \ f(x) = g(x), \\ 1, & \exists_x : \ f(x) \neq g(x). \end{cases}$

2. $d_1(f,g) =$„pole pomiędzy wykresami funkcji"

Odległość funkcji

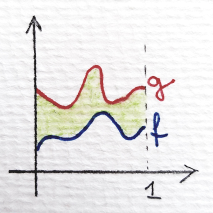
Rozważmy $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

Jak możemy zdefiniować ich odległość?

1. $d_D(f, g) = \begin{cases} 0, & \forall_x \; f(x) = g(x), \\ 1, & \exists_x : \; f(x) \neq g(x). \end{cases}$

2. $d_1(f, g) =$ „pole pomiędzy wykresami funkcji”

czyli $$d_1(f, g) = \int_0^1 |g(x) - f(x)| \, dx$$



Odległość funkcji

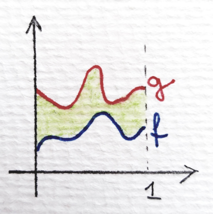
Rozważmy $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$.

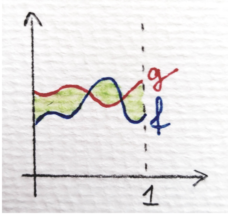
Jak możemy zdefiniować ich odległość?

1. $d_D(f,g) = \begin{cases} 0, & \forall_x \ f(x) = g(x), \\ 1, & \exists_x : \ f(x) \neq g(x). \end{cases}$

2. $d_1(f,g) =$ „pole pomiędzy wykresami funkcji"

czyli $$d_1(f,g) = \int_0^1 |g(x) - f(x)| \, dx$$





Funkcje

definiujemy odległość funkcji $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$.

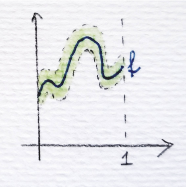
3. $d_{\sup}(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$

Funkcje

definiujemy odległość funkcji $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$.

3. $d_{\text{sup}}(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$

zalety: „blisko” oraz „daleko” są intuicyjne, a kulę wokół dowolnej funkcji możemy narysować

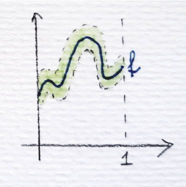


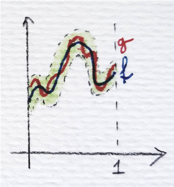
Funkcje

definiujemy odległość funkcji $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$.

3. $d_{\sup}(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$

zalety: „blisko” oraz „daleko” są intuicyjne, a kulę wokół dowolnej funkcji możemy narysować



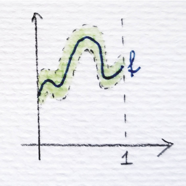


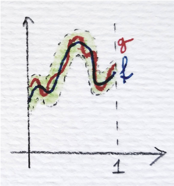
Funkcje

definiujemy odległość funkcji $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$.

3. $d_{\text{sup}}(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$

zalety: „blisko” oraz „daleko” są intuicyjne, a kulę wokół dowolnej funkcji możemy narysować





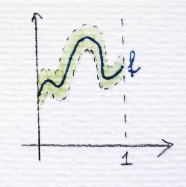
wady: gdy $f = g$ wszędzie poza punktem, to są „daleko”

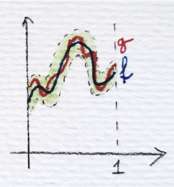
Funkcje

definiujemy odległość funkcji $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$.

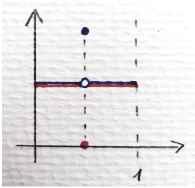
3. $d_{\sup}(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$

zalety: „blisko” oraz „daleko” są intuicyjne, a kulę wokół dowolnej funkcji możemy narysować





wady: gdy $f = g$ wszędzie poza punktem, to są „daleko” (a przecież widać, że są „prawie taką samą” funkcją)



$d_{\sup}(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$

Zbieżność jednostajna

Ciąg $\{f_n\}$ zbieżny do f wg tej odległości, czyli takim, że

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

nazwiemy zbieżnym jednostajnie, ozn. $f_n \rightrightarrows f$.

$d_{\sup}(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$

Zbieżność jednostajna

Ciąg $\{f_n\}$ zbieżny do f wg tej odległości, czyli takim, że

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

nazwiemy zbieżnym jednostajnie, ozn. $f_n \rightrightarrows f$.

To jest równoważny warunek do

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_k :\ \forall_{n>k}\forall_{x\in[0,1]} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Przykłady

$f_n(x) = x + \frac{1}{n} \rightrightarrows x = f(x), \quad$ ale $\quad f_n(x) = x^n \not\rightrightarrows \mathbb{1}_{\{1\}}(x) = f(x).$

Czy każdy ciąg z kuli ma podciąg zbieżny?

