# ZASADA WŁACZEŃ I WYŁĄCZEŃ

## 1. Przypomnienie

$$[n] = \{1, \ldots, n\} \quad \text{dla } n > 0,$$
$$P_k(n) = \{A \subseteq [n] : \ |A| = k\}.$$

Przyjmiemy również oznaczenie

$$P_{\geq k}(n) = \{A \subseteq [n] : \ |A| \geq k\}.$$

Przypominamy, że w wykładzie 1 udowodniliśmy następujące dwie równości:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \tag{2.1}$$

oraz

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \tag{2.2}$$

Udowodnimy teraz twierdzenie będące uogólnieniem tych dwóch równości na przypadek dowolnej liczby zbiorów skończonych.

## 2. Wzór włączeń i wyłączeń

**Twierdzenie 2.1.** Jeśli $A_1, \ldots, A_n$ są zbiorami skończonymi, to

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{T \in P_k(n)} \Big|\bigcap_{j \in T} A_j\Big|. \tag{2.3}$$

**Dowód.** Wprowadźmy oznaczenie:

$$S_k(B_1, \ldots, B_m) = \sum_{T \in P_k(m)} \Big|\bigcap_{j \in T} B_j\Big|.$$

Teza twierdzenia przybiera wtedy postać:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k(A_1, \ldots, A_n).$$

Twierdzenia dowodzimy przez indukcję względem $n$. Dla $n = 1$ twierdzenie jest oczywiste. Dla $n = 2$ i $n = 3$ było już udowodnione. Zakładamy teraz, że dla dowolnych $n$ zbiorów (gdzie $n \geq 2$) twierdzenie jest prawdziwe i dowodzimy, że jest prawdziwe dla dowolnych $n+1$ zbiorów. Niech więc $A_1, \ldots, A_{n+1}$ będą dowolnymi zbiorami skończonymi. Wówczas

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}| &= |(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}| = \\
&= |A_1 \cup \ldots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1}| = \\
&= |A_1 \cup \ldots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1})|.
\end{aligned}$$

Korzystamy teraz dwukrotnie z założenia indukcyjnego: dla zbiorów $A_1, \ldots, A_n$ oraz dla zbiorów $A_1 \cap A_{n+1}, \ldots, A_n \cap A_{n+1}$:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k(A_1, \ldots, A_n),$$

$$|(A_1 \cap A_{n+1}) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1})| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k(A_1 \cap A_{n+1}, \ldots, A_n \cap A_{n+1}).$$

Zauważmy następnie, że

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup \ldots \cup A_n| + |A_{n+1}| &= S_1(A_1, \ldots, A_n) + |A_{n+1}| + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} S_k(A_1, \ldots, A_n) = \\
&= |A_1| + \ldots + |A_n| + |A_{n+1}| + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} S_k(A_1, \ldots, A_n) = \\
&= S_1(A_1, \ldots, A_{n+1}) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} S_k(A_1, \ldots, A_n)
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
&|(A_1 \cap A_{n+1}) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1})| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k(A_1 \cap A_{n+1}, \ldots, A_n \cap A_{n+1}) = \\
&\quad = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} S_k(A_1 \cap A_{n+1}, \ldots, A_n \cap A_{n+1}) + \\
&\qquad\qquad + (-1)^{n+1} S_n(A_1 \cap A_{n+1}, \ldots, A_n \cap A_{n+1}) = \\
&\quad = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} S_k(A_1 \cap A_{n+1}, \ldots, A_n \cap A_{n+1}) + \\
&\qquad\qquad + (-1)^{n+1} |(A_1 \cap A_{n+1}) \cap \ldots \cap (A_n \cap A_{n+1})| = \\
&\quad = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} S_k(A_1 \cap A_{n+1}, \ldots, A_n \cap A_{n+1}) + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}| = \\
&\quad = \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k} S_{k-1}(A_1 \cap A_{n+1}, \ldots, A_n \cap A_{n+1}) - (-1)^{n+2} |A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}| = \\
&\quad = \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k} S_{k-1}(A_1 \cap A_{n+1}, \ldots, A_n \cap A_{n+1}) - (-1)^{n+2} S_{n+1}(A_1, \ldots, A_{n+1}) = \\
&\quad = -\sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} S_{k-1}(A_1 \cap A_{n+1}, \ldots, A_n \cap A_{n+1}) - (-1)^{n+2} S_{n+1}(A_1, \ldots, A_{n+1}).
\end{aligned}$$

Zatem

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = S_1(A_1, \ldots, A_{n+1}) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} S_k(A_1, \ldots, A_n) +$$

$$+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1}S_{k-1}(A_1\cap A_{n+1},\ldots,A_n\cap A_{n+1})+(-1)^{n+2}S_{n+1}(A_1,\ldots,A_{n+1})=$$

$$=S_1(A_1,\ldots,A_{n+1})+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1}(S_k(A_1,\ldots,A_n)+S_{n+1}(A_1,\ldots,A_{n+1}))+$$
$$+(-1)^{n+2}S_{n+1}(A_1,\ldots,A_{n+1}).$$

Następnie zauważmy, że

$$S_k(A_1,\ldots,A_n)+S_{k-1}(A_1\cap A_{n+1},\ldots,A_n\cap A_{n+1})=S_k(A_1,\ldots,A_{n+1})$$

Stąd ostatecznie dostajemy

$$|A_1\cup\ldots\cup A_n|=$$
$$=S_1(A_1,\ldots,A_{n+1})+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1}S_k(A_1,\ldots,A_{n+1})+(-1)^{n+2}S_{n+1}(A_1,\ldots,A_{n+1})=$$
$$=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}S_k(A_1,\ldots,A_{n+1}),$$

co kończy dowód twierdzenia.

Wzór (2.3) nazywamy **wzorem włączeń i wyłączeń**.

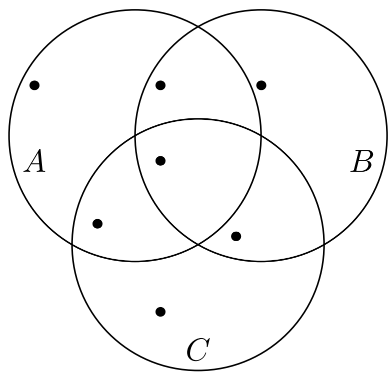
**Inny dowód.** Przeglądamy kolejne składniki sumy stojącej po prawej stronie równości i przy każdym elemencie iloczynu $\bigcap_{j\in T} A_j$ rysujemy znak plus lub minus w zależności od tego, czy liczba $\left|\bigcap_{j\in T} A_j\right|$ występowała w sumie ze znakiem plus czy minus. Inaczej mówiąc, jeśli zbiór $T$ ma nieparzystą liczbę elementów, to rysujemy znak plus; jeśli zaś zbiór $T$ ma parzystą liczbę elementów, to rysujemy znak minus.

Zilustrujemy tę procedurę (w przypadku sumy trzech zbiorów $A\cup B\cup C$) serią rysunków. Dowodzimy równości

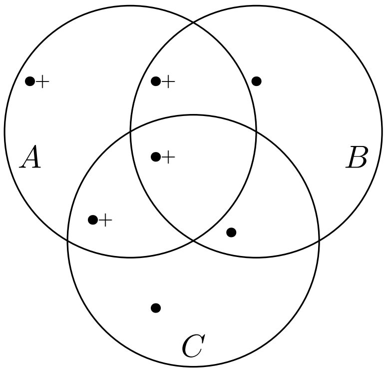
$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|.$$

Przeglądamy składniki sumy po prawej stronie i rysujemy znaki plus kolejno przy każdym elemencie zbiorów $A$, $B$ i $C$, potem znaki minus przy każdym elemencie zbiorów $A\cap B$, $A\cap C$ i $B\cap C$, wreszcie znaki plus przy każdym elemencie zbioru $A\cap B\cap C$.