* w $\mathbb{R}^n$? **TAK.**

Czy każdy ciąg z kuli ma podciąg zbieżny?

* w $\mathbb{R}^n$? **TAK.**
* w przestrzeniach ciągów? **NIE.**

Czy każdy ciąg z kuli ma podciąg zbieżny?

* w $\mathbb{R}^n$? **TAK.**
* w przestrzeniach ciągów? **NIE.**

$$(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

Czy każdy ciąg z kuli ma podciąg zbieżny?

* w $\mathbb{R}^n$? **TAK.**
* w przestrzeniach ciągów? **NIE.**

$$(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

* w przestrzeniach funkcyjnych? **NIE.**

Czy każdy ciąg z kuli ma podciąg zbieżny?

* w $\mathbb{R}^n$? **TAK.**
* w przestrzeniach ciągów? **NIE.**

$$(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

* w przestrzeniach funkcyjnych? **NIE.**

$$f_n(x) = n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x) \qquad \text{gdy} \qquad d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{[n,n+1]}(x) \qquad \text{gdy} \qquad d_1(f,g) = \sup_{x>0} |f(x) - g(x)|$$

Czy każdy ciąg z kuli ma podciąg zbieżny?

* w $\mathbb{R}^n$? **TAK.**
* w przestrzeniach ciągów? **NIE.**

$$(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

* w przestrzeniach funkcyjnych? **NIE.**

$$f_n(x) = n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x) \qquad \text{gdy} \qquad d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{[n,n+1]}(x) \qquad \text{gdy} \qquad d_1(f,g) = \sup_{x>0} |f(x) - g(x)|$$

* wśród funkcji ciągłych na odcinku?

Czy każdy ciąg z kuli ma podciąg zbieżny?

* w $\mathbb{R}^n$? **TAK.**
* w przestrzeniach ciągów? **NIE.**

$$(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$$

* w przestrzeniach funkcyjnych? **NIE.**

$$f_n(x) = n\mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}(x) \qquad \text{gdy} \qquad d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{[n, n+1]}(x) \qquad \text{gdy} \qquad d_1(f, g) = \sup_{x>0} |f(x) - g(x)|$$

* wśród funkcji ciągłych na odcinku? **NIE.**

Czy każdy ciąg z kuli ma podciąg zbieżny?

* w $\mathbb{R}^n$? **TAK.**
* w przestrzeniach ciągów? **NIE.**

$$(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

* w przestrzeniach funkcyjnych? **NIE.**

$$f_n(x) = n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x) \qquad \text{gdy} \qquad d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{[n,n+1]}(x) \qquad \text{gdy} \qquad d_1(f,g) = \sup_{x>0} |f(x) - g(x)|$$

* wśród funkcji ciągłych na odcinku? **NIE.**

$f_n(x) = x^n$ na $[0,1]$ (ale ten sam ciąg na $[0, \frac{9}{10}]$ jest ok)

Ale... to w ogóle nie ma rozsądnych zwartych rodzin funkcyjnych?!

Ale... to w ogóle nie ma rozsądnych zwartych rodzin funkcyjnych?!

Są.

Zwarte rodziny

Twierdzenie Arzeli-Ascoliego

Zwarte rodziny

Twierdzenie Arzeli-Ascoliego

Jeśli $\mathcal{F}$ to zbiór funkcji ciągłych określonych na odcinku $[0, 1]$

Zwarte rodziny

Twierdzenie Arzeli-Ascoliego

Jeśli $\mathcal{F}$ to zbiór funkcji ciągłych określonych na odcinku $[0,1]$ t.ż.

(i) są wspólnie ograniczone
czyli $\exists_{M \geqslant 0} : \ \forall_{f \in \mathcal{F}} \forall_{x \in [0,1]} \ |f(x)| < M$;

Zwarte rodziny

Twierdzenie Arzeli-Ascoliego

Jeśli $\mathcal{F}$ to zbiór funkcji ciągłych określonych na odcinku $[0,1]$ t.ż.

(i) są wspólnie ograniczone

czyli $\exists_{M\geqslant 0} : \ \forall_{f\in\mathcal{F}}\forall_{x\in[0,1]} \ |f(x)| < M$; czyli są z jakiejś kuli

Zwarte rodziny

Twierdzenie Arzeli-Ascoliego

Jeśli $\mathcal{F}$ to zbiór funkcji ciągłych określonych na odcinku $[0,1]$ t.ż.