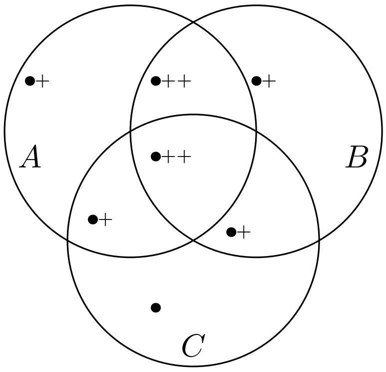
Rysunek 1: zbiory $A$, $B$ i $C$ wraz z zaznaczonymi przykładowymi elementami (po jednym elemencie w każdej składowej).



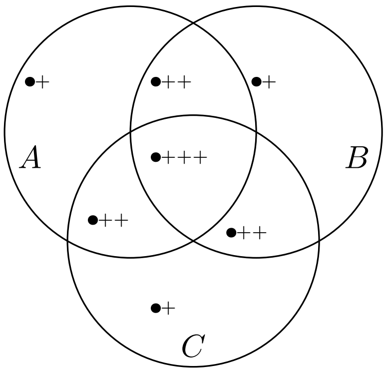
Rysunek 2: przy każdym elemencie zbioru $A$ rysujemy znak plus



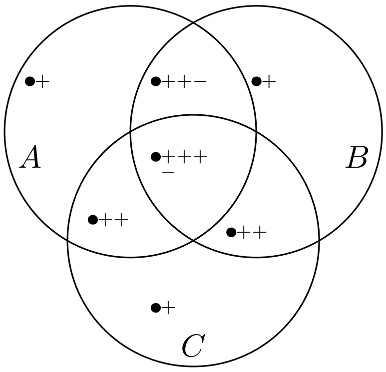

Rysunek 3: przy każdym elemencie zbioru $B$ rysujemy znak plus



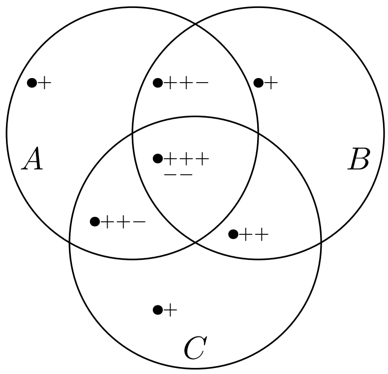

Rysunek 4: przy każdym elemencie zbioru $C$ rysujemy znak plus



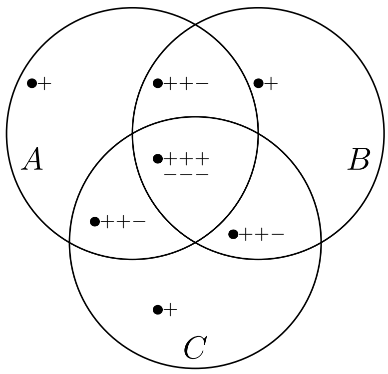

Rysunek 5: przy każdym elemencie zbioru $A \cap B$ rysujemy znak minus



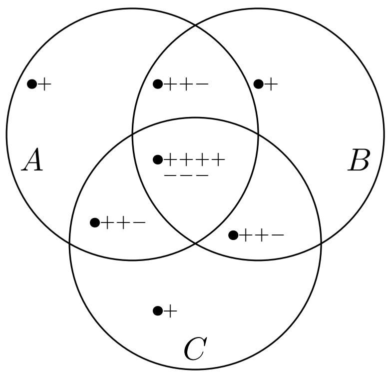
Rysunek 6: przy każdym elemencie zbioru $A \cap C$ rysujemy znak minus




Rysunek 7: przy każdym elemencie zbioru $B \cap C$ rysujemy znak minus




Rysunek 8: przy każdym elemencie zbioru $A \cap B \cap C$ rysujemy znak plus




Zauważamy, że przy każdym elemencie sumy $A \cup B \cup C$ liczba narysowanych plusów jest o jeden większa od liczby narysowanych minusów: przy elementach należących do jednego zbioru narysowaliśmy tylko jeden plus, przy elementach należących do dwóch zbiorów narysowaliśmy dwa plusy i jeden minus, wreszcie przy elementach należących do wszystkich trzech zbiorów narysowaliśmy cztery plusy i trzy minusy. To daje równość

$$(\text{liczba plusów}) - (\text{liczba minusów}) = |A \cup B \cup C|.$$

Nietrudno przy tym zauważyć, że w każdym z siedmiu powyższych kroków liczba narysowanych znaków była równa liczbie elementów rozpatrywanego zbioru. Stąd dostajemy równość

$$\text{(liczba plusów)}-\text{(liczba minusów)} = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|,$$

z której wynika równość (2.2).

Powróćmy do dowodu twierdzenia 2.1. Znów zauważamy, że prawa strona równości (2.3) jest różnicą między liczbą plusów i liczbą minusów. Wystarczy zatem pokazać, że przy każdym elemencie sumy zbiorów $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ narysowaliśmy o jeden plus więcej. Niech $x \in A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Niech następnie

$$M = \{j : \ x \in A_j\}.$$

Inaczej mówiąc, $x \in A_j$ wtedy i tylko wtedy, gdy $j \in M$. Oznaczmy $m = |M|$; oczywiście $m > 0$. Niech teraz $T \in P_k(n)$ i popatrzmy na zbiór $\bigcap\limits_{j\in T} A_j$; jest to jeden ze zbiorów występujących po prawej stronie równości (2.3). Jeśli $T \setminus M \neq \varnothing$, to oczywiście mamy $x \notin \bigcap\limits_{j\in T} A_j$. Przypuśćmy zatem, że $T \subseteq M$. Wtedy przy elemencie $x$ rysowaliśmy znak plus lub minus, w zależności od parzystości $k$: plus dla nieparzystych $k$, minus dla parzystych $k$. Dla danego $k$ liczba takich zbiorów $T$ jest równa $\binom{m}{k}$. Liczby plusów i minusów narysowanych przy $x$ są zatem równe

$$\text{liczba plusów} = \sum_{2\nmid k} \binom{m}{k}.$$

$$\text{liczba minusów} = \sum_{k>0, 2|k} \binom{m}{k},$$

skąd dostajemy

$$\text{liczba plusów} - \text{liczba minusów} = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \binom{m}{k}.$$

Z równości (przypominamy, że $m > 0$)

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} = 0$$

wynika, że

$$\binom{m}{0} + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} = 0,$$

czyli

$$1 = -\sum_{k=1}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \binom{m}{k}.$$

Stąd wynika, że przy elemencie $x$ narysowaliśmy o jeden plus więcej. Tak jest dla każdego elementu $x$ sumy $A_1 \cup \ldots \cup A_n$. To zaś oznacza, że suma po prawej stronie równości będzie równa liczbie elementów sumy $A_1 \cup \ldots \cup A_n$, co kończy dowód.

### 3. Liczba funkcji z jednego zbioru skończonego na drugi zbiór skończony

**Twierdzenie 2.2.** Dane są dwa zbiory skończone $A$ i $B$. Niech $|A| = m$ i $|B| = n$. Wtedy

$$|\{f \in A^B :\ f \text{ jest „na”}\}| = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n. \tag{2.4}$$

**Dowód.** Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że $A = [m]$ i $B = [n]$. Definiujemy zbiory $A_1, \ldots, A_m$ w następujący sposób:

$$A_j = \{f \in A^B :\ j \notin R_f\}$$

dla $j = 1, 2, \ldots, m$. Inaczej mówiąc

$$A_j = (A \setminus \{j\})^B.$$

Korzystając ze wzoru włączeń i wyłączeń otrzymujemy

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_m| = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \sum_{T \in P_k(m)} \Big|\bigcap_{j \in T} A_j\Big|.$$

Niech zatem $T \in P_k(m)$. Wtedy

$$\bigcap_{j \in T} A_j = \bigcap_{j \in T} (A \setminus \{j\})^B = (A \setminus T)^B,$$

skąd otrzymujemy

$$\Big|\bigcap_{j \in T} A_j\Big| = \big|(A \setminus T)^B\big| = (m-k)^n.$$

Zatem

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_m| = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \sum_{T \in P_k(m)} (m-k)^n = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \binom{m}{k} (m-k)^n.$$

Do zakończenia dowodu wystarczy zauważyć, że suma zbiorów $A_1 \cup \ldots \cup A_m$ składa się z tych funkcji $f : B \to A$, które nie są „na”. Zatem

$$\{f \in A^B :\ f \text{ jest „na”}\} = A^B \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_m),$$

czyli

$$\begin{aligned}|\{f \in A^B :\ f \text{ jest „na"}\}| &= m^n - |A_1 \cup \ldots \cup A_m| = \\ &= m^n - \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \binom{m}{k} (m-k)^n = \\ &= m^n + \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k} \binom{m}{k} (m-k)^n = \\ &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{k} \binom{m}{k} (m-k)^n,\end{aligned}$$

c. b. d. o.

**4. Liczba nieporządków**

**Permutacją** zbioru skończonego $A$ nazywamy funkcję różnowartościową $\pi : A \to A$ przekształcającą zbiór $A$ na siebie. **Punktem stałym** permutacji $\pi$ nazywamy taki element $a$ zbioru $A$, dla którego $\pi(a) = a$. **Nieporządkiem** nazywamy permutację bez punktów stałych. Zbiór wszystkich permutacji zbioru $A$ oznaczymy symbolem $S(A)$, a zbiór nieporządków zbioru $A$ symbolem $D(A)$.

Powyższa definicja permutacji nie jest identyczna z definicją przyjętą w wykładzie pierwszym. Pokażemy teraz, że w pewnym sensie te dwie definicje opisują te same obiekty kombinatoryczne. Przypuśćmy zatem, że mamy dany zbiór skończony $A$. Ustalmy pewne uporządkowanie tego zbioru:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Niech $\pi : A \to A$ będzie permutacją zbioru $A$ w sensie powyższej definicji. Przekształcenie $\pi$ możemy wtedy utożsamić z ciągiem $\big(\pi(a_1), \pi(a_2), \ldots, \pi(a_n)\big)$ elementów zbioru $A$. Oczywiście ten ciąg jest różnowartościowy, a więc jest permutacją zbioru $A$ w sensie definicji z wykładu pierwszego. Zwróćmy uwagę na to, że utożsamienie przekształcenia $\pi$ z ciągiem elementów zbioru $A$ jest zależne od przyjętego na początku uporządkowania zbioru $A$. Zauważmy też, że w przypadku, gdy $A = [n]$, obie definicje pokrywają się.

Niech wreszcie $D_n$ oznacza liczbę nieporządków zbioru $n$-elementowego, to znaczy np. $D_n = D([n])$ dla $n > 0$. Przyjmujemy ponadto $D_0 = 1$.

**Twierdzenie 2.3** Niech $|A| = n > 0$. Wtedy

$$D_n = |D(A)| = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}. \tag{2.5}$$

**Dowód.** Definiujemy zbiory $A_1, \ldots, A_n$ w następujący sposób:

$$A_j = \{\pi \in S(A) :\ \pi(j) = j\}$$

dla $j = 1, \ldots, n$. Mamy wówczas

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{T \in P_k(n)} \Big| \bigcap_{j \in T} A_j \Big|.$$

Niech teraz $T \in P_k(n)$. Wówczas

$$\bigcap_{j \in T} A_j = \bigcap_{j \in T} \{\pi : \ \pi(j) = j\} = \{\pi : \ \forall j \in T(\pi(j) = j)\} = \{\pi : \ \pi \mid T = \mathrm{id}\}.$$

Stąd wynika, że

$$\Big| \bigcap_{j \in T} A_j \Big| = (n-k)!$$

Zatem

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \ldots \cup A_n| &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{T \in P_k(n)} \Big| \bigcap_{j \in T} A_j \Big| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{T \in P_k(n)} (n-k)! = \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \cdot (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot (n-k)! = \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{n!}{k!}. \end{aligned}$$

Następnie zauważamy, że suma zbiorów $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ składa się z tych permutacji, które mają co najmniej jeden punkt stały. Zatem

$$D(A) = S(A) \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n),$$

skąd wynika, że

$$\begin{aligned} |D(A)| &= n! - |A_1 \cup \ldots \cup A_n| = n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{n!}{k!} = \\ &= n! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot \frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{n!}{k!} = \\ &= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

To kończy dowód twierdzenia.

Z powyższego twierdzenia wyprowadzimy wniosek dotyczący prawdopodobieństwa wylosowania nieporządku. Przypuśćmy, że losujemy permutację ustalonego zbioru $n$-elementowego $A$ i pytamy o to, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy nieporządek. Zbiorem zdarzeń elementarnych $\Omega$ w tym przypadku jest zbiór $S(A)$ wszystkich permutacji zbioru $A$; przyjmujemy, że wylosowanie każdej permutacji jest jednakowo prawdopodobne. Interesuje nas prawdopodobieństwo zdarzenia $D(A) \subseteq \Omega$. To prawdopodobieństwo jest równe

$$P\big(D(A)\big) = \frac{|D(A)|}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}=\mathrm{e}^{-1},$$

skąd wynika, że dla dużych $n$ rozważane prawdopodobieństwo jest w przybliżeniu równe $\mathrm{e}^{-1}\approx 0{,}367879$ (już dla $n=9$ uzyskujemy dokładność przybliżenia 6 cyfr po przecinku).

**5. Uogólnienie wzoru włączeń i wyłączeń**

Przypuśćmy, że mamy dane zbiory skończone $A_1,\ldots,A_n\subseteq X$, gdzie $X$ jest ustalonym zbiorem skończonym. Przyjmiemy, że

$$\bigcap_{j\in\varnothing}A_j=X.$$

Korzystając z tej umowy, możemy wysłowić zasadę włączeń i wyłączeń w inny sposób. Zastanówmy się, ile elementów zbioru $X$ nie należy do żadnego ze zbiorów $A_1,\ldots,A_n$. Otóż mamy

$$\begin{aligned}|X\setminus(A_1\cup\ldots\cup A_n)|&=|X|-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{T\in P_k(n)}\Big|\bigcap_{j\in T}A_j\Big|=\\&=\Big|\bigcup_{j\in\varnothing}A_j\Big|+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\sum_{T\in P_k(n)}\Big|\bigcap_{j\in T}A_j\Big|=\\&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\sum_{T\in P_k(n)}\Big|\bigcap_{j\in T}A_j\Big|.\end{aligned}$$

Niech nadal $A_1,\ldots,A_n\subseteq X$. Przyjmiemy wtedy oznaczenie:

$$D_r(X,A_1,\ldots,A_n)=\big\{x\in X:\ |\{i\in[n]:\ x\in A_i\}|=r\big\},$$

gdzie $0\le r\le n$. Inaczej mówiąc, $D_r(X,A_1,\ldots,A_n)$ jest zbiorem tych elementów zbioru $X$, które należą do zbiorów $A_i$ dla dokładnie $r$ indeksów $i$. Jeśli zbiory $A_1,\ldots,A_n$ są ponumerowane bez powtórzeń, to $D_r(X,A_1,\ldots,A_n)$ jest zbiorem tych elementów zbioru $X$, które należą do dokładnie $r$ zbiorów spośród $A_1,\ldots,A_n$. W dalszym ciągu, będziemy pisać w skrócie, że element zbioru $X$ należy do dokładnie $r$ zbiorów spośród $A_1,\ldots,A_n$, mając na myśli to, że istnieje dokładnie $r$ indeksów $i$ takich, że ten element należy do zbioru $A_i$.

Pokazaliśmy przed chwilą, że

$$|D_0(X,A_1,\ldots,A_n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\sum_{T\in P_k(n)}\Big|\bigcap_{j\in T}A_j\Big|.\tag{2.6}$$

Tę równość można uogólnić.