(i) są wspólnie ograniczone
czyli $\exists_{M\geqslant 0}: \ \forall_{f\in\mathcal{F}}\forall_{x\in[0,1]} \ |f(x)| < M$; czyli są z jakiejś kuli

(ii) funkcje z $\mathcal{F}$ są jednakowo jednostajnie ciągłe

Zwarte rodziny

Twierdzenie Arzeli-Ascoliego

Jeśli $\mathcal{F}$ to zbiór funkcji ciągłych określonych na odcinku $[0,1]$ t.ż.

(i) są wspólnie ograniczone
czyli $\exists_{M\geqslant 0}: \ \forall_{f\in\mathcal{F}}\forall_{x\in[0,1]} \ |f(x)| < M$; czyli są z jakiejś kuli

(ii) funkcje z $\mathcal{F}$ są jednakowo jednostajnie ciągłe
$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{\delta>0}: \ \forall_{f\in\mathcal{F}}\forall_{x_1,x_2\in[0,1]} \ |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Zwarte rodziny

Twierdzenie Arzeli-Ascoliego

Jeśli $\mathcal{F}$ to zbiór funkcji ciągłych określonych na odcinku $[0,1]$ t.ż.

(i) są wspólnie ograniczone
czyli $\exists_{M\geqslant 0}:\ \forall_{f\in\mathcal{F}}\forall_{x\in[0,1]}\ |f(x)|<M$; czyli są z jakiejś kuli

(ii) funkcje z $\mathcal{F}$ są jednakowo jednostajnie ciągłe
$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}:\ \forall_{f\in\mathcal{F}}\forall_{x_1,x_2\in[0,1]}\ |x_1-x_2|<\delta \implies |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

(iii) zbiór $\mathcal{F}$ jest domknięty
czyli jeśli $g_n\in\mathcal{F}$ oraz $g_n\rightrightarrows g$, to $g\in\mathcal{F}$.

Zwarte rodziny

Twierdzenie Arzeli-Ascoliego

Jeśli $\mathcal{F}$ to zbiór funkcji ciągłych określonych na odcinku $[0,1]$ t.ż.

(i) są wspólnie ograniczone
czyli $\exists_{M\geqslant 0}: \ \forall_{f\in\mathcal{F}}\forall_{x\in[0,1]}\ |f(x)|<M$; czyli są z jakiejś kuli

(ii) funkcje z $\mathcal{F}$ są jednakowo jednostajnie ciągłe
$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}: \ \forall_{f\in\mathcal{F}}\forall_{x_1,x_2\in[0,1]}\ |x_1-x_2|<\delta \implies |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

(iii) zbiór $\mathcal{F}$ jest domknięty
czyli jeśli $g_n\in\mathcal{F}$ oraz $g_n \rightrightarrows g$, to $g\in\mathcal{F}$.

to rodzina $\mathcal{F}$ jest ciągowo zwarta

Zwarte rodziny

Twierdzenie Arzeli-Ascoliego

Jeśli $\mathcal{F}$ to zbiór funkcji ciągłych określonych na odcinku $[0,1]$ t.ż.

(i) są wspólnie ograniczone
czyli $\exists_{M\geqslant 0}: \ \forall_{f\in\mathcal{F}}\forall_{x\in[0,1]} \ |f(x)| < M$; czyli są z jakiejś kuli

(ii) funkcje z $\mathcal{F}$ są jednakowo jednostajnie ciągłe
$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{\delta>0}: \ \forall_{f\in\mathcal{F}}\forall_{x_1,x_2\in[0,1]} \ |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

(iii) zbiór $\mathcal{F}$ jest domknięty
czyli jeśli $g_n \in \mathcal{F}$ oraz $g_n \rightrightarrows g$, to $g \in \mathcal{F}$.

to rodzina $\mathcal{F}$ jest ciągowo zwarta, czyli z każdego ciągu $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ można wybrać podciąg zbieżny do pewnego elementu $f \in \mathcal{F}$.

Zwarte rodziny

Twierdzenie Arzeli-Ascoliego

Jeśli $\mathcal{F}$ to zbiór funkcji ciągłych określonych na odcinku $[0,1]$ t.ż.