**Twierdzenie 2.4** Niech $A_1, \ldots, A_n$ będą skończonymi podzbiorami zbioru skończonego $X$. Wówczas dla dowolnego $r = 0, 1, \ldots, n$ mamy

$$|D_r(X, A_1, \ldots, A_n)| = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \sum_{T \in P_k(n)} \Big| \bigcap_{j \in T} A_j \Big|. \tag{2.7}$$

**Dowód.** Niech $R \in P_r(n)$. Wyznaczymy liczbę tych $x \in X$, które mają własność:

$$x \in A_j \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad j \in R.$$

Inaczej mówiąc, wyznaczymy liczbę tych $x \in X$, które należą dokładnie do tych zbiorów $A_j$, dla których $j \in R$.
Niech

$$B = \bigcap_{j \in R} A_j \quad \text{oraz} \quad B_j = B \cap A_j$$

dla $j \notin R$. Naszym celem jest wyznaczenie liczby elementów zbioru

$$\bigcap_{j \notin R} (B \setminus B_j),$$

czyli obliczenie $D_0(B, B_{i_1}, \ldots, B_{i_{n-r}})$, gdzie $[n] \setminus R = \{i_1, \ldots, i_{n-r}\}$.
Ze wzoru (2.6) wynika, że

$$\begin{aligned}
|D_0(B, B_{i_1}, \ldots, B_{i_{n-r}})| &= \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \sum_{T \in P_k([n] \setminus R)} \Big| \bigcap_{j \in T} B_j \Big| = \\
&= \sum_{k=0}^{n-r} \sum_{T \in P_k([n] \setminus R)} (-1)^k \Big| \bigcap_{j \in T} (A_j \cap B) \Big| = \\
&= \sum_{k=0}^{n-r} \sum_{T \in P_k([n] \setminus R)} (-1)^k \Big| \bigcap_{j \in T} \Big( A_j \cap \bigcap_{i \in R} A_i \Big) \Big| = \\
&= \sum_{k=0}^{n-r} \sum_{T \in P_k([n] \setminus R)} (-1)^k \Big| \Big( \bigcap_{i \in R} A_i \Big) \cap \Big( \bigcap_{j \in T} A_j \Big) \Big| = \\
&= \sum_{k=0}^{n-r} \sum_{T \in P_k([n] \setminus R)} (-1)^k \Big| \bigcap_{j \in T \cup R} A_j \Big| = \\
&= \sum_{k=0}^{n-r} \sum_{\substack{T \in P_{k+r}([n]) \\ R \subseteq T}} (-1)^k \Big| \bigcap_{j \in T} A_j \Big| = \\
&= \sum_{k=r}^{n} \sum_{\substack{T \in P_k([n]) \\ R \subseteq T}} (-1)^{k-r} \Big| \bigcap_{j \in T} A_j \Big| = \\
&= \sum_{\substack{T \\ R \subseteq T \subseteq [n]}} (-1)^{|T|-r} \Big| \bigcap_{j \in T} A_j \Big|.
\end{aligned}$$

Dla ustalonego zbioru $R$ obliczyliśmy, ile jest takich $x \in X$, które należą do dokładnie tych zbiorów $A_j$, dla których $j \in R$. Teraz chcemy obliczyć, ile jest takich $x$, które należą do dokładnie $r$ zbiorów $A_j$ (dokładniej: chcemy obliczyć, ile jest takich $x$, dla których $|\{i \in [n] : \ x \in A_i\}| = r$). W tym celu musimy zsumować otrzymane liczby dla wszystkich $r$-elementowych podzbiorów $R$ zbioru $[n]$. Mamy zatem

$$\begin{aligned}
|D_r(X, A_1, \ldots, A_n)| &= \sum_{R \in P_r(n)} \sum_{\substack{T \\ R \subseteq T \subseteq [n]}} (-1)^{|T|-r} \Big|\bigcap_{j \in T} A_j\Big| = \\
&= \sum_{T \in P_{\geq r}(n)} \sum_{R \in P_r(T)} (-1)^{|T|-r} \Big|\bigcap_{j \in T} A_j\Big| = \\
&= \sum_{T \in P_{\geq r}(n)} \binom{|T|}{r} \cdot (-1)^{|T|-r} \Big|\bigcap_{j \in T} A_j\Big| = \\
&= \sum_{k=r}^{n} \sum_{T \in P_k(n)} \binom{k}{r} \cdot (-1)^{k-r} \Big|\bigcap_{j \in T} A_j\Big| = \\
&= \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \sum_{T \in P_k(n)} \Big|\bigcap_{j \in T} A_j\Big|,
\end{aligned}$$

co kończy dowód twierdzenia.

## 6. Liczba permutacji mających $r$ punktów stałych

W tym paragrafie obliczymy, ile jest permutacji zbioru $n$-elementowego mających dokładnie $r$ punktów stałych. Niech

$$D_r(A) = \big\{\pi \in S(A) : \ |\{i \in A : \ \pi(i) = i\}| = r\big\}.$$

W szczególności $D_0(A) = D(A)$.

**Twierdzenie 2.5** Niech $|A| = n$ i niech $0 \leq r \leq n$. Wtedy

$$|D_r(A)| = \frac{n!}{r!} \cdot \sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^k}{k!}. \tag{2.8}$$

**Dowód. Sposób I.** Wybieramy najpierw zbiór $r$ punktów stałych permutacji, a następnie permutujemy pozostałe elementy tak, by nie utworzyć nowego punktu stałego; inaczej mówiąc permutacja pozostałych elementów jest nieporządkiem. Stąd wynika wzór

$$D_r(A) = \binom{n}{r} \cdot D_{n-r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} \cdot (n-r)! \cdot \sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{n!}{r!} \cdot \sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

**Sposób II.** Korzystamy z twierdzenia 2.4. Definiujemy zbiory $A_1, \ldots, A_n$ w następujący sposób:

$$A_j = \{\pi \in S(A) : \ \pi(j) = j\}$$

dla $j = 1, \ldots, n$. Tak jak w dowodzie twierdzenia 2.3 stwierdzamy, że dla $T \subseteq [n]$ zachodzi równość

$$\Big|\bigcap_{j\in T} A_j\Big| = (n-k)!$$

Z twierdzenia 2.4 otrzymujemy teraz

$$\begin{aligned}
|D_r(A)| = D_r(S(A), A_1, \ldots, A_n) = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \sum_{T\in P_k(n)} \Big|\bigcap_{j\in T} A_j\Big| = \\
= \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \sum_{T\in P_k(n)} (n-k)! = \\
= \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \binom{n}{k} (n-k)! = \\
= \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \cdot (n-k)! = \\
= \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \frac{n!}{k!} = \\
= \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \cdot \frac{k!}{r!\cdot(k-r)!} \cdot \frac{n!}{k!} = \\
= \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \cdot \frac{n!}{r!\cdot(k-r)!} = \\
= \frac{n!}{r!} \cdot \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \cdot \frac{1}{(k-r)!} = \\
= \frac{n!}{r!} \cdot \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^{k} \cdot \frac{1}{k!},
\end{aligned}$$

co kończy dowód twierdzenia.

## 7. Średnia liczba punktów stałych

Niech $|A| = n$. Przypuśćmy, że wybieramy losowo jedną permutację ze zbioru $S(A)$. Oznaczmy przez $p_r$ prawdopodobieństwo tego, że wylosowana permutacja będzie miała dokładnie $r$ punktów stałych. Z twierdzenia 2.5 wynika, że

$$p_r = \frac{D_r(A)}{n!} = \frac{1}{r!} \cdot \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \cdot \frac{1}{k!}.$$

Niech zmienna losowa $X$ będzie określona wzorem

$$X(\pi) = |\{j \in A :\ \pi(j) = j\}|.$$

Zatem $X(\pi)$ jest liczbą punktów stałych permutacji $\pi$. W tym paragrafie obliczymy wartość średnią zmiennej $X$.