(i) są wspólnie ograniczone
czyli $\exists_{M\geqslant 0}: \ \forall_{f\in\mathcal{F}}\forall_{x\in[0,1]} \ |f(x)|<M;$ czyli są z jakiejś kuli

(ii) funkcje z $\mathcal{F}$ są jednakowo jednostajnie ciągłe
$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}: \ \forall_{f\in\mathcal{F}}\forall_{x_1,x_2\in[0,1]} \ |x_1-x_2|<\delta \implies |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

(iii) zbiór $\mathcal{F}$ jest domknięty
czyli jeśli $g_n\in\mathcal{F}$ oraz $g_n\rightrightarrows g$, to $g\in\mathcal{F}$.

to rodzina $\mathcal{F}$ jest ciągowo zwarta, czyli z każdego ciągu $\{f_n\}\subset\mathcal{F}$ można wybrać podciąg zbieżny do pewnego elementu $f\in\mathcal{F}$.

Twierdzenie z końca XIX w. udowodnione
po raz pierwszy przez Giulio Ascoliego

Zwarte rodziny

Twierdzenie Arzeli-Ascoliego

Jeśli $\mathcal{F}$ to zbiór funkcji ciągłych określonych na odcinku $[0,1]$ t.ż.

(i) są wspólnie ograniczone
czyli $\exists_{M\geqslant 0}:\ \forall_{f\in\mathcal{F}}\forall_{x\in[0,1]}\ |f(x)|<M$; czyli są z jakiejś kuli

(ii) funkcje z $\mathcal{F}$ są jednakowo jednostajnie ciągłe
$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}:\ \forall_{f\in\mathcal{F}}\forall_{x_1,x_2\in[0,1]}\ |x_1-x_2|<\delta \implies |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

(iii) zbiór $\mathcal{F}$ jest domknięty
czyli jeśli $g_n\in\mathcal{F}$ oraz $g_n \rightrightarrows g$, to $g\in\mathcal{F}$.

to rodzina $\mathcal{F}$ jest ciągowo zwarta, czyli z każdego ciągu $\{f_n\}\subset\mathcal{F}$ można wybrać podciąg zbieżny do pewnego elementu $f\in\mathcal{F}$.

Twierdzenie z końca XIX w. udowodnione
po raz pierwszy przez Giulio Ascoliego
Uwaga: to jest dobry wynik, bo działa też w drugą stronę,
co pokazał też pod koniec XIX w. Cesare Arzelá

Przykłady

OK

- $\{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \ f-$ciągła, $|f(x)| \leqslant 2, \ |f(x_1)-f(x_2)| \leqslant 3|x_1-x_2|\}$
- $\{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \ f -$ różniczkowalna, $|f(x)| \leqslant 5, |f'(x)| \leqslant 4\}$

NIE OK

$f_n(x) = x^n$ na $[0,1]$ (ale ten sam ciąg na $[0, \frac{9}{10}]$ jest ok)

Przykłady

OK

- $\{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \ f - \text{ciągła}, \ |f(x)| \leqslant 2, \ |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant 3|x_1 - x_2|\}$
- $\{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \ f - \text{różniczkowalna}, \ |f(x)| \leqslant 5, |f'(x)| \leqslant 4\}$

NIE OK

$$f_n(x) = x^n \ \ \text{na} \ \ [0,1] \qquad \text{(ale ten sam ciąg na} \ \ [0, \tfrac{9}{10}] \ \ \text{jest ok)}$$

te funkcje nie są jednakowo jednostajnie ciągłe

A do czego mi się to przyda?

A do czego mi się to przyda?

To zależy!

A do czego mi się to przyda?

To zależy!

AM1 Na egzamin!

RRZ Twierdzenie Peano o istnieniu rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych

A do czego mi się to przyda?

To zależy!

AM1 Na egzamin!

RRZ Twierdzenie Peano o istnieniu rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych

AZ Twierdzenie Montela-Osgooda-Stieltjesa o wybieraniu podciągu niemal jednostajnie zbieżnego z ciągu wspólnie ograniczonych funkcji holomorficznych

AH Twierdzenie Petera-Weyla o zwartych grupach Liego (i ich reprezentacjach zespolonych)

A do czego mi się to przyda?

To zależy!

AM1 Na egzamin!

RRZ Twierdzenie Peano o istnieniu rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych

AZ Twierdzenie Montela-Osgooda-Stieltjesa o wybieraniu podciągu niemal jednostajnie zbieżnego z ciągu wspólnie ograniczonych funkcji holomorficznych

AH Twierdzenie Petera-Weyla o zwartych grupach Liego (i ich reprezentacjach zespolonych)

Dowód!

Twierdzenie Arzeli-Ascoliego

// przypomnienie sformułowania do dowodu //

Jeśli $\mathcal{F}$ to zbiór funkcji ciągłych określonych na odcinku $[0,1]$ t.ż.