Z definicji wartości średniej mamy

$$E(X) = \sum_{r=0}^{n} r \cdot p_r .$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{r=0}^{n} r \cdot p_r = \sum_{r=1}^{n} r \cdot p_r = \sum_{r=1}^{n} r \cdot \frac{1}{r!} \cdot \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \cdot \frac{1}{k!} = \\ &= \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(r-1)!} \cdot \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \cdot \frac{1}{k!} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^k}{(r-1)! \cdot k!}. \end{aligned}$$

Korzystamy teraz ze wzoru

$$\sum_{r=1}^{n} \sum_{k=0}^{n-r} a_{r,k} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{j} a_{r,j-r}.$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{r=1}^{n} \sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^k}{(r-1)! \cdot k!} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{j} \frac{(-1)^{j-r}}{(r-1)! \cdot (j-r)!} = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{j} \frac{(-1)^{j-r} \cdot (j-1)!}{(j-1)! \cdot (r-1)! \cdot (j-r)!} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{j} \frac{(-1)^{j-r}}{(j-1)!} \cdot \frac{(j-1)!}{(r-1)! \cdot (j-r)!} = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{j} \frac{(-1)^{j-r}}{(j-1)!} \cdot \binom{j-1}{r-1} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=0}^{j-1} \frac{(-1)^{j-r-1}}{(j-1)!} \cdot \binom{j-1}{r} = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=0}^{j-1} \frac{(-1)^{j+r-1}}{(j-1)!} \cdot \binom{j-1}{r} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} \cdot \sum_{r=0}^{j-1} (-1)^r \cdot \binom{j-1}{r} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{j!} \cdot \sum_{r=0}^{j} (-1)^r \cdot \binom{j}{r}. \end{aligned}$$

Korzystamy teraz z równości

$$\sum_{r=0}^{j} (-1)^r \cdot \binom{j}{r} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } j = 0, \\ 0 & \text{jeśli } j > 0. \end{cases}$$

Stąd ostatecznie

$$E(X) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{j!} \cdot \sum_{r=0}^{j} (-1)^r \cdot \binom{j}{r} = \frac{(-1)^0}{0!} = 1.$$

Średnią liczbę punktów stałych permutacji można obliczyć znacznie prościej, korzystając z następującej własności wartości średniej zmiennych losowych:

$$E(X_1 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n).$$

Zdefiniujmy teraz $n$ zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$:

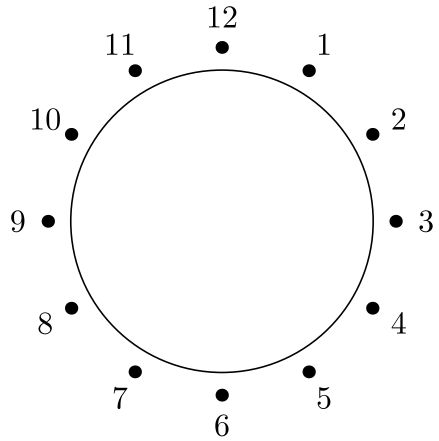
$$X_i(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \pi(i) = i, \\ 0 & \text{jeśli } \pi(i) \neq i. \end{cases}$$

Nietrudno zauważyć, że wtedy $X = X_1 + \ldots + X_n$, gdzie $X$ jest zmienną losową zdefiniowaną wyżej. Następnie łatwo obliczyć, że $E(X_i) = P(X = 1) = \frac{1}{n}$. Stąd dostajemy

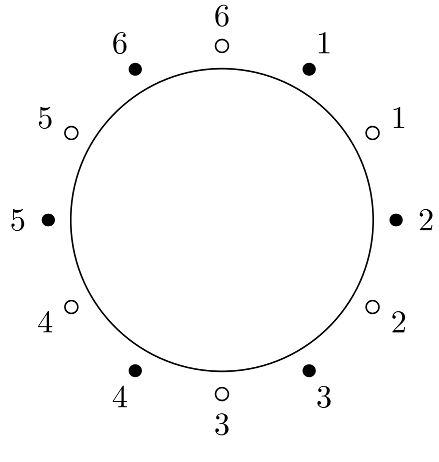
$$E(X) = E(X_1) + \ldots + E(X_n) = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

## 8. Problem par małżeńskich

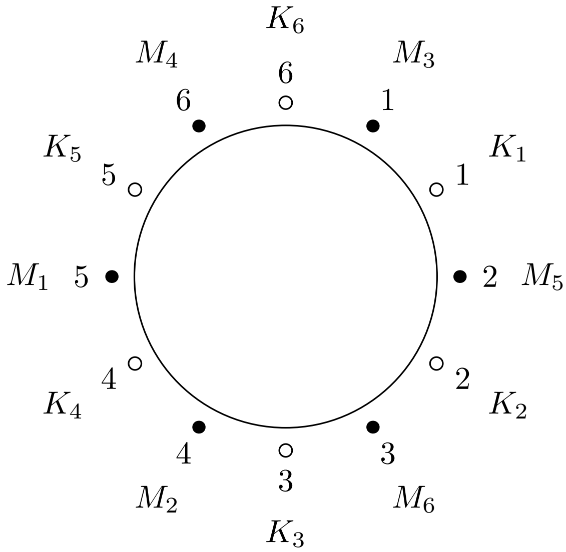
W tym paragrafie rozwiążemy następujący problem pochodzący od Lucasa (*le problème des ménages*). Dany jest okrągły stół, wokół którego mamy posadzić na numerowanych miejscach $n$ par małżeńskich w taki sposób, by panie i panowie siedzieli naprzemian i by żadna pani nie siedziała obok swojego męża. Lucas pytał o to, na ile sposobów możemy te osoby posadzić wokół stołu z zachowaniem podanych reguł. Popatrzmy najpierw na przykład. Oto okrągły stół z 12 miejscami (a więc tutaj $n = 6$):




Przede wszystkim widzimy, że panie muszą zająć albo miejca parzyste, albo nieparzyste. Ponumerujmy więc oddzielnie liczbami od 1 do 6 miejsca parzyste i nieparzyste:



Najpierw posadzimy panie. Ich miejsca możemy wybrać na $2 \cdot n!$ sposobów: musimy zdecydować, czy wybieramy miejsca parzyste, czy nieparzyste, a następnie na wybranych miejscach mamy $n!$ możliwości posadzenia $n$ pań. Ponumerujmy panie: $K_1, K_2, \ldots, K_n$, przy czym przyjmujemy, że pani $K_i$ siedzi na miejscu $i$. Dla ustalenia uwagi przypuśćmy, że panie posdziliśmy na miejscach parzystych, czyli białych na rysunku drugim. Ponumerujmy następnie panów: $M_1, M_2, \ldots, M_n$, przy czym zakładamy, że pan $M_i$ jest mężem pani $K_i$. Przykładowy sposób posadzenia $n$ panów widzimy na następnym rysunku:




Widzimy, że usadzenie panów jest zgodne z wymaganiami, jeśli spełnione są następujące warunki:

- pan $M_1$ nie siedzi na żadnym z miejsc 1 i 2,
- pan $M_2$ nie siedzi na żadnym z miejsc 2 i 3,
- pan $M_3$ nie siedzi na żadnym z miejsc 3 i 4,
- pan $M_4$ nie siedzi na żadnym z miejsc 4 i 5,
- pan $M_5$ nie siedzi na żadnym z miejsc 5 i 6,
- pan $M_6$ nie siedzi na żadnym z miejsc 6 i 1.

Ogólnie dla $n$ par warunki te możemy sformułować w trzech punktach:

- żaden z panów $M_i$ (dla $i = 1, \ldots, n$) nie może siedzieć na miejscu $i$,
- żaden z panów $M_i$ (dla $i = 1, \ldots, n-1$) nie może siedzieć na miejscu $i+1$,
- pan $M_n$ nie może siedzieć na miejscu 1,

Niech teraz $\pi(i)$ oznacza numer miejsca, na którym siedzi pan $M_i$. Naszym celem jest znalezienie liczby $\mu(n)$ permutacji $\pi \in S([n])$, spełniających następujące warunki:

1) $\pi(i) \neq i$ dla $i = 1, \ldots, n$,
2) $\pi(i) \neq i + 1$ dla $i = 1, \ldots, n-1$,
3) $\pi(n) \neq 1$.