(i) są wspólnie ograniczone
czyli $\exists_{M\geqslant 0}: \ \forall_{f\in\mathcal{F}}\forall_{x\in[0,1]}\ |f(x)| < M$; czyli są z jakiejś kuli

(ii) funkcje z $\mathcal{F}$ są jednakowo jednostajnie ciągłe
$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}: \ \forall_{f\in\mathcal{F}}\forall_{x_1,x_2\in[0,1]}\ |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

(iii) zbiór $\mathcal{F}$ jest domknięty
czyli jeśli $g_n \in \mathcal{F}$ oraz $g_n \rightrightarrows g$, to $g \in \mathcal{F}$.

to z każdego ciągu $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ można wybrać podciąg zbieżny do pewnego elementu $f \in \mathcal{F}$.

Twierdzenie Arzeli-Ascoliego

// przypomnienie sformułowania do dowodu //

Jeśli $\mathcal{F}$ to zbiór funkcji ciągłych określonych na odcinku $[0,1]$ t.ż.

(i) są wspólnie ograniczone
czyli $\exists_{M\geqslant 0}:\ \forall_{f\in\mathcal{F}}\forall_{x\in[0,1]}\ |f(x)|<M$; czyli są z jakiejś kuli

(ii) funkcje z $\mathcal{F}$ są jednakowo jednostajnie ciągłe
$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}:\ \forall_{f\in\mathcal{F}}\forall_{x_1,x_2\in[0,1]}\ |x_1-x_2|<\delta \implies |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

(iii) zbiór $\mathcal{F}$ jest domknięty
czyli jeśli $g_n\in\mathcal{F}$ oraz $g_n \rightrightarrows g$, to $g\in\mathcal{F}$.

to z każdego ciągu $\{f_n\}\subset\mathcal{F}$ można wybrać podciąg zbieżny do pewnego elementu $f\in\mathcal{F}$.

Dowód.

Zakładamy, że $\mathcal{F}$ spełnia warunki **(i)–(iii)**.

Twierdzenie Arzeli-Ascoliego

// przypomnienie sformułowania do dowodu //

Jeśli $\mathcal{F}$ to zbiór funkcji ciągłych określonych na odcinku $[0,1]$ t.ż.

(i) są wspólnie ograniczone
czyli $\exists_{M\geqslant 0}: \ \forall_{f\in\mathcal{F}}\forall_{x\in[0,1]} \ |f(x)| < M$; czyli są z jakiejś kuli

(ii) funkcje z $\mathcal{F}$ są jednakowo jednostajnie ciągłe
$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{\delta>0}: \ \forall_{f\in\mathcal{F}}\forall_{x_1,x_2\in[0,1]} \ |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

(iii) zbiór $\mathcal{F}$ jest domknięty
czyli jeśli $g_n \in \mathcal{F}$ oraz $g_n \rightrightarrows g$, to $g \in \mathcal{F}$.

to z każdego ciągu $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ można wybrać podciąg zbieżny do pewnego elementu $f \in \mathcal{F}$.

Dowód.

Zakładamy, że $\mathcal{F}$ spełnia warunki **(i)–(iii)**. Bierzemy dowolny ciąg $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$

Twierdzenie Arzeli-Ascoliego

// przypomnienie sformułowania do dowodu //

Jeśli $\mathcal{F}$ to zbiór funkcji ciągłych określonych na odcinku $[0, 1]$ t.ż.

(i) są wspólnie ograniczone
czyli $\exists_{M \geqslant 0} : \forall_{f \in \mathcal{F}} \forall_{x \in [0,1]} \ |f(x)| < M$; czyli są z jakiejś kuli

(ii) funkcje z $\mathcal{F}$ są jednakowo jednostajnie ciągłe
$\forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{\delta > 0} : \ \forall_{f \in \mathcal{F}} \forall_{x_1, x_2 \in [0,1]} \ |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

(iii) zbiór $\mathcal{F}$ jest domknięty
czyli jeśli $g_n \in \mathcal{F}$ oraz $g_n \rightrightarrows g$, to $g \in \mathcal{F}$.

to z każdego ciągu $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ można wybrać podciąg zbieżny do pewnego elementu $f \in \mathcal{F}$.

Dowód.

Zakładamy, że $\mathcal{F}$ spełnia warunki **(i)–(iii)**. Bierzemy dowolny ciąg $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ i pokazujemy, że można wybrać z niego podciąg jednostajnie zbieżny

Twierdzenie Arzeli-Ascoliego

// przypomnienie sformułowania do dowodu //

Jeśli $\mathcal{F}$ to zbiór funkcji ciągłych określonych na odcinku $[0,1]$ t.ż.

(i) są wspólnie ograniczone
czyli $\exists_{M\geqslant 0}: \ \forall_{f\in\mathcal{F}}\forall_{x\in[0,1]} \ |f(x)| < M$; czyli są z jakiejś kuli

(ii) funkcje z $\mathcal{F}$ są jednakowo jednostajnie ciągłe
$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{\delta>0}: \ \forall_{f\in\mathcal{F}}\forall_{x_1,x_2\in[0,1]} \ |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

(iii) zbiór $\mathcal{F}$ jest domknięty
czyli jeśli $g_n \in \mathcal{F}$ oraz $g_n \rightrightarrows g$, to $g \in \mathcal{F}$.

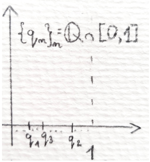
to z każdego ciągu $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ można wybrać podciąg zbieżny do pewnego elementu $f \in \mathcal{F}$.

Dowód.

Zakładamy, że $\mathcal{F}$ spełnia warunki **(i)–(iii)**. Bierzemy dowolny ciąg $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ i pokazujemy, że można wybrać z niego podciąg jednostajnie zbieżny (najpierw na $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, a potem na $[0,1]$).

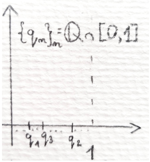
Dowód twierdzenia Ascoliego 1/3

Ustawmy liczby wymierne $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ w ciąg $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

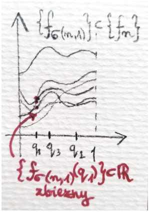


Dowód twierdzenia Ascoliego 1/3

Ustawmy liczby wymierne $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ w ciąg $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

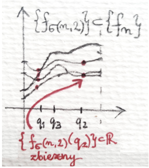


Skoro **(i)**, to $\{f_n(q_1)\}_n$ jest ograniczonym ciągiem liczbowym, z którego można wybrać podciąg zbieżny. Weźmy taki podciąg $\{f_{\sigma(n,1)}\}$ ciągu $\{f_n\}$, że $\{f_{\sigma(n,1)}(q_1)\}$ jest zbieżny.



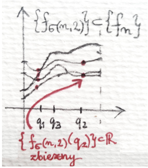
Dowód twierdzenia Ascoliego 2/3

Następnie z $\{f_{\sigma(n,1)}\} \subset \{f_n\}$ wybieramy podciąg $\{f_{\sigma(n,2)}\}$ tak, by $\{f_{\sigma(n,2)}(q_2)\}$ był zbieżny.



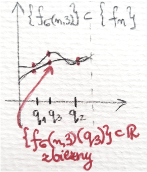
Dowód twierdzenia Ascoliego 2/3

Następnie z $\{f_{\sigma(n,1)}\} \subset \{f_n\}$ wybieramy podciąg $\{f_{\sigma(n,2)}\}$ tak, by $\{f_{\sigma(n,2)}(q_2)\}$ był zbieżny.



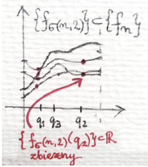
Następnie z $\{f_{\sigma(n,2)}\} \subset \{f_n\}$ wybieramy podciąg $\{f_{\sigma(n,3)}\}$ tak, by $\{f_{\sigma(n,3)}(q_3)\}$ był zbieżny.

Wtedy $\{f_{\sigma(n,3)}(q_1)\}$, $\{f_{\sigma(n,3)}(q_2)\}$ i $\{f_{\sigma(n,3)}(q_3)\}$ są zbieżne.



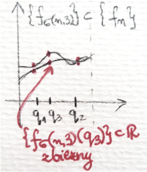
Dowód twierdzenia Ascoliego 2/3

Następnie z $\{f_{\sigma(n,1)}\} \subset \{f_n\}$ wybieramy podciąg $\{f_{\sigma(n,2)}\}$ tak, by $\{f_{\sigma(n,2)}(q_2)\}$ był zbieżny.



Następnie z $\{f_{\sigma(n,2)}\} \subset \{f_n\}$ wybieramy podciąg $\{f_{\sigma(n,3)}\}$ tak, by $\{f_{\sigma(n,3)}(q_3)\}$ był zbieżny.

Wtedy $\{f_{\sigma(n,3)}(q_1)\}$, $\{f_{\sigma(n,3)}(q_2)\}$ i $\{f_{\sigma(n,3)}(q_3)\}$ są zbieżne.



Powtarzając procedurę dla każdego $\{q_n\}_n$ otrzymamy ciąg $\{f_{\sigma(n,n)}\}_n$, dla którego $\{f_{\sigma(n,n)}(q_j)\}$ jest zbieżny dla każdego $j \in \mathbb{N}$.