Liczba $M(n)$ wszystkich możliwych sposobów posadzenia $n$ par małżeńskich będzie równa

$$M(n) = 2 \cdot n! \cdot \mu(n). \tag{2.9}$$

Definiujemy $2n$ zbiorów:

$$\begin{aligned} A_{2i-1} &= \{\pi \in S([n]): \ \pi(i) = i\} \quad \text{dla } i = 1, \ldots, n, \\ A_{2i} &= \{\pi \in S([n]): \ \pi(i) = i+1\} \quad \text{dla } i = 1, \ldots, n-1, \\ A_{2n} &= \{\pi \in S([n]): \ \pi(n) = 1\}. \end{aligned}$$

Wówczas

$$\mu(n) = |S([n]) \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{2n})| = D_0(S([n]), A_1, \ldots, A_{2n}) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \sum_{T \in P_k(2n)} \Big| \bigcap_{j \in T} A_j \Big|$$

Niech $T \in P_k(2n)$. Chcemy obliczyć

$$\Big| \bigcap_{j \in T} A_j \Big|.$$

Zauważmy, że

$$\bigcap_{j \in T} A_j = \varnothing,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest co najmniej jeden z trzech warunków:

1) $2i-1, 2i \in T$ dla pewnego $i = 1, \ldots, n$,
2) $2i, 2i+1 \in T$ dla pewnego $i = 1, \ldots, n-1$,
3) $1, 2n \in T$.

Przypuśćmy bowiem, że

$$\pi \in \bigcap_{j \in T} A_j$$

oraz spełniony jest warunek pierwszy dla pewnego $i$. Wtedy $\pi \in A_{2i-1} \cap A_{2i}$, czyli $\pi(i) = i$ oraz $\pi(i) = i+1$, co jest niemożliwe. Podobnie, jeśli spełniony jest warunek drugi dla pewnego $i$, to $\pi \in A_{2i} \cap A_{2i+1}$, czyli $\pi(i) = i+1$ oraz $\pi(i+1) = i+1$. To także jest niemożliwe. Wreszcie, jeśli $1, 2n \in T$, to $\pi \in A_1 \cap A_{2n}$, czyli $\pi(1) = 1$ oraz $\pi(n) = 1$, co także jest niemożliwe. Na odwrót, jeśli żaden z tych trzech warunków nie jest spełniony, czyli w zbiorze $T$ nie występują dwie kolejne liczby (liczby $2n$ i 1 traktujemy tu jako liczby kolejne), to w permutacji $\pi$ mamy ustalone $k$ wartości. Takie permutacje istnieją i jest ich $(n-k)!$. Zauważmy, że wtedy oczywiście $k \leq n$.

Wprowadźmy na użytek tego dowodu następujące oznaczenia. Oznaczmy przez $g(n, k)$ liczbę takich zbiorów $B \in P_k(n)$, że:

a) jeśli $i \in B$, to $i + 1 \notin B$ dla $i = 1, \ldots, n-1$,
b) jeśli $n \in B$, to $1 \notin B$.

Oznaczmy następnie przez $h(n, k)$ liczbę zbiorów $B \in P_k(n)$ spełniających tylko powyższy warunek a):

a) jeśli $i \in B$, to $i + 1 \notin B$ dla $i = 1, \ldots, n-1$, Wtedy

$$\mu(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot (n-k)! \cdot g(2n,k). \tag{2.10}$$

Naszym celem jest zatem obliczenie $g(2n,k)$.

**Lemat 2.6.** $h(n,k) = \binom{n-k+1}{k}$.

**Dowód. Sposób I.** Mamy policzyć, ile jest $k$-elementowych podzbiorów zbioru $[n]$ nie zawierających dwóch kolejnych liczb. Każdy $k$-elementowy podzbiór zbioru $[n]$ jest zbiorem wartości dokładnie jednej funkcji rosnącej $f : [k] \to [n]$. Warunek, że ten podzbiór nie zawiera dwóch kolejnych liczb jest równoważny następującej własności funkcji $f$:

$$f(i+1) - f(i) \geq 2 \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{$*$}$$

Dla dowolnej funkcji $f : [k] \to [n]$ definiujemy funkcję $g : [k] \to [n-k+1]$ wzorem

$$g(i) = f(i) - i + 1$$

dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Mamy zatem

$$\begin{aligned} g(1) &= f(1), \\ g(2) &= f(2) - 1, \\ g(3) &= f(3) - 2, \\ \ldots & \ \ldots \\ g(k-1) &= f(k-1) - (k-2), \\ g(k) &= f(k) - (k-1). \end{aligned}$$

Nietrudno zauważyć, że funkcja $f$ spełnia warunek $(*)$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $g$ jest rosnąca. Zatem funkcji $f : [k] \to [n]$ spełniających warunek $(*)$ jest tyle, ile funkcji rosnących $g : [k] \to [n-k+1]$, a więc $\binom{n-k+1}{k}$.

**Sposób II.** Rozumowanie będziemy ilustrować przykładem, w którym $n = 13$ i $k = 4$. Narysujmy w jednej linii $n-k$ kółeczek.

$$\circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ$$

Tworzą one $n-k+1$ (w naszym przykładzie $n-k+1 = 10$) wolnych miejsc: jedno przed wszystkimi kółeczkami, $n-k-1$ miejsc między kolejnymi kółeczkami i jedno na końcu, za wszystkimi kółeczkami. Z tych $n-k+1$ miejsc wybierzmy $k$ miejsc (w naszym przykładzie będzie to miejsce pierwsze, miejsce między trzecim i czwartym kółkiem, miejsce między siódmym i ósmym kółkiem oraz miejsce między ósmym i dziewiątym kółkiem) i wstawmy w nie czarne kółka:

$$\bullet \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \bullet \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \bullet \quad \circ \quad \bullet \quad \circ$$

Mamy razem $n$ kółek, w tym $k$ czarnych. Sposób wstawiania gwarantuje, że żadne dwa czarne kółka nie będą stały obok siebie. Taki ciąg kółek koduje podzbiór zbioru $[n]$:

$$\{i \in [n] : \text{ na } i\text{-tym miejscu stoi czarne kółko}\}.$$

W naszym przykładzie jest to zbiór $\{1, 5, 10, 12\}$. Zauważmy wreszcie, że czarne kółka możemy wstawić na $\binom{n-k+1}{k}$ sposobów, co kończy dowód lematu.

**Lemat 2.7.** $g(n, k) = \frac{n}{n-k} \cdot \binom{n-k}{k}$.

**Dowód.** Zliczamy zbiory $B \in P_k(n)$ spełniające warunki a) i b).

Najpierw zajmiemy się takimi zbiorami $B$, że $1 \in B$. Wtedy $2 \notin B$ oraz $n \notin B$. Ponadto zbiór $B \setminus \{1\} \in P_{k-1}(\{3, \ldots, n-1\})$ spełnia warunek a). Stąd wynika, że istnieje $h(n-3, k-1)$ takich zbiorów $B$.

Zajmijmy się następnie takimi zbiorami $B$, że $1 \notin B$. Wtedy zbiór $B \in P_k(\{2, \ldots, n\})$ spełnia warunek a). Istnieje zatem $h(n-1, k)$ takich zbiorów $B$. Zatem

$$\begin{aligned} g(n, k) &= h(n-3, k-1) + h(n-1, k) = \\ &= \binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k}{k} = \\ &= \frac{k}{n-k} \cdot \binom{n-k}{k} + \binom{n-k}{k} = \\ &= \frac{n}{n-k} \cdot \binom{n-k}{k}, \end{aligned}$$

c. b. d. o.