Dowód twierdzenia Ascoliego 3/3

Wybraliśmy z $\{f_n\}$ podciąg $\{f_{\sigma(n,n)}\}$ zbieżny na $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Pokażemy, że jest on zbieżny jednostajnie na $[0,1]$. Ustalmy $\varepsilon > 0$.

Dowód twierdzenia Ascoliego 3/3

Wybraliśmy z $\{f_n\}$ podciąg $\{f_{\sigma(n,n)}\}$ zbieżny na $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Pokażemy, że jest on zbieżny jednostajnie na $[0,1]$. Ustalmy $\varepsilon > 0$.

(a) Z założenia **(ii)** istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdej $f \in \mathcal{F}$

$$\text{jeśli} \quad |x_1 - x_2| < \delta, \quad \text{to} \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Dowód twierdzenia Ascoliego 3/3

Wybraliśmy z $\{f_n\}$ podciąg $\{f_{\sigma(n,n)}\}$ zbieżny na $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Pokażemy, że jest on zbieżny jednostajnie na $[0,1]$. Ustalmy $\varepsilon > 0$.

(a) Z założenia **(ii)** istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdej $f \in \mathcal{F}$

$$\text{jeśli} \quad |x_1 - x_2| < \delta, \quad \text{to} \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

(b) Istnieje $m = m(\delta)$ taka, że dla każdego $x \in [0,1]$ istnieje $j(x) \in \{1, 2, \ldots, m\}$ taka, że $|x - q_{j(x)}| < \delta$.

Dowód twierdzenia Ascoliego 3/3

Wybraliśmy z $\{f_n\}$ podciąg $\{f_{\sigma(n,n)}\}$ zbieżny na $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Pokażemy, że jest on zbieżny jednostajnie na $[0,1]$. Ustalmy $\varepsilon > 0$.

(a) Z założenia **(ii)** istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdej $f \in \mathcal{F}$

$$\text{jeśli} \quad |x_1 - x_2| < \delta, \quad \text{to} \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

(b) Istnieje $m = m(\delta)$ taka, że dla każdego $x \in [0,1]$ istnieje $j(x) \in \{1, 2, \ldots, m\}$ taka, że $|x - q_{j(x)}| < \delta$.

(c) Na mocy poprzedniego slajdu istnieje $n_\varepsilon > 0$ taka, że dla każdego $k, l > n_\varepsilon$ zachodzi $|f_{\sigma(k,k)}(q_j) - f_{\sigma(l,l)}(q_j)| < \varepsilon$ dla $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Dowód twierdzenia Ascoliego 3/3

Wybraliśmy z $\{f_n\}$ podciąg $\{f_{\sigma(n,n)}\}$ zbieżny na $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Pokażemy, że jest on zbieżny jednostajnie na $[0,1]$. Ustalmy $\varepsilon > 0$.

(a) Z założenia **(ii)** istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdej $f \in \mathcal{F}$

$$\text{jeśli} \quad |x_1 - x_2| < \delta, \quad \text{to} \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

(b) Istnieje $m = m(\delta)$ taka, że dla każdego $x \in [0,1]$ istnieje $j(x) \in \{1, 2, \ldots, m\}$ taka, że $|x - q_{j(x)}| < \delta$.

(c) Na mocy poprzedniego slajdu istnieje $n_\varepsilon > 0$ taka, że dla każdego $k, l > n_\varepsilon$ zachodzi $|f_{\sigma(k,k)}(q_j) - f_{\sigma(l,l)}(q_j)| < \varepsilon$ dla $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

(d) $$|f_{\sigma(k,k)}(x) - f_{\sigma(l,l)}(x)| \leqslant |f_{\sigma(k,k)}(x) - f_{\sigma(k,k)}(q_{j(x)})| \\ + |f_{\sigma(k,k)}(q_{j(x)}) - f_{\sigma(l,l)}(q_{j(x)})| + |f_{\sigma(l,l)}(q_{j(x)}) - f_{\sigma(l,l)}(x)| < 3\varepsilon.$$

Dowód twierdzenia Ascoliego 3/3

Wybraliśmy z $\{f_n\}$ podciąg $\{f_{\sigma(n,n)}\}$ zbieżny na $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Pokażemy, że jest on zbieżny jednostajnie na $[0,1]$. Ustalmy $\varepsilon > 0$.

(a) Z założenia **(ii)** istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdej $f \in \mathcal{F}$

$$\text{jeśli} \quad |x_1 - x_2| < \delta, \quad \text{to} \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

(b) Istnieje $m = m(\delta)$ taka, że dla każdego $x \in [0,1]$ istnieje $j(x) \in \{1, 2, \ldots, m\}$ taka, że $|x - q_{j(x)}| < \delta$.