**Twierdzenie 2.8.** Liczba sposobów posadzenia $n$ par małżeńskich przy okrągłym stole jest równa

$$M(n) = 2 \cdot n! \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{2n}{2n-k} \cdot \binom{2n-k}{k} \cdot (n-k)! \tag{2.11}$$

**Dowód.** Z równości (2.9) i (2.10) wynika, że liczba sposobów posadzenia $n$ par małżeńskich przy okrągłym stole jest równa

$$M(n) = 2 \cdot n! \cdot \mu(n) = 2 \cdot n! \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot (n-k)! \cdot g(2n, k).$$

Korzystając z lematu 2.7 otrzymujemy

$$M(n) = 2 \cdot n! \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{2n}{2n-k} \cdot \binom{2n-k}{k} \cdot (n-k)!,$$

c. b. d. o.

## 9. Sumy potęg liczb naturalnych

Przypomnijmy z wykładu 1 oznaczenie

$$S_k(n) = \sum_{j=1}^{n} j^k = 1^k + \ldots + n^k,$$

gdzie $n, k \geq 1$. Z wykładu 1 wiemy, że

$$\begin{aligned}
S_0(n) &= n, \\
S_1(n) &= \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}, \\
S_2(n) &= \frac{1}{4} \cdot \binom{2n+2}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\
S_3(n) &= \binom{n+1}{2}^2 = S_1(n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

Wyprowadzimy teraz pewien wzór ogólny. Będzie to wzór rekurencyjny, pozwalający obliczyć $S_k(n)$, jeśli są znane wszytkie $S_j(n)$ dla $j < k$.

**Twierdzenie 2.9.** Jeśli $n, k \geq 1$, to

$$n^k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} S_{k-j}(n). \tag{2.12}$$

Zanim udowodnimy to twierdzenie, przyjrzymy się jego początkowym przypadkom i pokażemy, jak z niego można otrzymać wzory na $S_k(n)$ dla $k \leq 3$. Oczywiście

$$S_0(n) = 1^0 + \ldots + n^0 = n.$$

Teraz, korzystając z twierdzenia 2.9 dla $k = 2$ mamy

$$n^2 = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{j+1} \binom{2}{j} S_{2-j}(n) = \binom{2}{1} S_1(n) - \binom{2}{2} S_0(n) = 2S_1(n) - n,$$

skąd otrzymujemy

$$2S_1(n) = n^2 + n = n(n+1),$$

czyli

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Następnie, dla $k = 3$ mamy

$$\begin{aligned}
n^3 &= \sum_{j=1}^{3} (-1)^{j+1} \binom{3}{j} S_{3-j}(n) = \binom{3}{1} S_2(n) - \binom{3}{2} S_1(n) + \binom{3}{3} S_0(n) = \\
&= 3S_2(n) - 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n,
\end{aligned}$$

skąd dostajemy

$$\begin{aligned}
3S_2(n) &= n^3 + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{2n^3 + 3n(n+1) - 2n}{2} = \\
&= \frac{2n^3 + 3n^2 + 3n - 2n)}{2} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2} = \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2},
\end{aligned}$$

czyli

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Wreszcie dla $n = 4$ mamy

$$\begin{aligned}
n^4 &= \sum_{j=1}^{4} (-1)^{j+1} \binom{4}{j} S_{4-j}(n) = \\
&= \binom{4}{1} S_3(n) - \binom{4}{2} S_2(n) + \binom{4}{3} S_1(n) - \binom{4}{4} S_0(n) = \\
&= 4S_3(n) - 6 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = \\
&= 4S_3(n) - n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) - n,
\end{aligned}$$

skąd wynika, że

$$\begin{aligned}
4S_3(n) &= n^4 + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n = \\
&= n \cdot \big(n^3 + (n+1)(2n+1) - 2(n+1) + 1\big) = \\
&= n \cdot \big((n^3+1) + (n+1)(2n+1-2)\big) = \\
&= n \cdot \big((n+1)(n^2-n+1) + (n+1)(2n-1)\big) = \\
&= n(n+1)(n^2 - n + 1 + 2n - 1) = n(n+1)(n^2+n) = \\
&= n^2(n+1)^2,
\end{aligned}$$

czyli

$$S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Udowodnimy teraz twierdzenie 2.9.

**Dowód.** Weźmy zbiór

$$X = [n]^k = \{(x_1, \ldots, x_k) : \ x_1, \ldots, x_k \in [n]\}.$$

Wtedy oczywiście $|X| = n^k$. Definiujemy teraz następujące podzbiory zbioru $X$:

$$A_m = \{(x_1, \ldots, x_k) \in X : \ \forall i \ (x_i \leq x_m)\}$$

dla $m = 1, \ldots, k$. Inaczej mówiąc, do zbioru $A_m$ należą te ciągi, w których największy wyraz znajduje się na $m$-tym miejscu. Oczywiście ciągi mające największy wyraz na kilku miejscach, należą do kilku takich zbiorów $A_m$. Na przykład, jeśli $n = 5$ i $k = 7$, to $(1, 3, 4, 2, 5, 4, 2) \in A_5$ oraz $(1, 3, 4, 2, 1, 4, 2) \in A_3 \cap A_6$. Ogólnie, niech $T \in P_j(k)$, gdzie $1 \leq j \leq k$. Wtedy

$$\bigcap_{m \in T} A_m = \bigcup_{l=1}^{n} \{(x_1, \ldots, x_k) \in X : \ \forall m \in T \ (x_m = l) \text{ oraz } \forall m \in [k] \setminus T \ (x_m \leq l)\}.$$

Zauważmy następnie, że

$$|\{(x_1,\ldots,x_k)\in X:\ \forall m\in T\ (x_m=l) \text{ oraz } \forall m\in[k]\setminus T\ (x_m\leq l)\}| = l^{k-j}$$

oraz zbiory

$$\{(x_1,\ldots,x_k)\in X:\ \forall m\in T\ (x_m=l) \text{ oraz } \forall m\in[k]\setminus T\ (x_m\leq l)\}$$

dla różnych $l$ są rozłączne. Zatem

$$\Big|\bigcap_{m\in T} A_j\Big| = \sum_{l=1}^{n} l^{k-j} = S_{k-j}(n).$$

Wreszcie

$$X = A_1\cup\ldots\cup A_k,$$

a więc z zasady włączeń i wyłączeń otrzymujemy

$$\begin{aligned}|X| &= \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}\sum_{T\in P_j(k)}\Big|\bigcap_{m\in T}A_m\Big| = \\ &= \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}\sum_{T\in P_j(k)}S_{k-j}(n) = \\ &= \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}\binom{k}{j}S_{k-j}(n),\end{aligned}$$

czyli

$$n^k = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}\binom{k}{j}S_{k-j}(n),$$

c. b. d. o.

**10. Dwie tożsamości**

Rozważania tego paragrafu będą w zasadzie powtórzeniem rozważań z paragrafu 3. Zajmiemy się funkcjami $f:[n]\to[m]$ i będziemy chcieli policzyć funkcje $f$ spełniające dla pewnego $k$ warunek $[k]\subseteq R_f$. Definiujemy zbiory $A_1,\ldots,A_k$ w następujący sposób:

$$A_j = \{f\in[m]^{[n]}:\ j\notin R_f\}$$

dla $j=1,\ldots,k$. Korzystając ze wzoru włączeń i wyłączeń, podobnie jak w paragrafie 3, otrzymujemy

$$\begin{aligned}|A_1\cup\ldots\cup A_k| &= \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}\sum_{T\in P_j(k)}\Big|\bigcap_{i\in T}A_i\Big| = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}\sum_{T\subseteq P_j(k)}(m-j)^n = \\ &= \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}\binom{k}{j}(m-j)^n.\end{aligned}$$

Funkcje, które nas interesują, tworzą zbiór $[m]^{[n]} \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_k)$. Zatem liczba takich funkcji jest równa

$$m^n - \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} (m-j)^n = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (m-j)^n.$$

W szczególności, jeśli $k = n$ oraz $m \geq n$, to istnieje $n!$ takich funkcji. Zatem

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (m-j)^n = n! \quad \text{dla } m \geq n. \tag{2.13}$$

Zdefiniujmy teraz wielomian $W(x)$ wzorem

$$W(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x-k)^n.$$

Jest to wielomian stopnia co najwyżej $n$. Z tożsamości (2.13) wynika jednak, że tę samą wartość $n!$ przyjmuje on w nieskończenie wielu punktach:

$$W(m) = n! \quad \text{dla } m \geq n.$$

Stąd wynika, że ten wielomian jest wielomianem stałym, czyli

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x-k)^n = n! \tag{2.14}$$

Z rozumowaniem, które przeprowadziliśmy, pozwalającym przejść od tożsamości udowodnionej dla liczb naturalnych do równości wielomianów, spotkamy się jeszcze w następnych wykładach.

### 11. Nierówności Bonferroniego

Udowodnimy teraz dwie nierówności, zwane **nierównościami Bonferroniego**. Oto one:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| \geq \sum_{k=1}^{2r} (-1)^{k+1} \sum_{T \in P_k(n)} \Big| \bigcap_{j \in T} A_j \Big| \tag{2.15}$$

oraz

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| \leq \sum_{k=1}^{2r+1} (-1)^{k+1} \sum_{T \in P_k(n)} \Big| \bigcap_{j \in T} A_j \Big|. \tag{2.16}$$

Powtarzamy drugi dowód zasady włączeń i wyłączeń polegający na przeglądaniu kolejnych składników sumy stojącej po prawej stronie nierówności i rysowaniu przy każdym elemencie iloczynu $\bigcap_{j \in T} A_j$ znaku plus lub minus w zależności od tego, czy liczba $\Big| \bigcap_{j \in T} A_j \Big|$

występuje w sumie ze znakiem plus czy minus. Inaczej mówiąc, jeśli zbiór $T$ ma nieparzystą liczbę elementów, to rysujemy znak plus; jeśli zaś zbiór $T$ ma parzystą liczbę elementów, to rysujemy znak minus.

Tak jak w poprzednim dowodzie zauważamy, że prawa strona równości (2.3) jest różnicą między liczbą plusów i liczbą minusów. Musimy zatem oszacować różnicę między liczbą plusów i minusów narysowanych przy każdym elemencie sumy zbiorów $A_1 \cup \ldots \cup A_n$.

Zajmiemy się najpierw nierównością (2.15). Mamy teraz pokazać, że przy każdym elemencie sumy zbiorów $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ narysowaliśmy co najwyżej o jeden plus więcej. Niech $x \in A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Tak jak poprzednio, niech

$$M = \{j : \ x \in A_j\}.$$

Inaczej mówiąc, $x \in A_j$ wtedy i tylko wtedy, gdy $j \in M$. Oznaczmy $m = |M|$; oczywiście $m > 0$. Niech teraz $T \in P_k(n)$ i popatrzmy na zbiór $\bigcap\limits_{j \in T} A_j$; jest to jeden ze zbiorów występujących po prawej stronie równości (2.3). Jeśli $T \setminus M \neq \emptyset$, to oczywiście mamy $x \notin \bigcap\limits_{j \in T} A_j$. Przypuśćmy zatem, że $T \subseteq M$. Wtedy przy elemencie $x$ rysowaliśmy znak plus lub minus, w zależności od parzystości $k$: plus dla nieparzystych $k$, minus dla parzystych $k$. Dla danego $k$ liczba takich zbiorów $T$ jest równa $\binom{m}{k}$. Liczby plusów i minusów narysowanych przy $x$ są zatem równe

$$\text{liczba plusów} = \sum_{k=1}^{r} \binom{m}{2k}.$$

$$\text{liczba minusów} = \sum_{k=1}^{r} \binom{m}{2k-1},$$

skąd dostajemy

$$\text{liczba plusów} - \text{liczba minusów} = \sum_{k=1}^{2r} (-1)^{k+1} \binom{m}{k}.$$

Tym razem korzystamy z równości (1.27) (przypominamy, że $m > 0$):

$$\sum_{k=0}^{2r} (-1)^k \binom{m}{k} = (-1)^{2r} \binom{m-1}{2r} = \binom{m-1}{2r}.$$

Mamy teraz dwie możliwości. Jeśli $m - 1 < 2r$, czyli $m \leq 2r$ (tzn. element $x$ należy do co najwyżej $2r$ zbiorów $A_j$), to tak jak poprzednio

$$\text{liczba plusów} - \text{liczba minusów} = 0.$$

Jeśli zaś $m > 2r$, to

$$\binom{m-1}{2r} \geq 1$$

skąd wynika, że

$$\binom{m}{0} + \sum_{k=1}^{2r} (-1)^k \binom{m}{k} \geq 1,$$

czyli

$$\sum_{k=1}^{2r} (-1)^k \binom{m}{k} \geq 0.$$

Zatem

$$\sum_{k=1}^{2r} (-1)^{k+1} \binom{m}{k} = -\sum_{k=1}^{2r} (-1)^k \binom{m}{k} \leq 0.$$

Stąd wynika, że przy elemencie $x$ narysowaliśmy co najwyżej tyle plusów, ile minusów. Zatem dla każdego elementu $x$ sumy $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ w obu przypadkach narysowaliśmy co najwyżej o jeden plus więcej, co dowodzi nierówności (2.15). Dowód nierówności (2.16) jest analogiczny i pozostawimy go jako ćwiczenie.

Z powyższego dowodu wynika, że jeśli każdy element sumy $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ należy do co najwyżej $2r$ zbiorów $A_j$, to nierówność (2.15) staje się równością. Jeśli natomiast istnieje co najmniej jeden element należący do więcej niż $2r$ zbiorów $A_j$, to nierówność (2.15) jest ostra. Podobnie jest z nierównością (2.16). Jeśli każdy element sumy $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ należy do co najwyżej $2r + 1$ zbiorów $A_j$, to mamy równość; w przeciwnym przypadku nierówność jest ostra.

**Spis tożsamości kombinatorycznych**

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \tag{2.1}$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \tag{2.2}$$

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{T \in P_k(n)} \Big| \bigcap_{j \in T} A_j \Big|. \tag{2.3}$$

$$|\{f \in A^B : \ f \text{ jest „na”}\}| = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n. \tag{2.4}$$

$$|D(A)| = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}. \tag{2.5}$$

$$|D_0(X, A_1, \ldots, A_n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{T \in P_k(n)} \Big| \bigcap_{j \in T} A_j \Big|. \tag{2.6}$$

$$|D_r(X, A_1, \ldots, A_n)| = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \sum_{T \in P_k(n)} \Big| \bigcap_{j \in T} A_j \Big|. \tag{2.7}$$

$$|D_r(A)| = \frac{n!}{r!} \cdot \sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^k}{k!}. \tag{2.8}$$

$$M(n) = 2 \cdot n! \cdot \mu(n). \tag{2.9}$$

$$\mu(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot (n-k)! \cdot g(2n, k). \tag{2.10}$$

$$M(n) = 2 \cdot n! \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{2n}{2n-k} \cdot \binom{2n-k}{k} \cdot (n-k)! \tag{2.11}$$

$$n^k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} S_{k-j}(n). \tag{2.12}$$

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (m-j)^n = n! \quad \text{dla } m \geq n. \tag{2.13}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x-k)^n = n! \tag{2.14}$$

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| \geq \sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k+1} \sum_{T \in P_k(n)} \Big| \bigcap_{j \in T} A_j \Big|. \tag{2.15}$$

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| \leq \sum_{k=1}^{2m+1} (-1)^{k+1} \sum_{T \in P_k(n)} \Big| \bigcap_{j \in T} A_j \Big|. \tag{2.16}$$