(c) Na mocy poprzedniego slajdu istnieje $n_\varepsilon > 0$ taka, że dla każdego $k, l > n_\varepsilon$ zachodzi $|f_{\sigma(k,k)}(q_j) - f_{\sigma(l,l)}(q_j)| < \varepsilon$ dla $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

(d) $$|f_{\sigma(k,k)}(x) - f_{\sigma(l,l)}(x)| \leqslant |f_{\sigma(k,k)}(x) - f_{\sigma(k,k)}(q_{j(x)})| + |f_{\sigma(k,k)}(q_{j(x)}) - f_{\sigma(l,l)}(q_{j(x)})| + |f_{\sigma(l,l)}(q_{j(x)}) - f_{\sigma(l,l)}(x)| < 3\varepsilon.$$

Zatem $f_{\sigma(n,n)} \rightrightarrows f$ na $[0,1]$.

Dowód twierdzenia Ascoliego 3/3

Wybraliśmy z $\{f_n\}$ podciąg $\{f_{\sigma(n,n)}\}$ zbieżny na $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Pokażemy, że jest on zbieżny jednostajnie na $[0,1]$. Ustalmy $\varepsilon > 0$.

(a) Z założenia **(ii)** istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdej $f \in \mathcal{F}$

$$\text{jeśli} \quad |x_1 - x_2| < \delta, \quad \text{to} \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

(b) Istnieje $m = m(\delta)$ taka, że dla każdego $x \in [0,1]$ istnieje $j(x) \in \{1, 2, \ldots, m\}$ taka, że $|x - q_{j(x)}| < \delta$.

(c) Na mocy poprzedniego slajdu istnieje $n_\varepsilon > 0$ taka, że dla każdego $k, l > n_\varepsilon$ zachodzi $|f_{\sigma(k,k)}(q_j) - f_{\sigma(l,l)}(q_j)| < \varepsilon$ dla $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

(d) $$|f_{\sigma(k,k)}(x) - f_{\sigma(l,l)}(x)| \leqslant |f_{\sigma(k,k)}(x) - f_{\sigma(k,k)}(q_{j(x)})| + |f_{\sigma(k,k)}(q_{j(x)}) - f_{\sigma(l,l)}(q_{j(x)})| + |f_{\sigma(l,l)}(q_{j(x)}) - f_{\sigma(l,l)}(x)| < 3\varepsilon.$$

Zatem $f_{\sigma(n,n)} \rightrightarrows f$ na $[0,1]$. Z domkniętości $\mathcal{F}$, czyli założenia **(iii)**, mamy $f \in \mathcal{F}$.

Dowód twierdzenia Ascoliego 3/3

Wybraliśmy z $\{f_n\}$ podciąg $\{f_{\sigma(n,n)}\}$ zbieżny na $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Pokażemy, że jest on zbieżny jednostajnie na $[0,1]$. Ustalmy $\varepsilon > 0$.

(a) Z założenia **(ii)** istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdej $f \in \mathcal{F}$

$$\text{jeśli} \quad |x_1 - x_2| < \delta, \quad \text{to} \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

(b) Istnieje $m = m(\delta)$ taka, że dla każdego $x \in [0,1]$ istnieje $j(x) \in \{1, 2, \dots, m\}$ taka, że $|x - q_{j(x)}| < \delta$.

(c) Na mocy poprzedniego slajdu istnieje $n_\varepsilon > 0$ taka, że dla każdego $k, l > n_\varepsilon$ zachodzi $|f_{\sigma(k,k)}(q_j) - f_{\sigma(l,l)}(q_j)| < \varepsilon$ dla $j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

(d)
$$|f_{\sigma(k,k)}(x) - f_{\sigma(l,l)}(x)| \leqslant |f_{\sigma(k,k)}(x) - f_{\sigma(k,k)}(q_{j(x)})| + |f_{\sigma(k,k)}(q_{j(x)}) - f_{\sigma(l,l)}(q_{j(x)})| + |f_{\sigma(l,l)}(q_{j(x)}) - f_{\sigma(l,l)}(x)| < 3\varepsilon.$$

Zatem $f_{\sigma(n,n)} \rightrightarrows f$ na $[0,1]$. Z domkniętości $\mathcal{F}$, czyli założenia **(iii)**, mamy $f \in \mathcal{F}$. $\square$

Dziękuję za uwagę!

Dziękuję za uwagę!

tym razem na serio