RÓWNANIA REKURENCYJNE

1. Ciągi arytmetyczne i geometryczne

Z najprostszymi równaniami rekurencyjnymi zetknęliśmy się już w szkole. Zacznijmy od przypomnienia definicji ciągu arytmetycznego. Niech będą dane dwie liczby rzeczywiste a i r. **Ciągiem arytmetycznym** nazywamy ciąg (a_n) liczb rzeczywistych określony wzorami

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = a_n + r \quad \text{dla } n \geq 0.$$

Ze szkoły znamy też **wzór ogólny** (lub **wzór jawny**) ciągu arytmetycznego (a_n):

$$a_n = a + nr$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

W podobny sposób definiujemy ciągi geometryczne. Załóżmy, że dane są liczby rzeczywiste a i q. **Ciągiem geometrycznym** nazywamy ciąg (a_n) liczb rzeczywistych zdefiniowany wzorami

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = a_n q \quad \text{dla } n \geq 0.$$

Znów wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) jest znany ze szkoły:

$$a_n = aq^n$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

2. Wieże Hanoi

Znaczenie równań rekurencyjnych w kombinatoryce polega na tym, że wielokrotnie umiemy dość łatwo znaleźć rozwiązanie rekurencyjne zadania kombinatorycznego, podczas gdy znalezienie wzoru ogólnego nie jest oczywiste. Z drugiej strony, znamy wiele metod otrzymywania wzorów ogólnych z równań rekurencyjnych. Kilka takich metod poznamy w tym i następnym wykładzie. Zacznijmy od przykładu: zadania o tzw. wieżach Hanoi.

Łamigłówka o nazwie „Wieże Hanoi” wygląda w następujący sposób. Mamy trzy pałeczki. Na jedną z nich nadziano 64 krążki w kolejności od największego na dole do najmniejszego na górze. Należy przenieść wszystkie krążki z jednej pałeczki na drugą, przy czym wolno za każdym razem przenosić tylko jeden krążek i nie wolno kłaść większego krążka na mniejszy. W czasie przenoszenia wolno kłaść krążki na wszystkich trzech pałeczkach. Ile najmniej ruchów (tzn. pojedynczych przeniesień krążków) potrzeba, by przenieść wszystkie 64 krążki?

Oznaczmy przez H_n najmniejszą liczbę ruchów, które należy wykonać by przenieść n krążków z jednej pałeczki na inną. Jest przy tym obojętne, z której pałeczki na którą przenosimy te krążki. Również jest obojętne, czy na tych pałeczkach już leżą jakieś krążki, byle były one większe od wszystkich krążków, które przenosimy. Oczywiście $H_0 = 0$. Przypuśćmy, że umiemy przenieść n krążków w minimalnej liczbie H_n ruchów. Chcemy teraz przenieść $n+1$ krążków z pierwszej pałeczki na drugą. W którymś momencie będziemy musieli przenieść największy krążek, leżący na samym dole na pierwszej pałeczce. Oczywiście musimy przedtem zdjąć z niego wszystkie mniejsze krążki. Nie mogą one też leżeć na drugiej pałeczce, bo tam mamy położyć największy krążek. Musimy zatem przenieść n krążków z pierwszej pałeczki na trzecią. Wykonamy w tym celu H_n ruchów. Następnie przenosimy największy krążek (to jest jeden ruch) i wreszcie przenosimy n krążków z trzeciej pałeczki na drugą (tu znów mamy H_n ruchów). Razem wykonamy więc $2 \cdot H_n + 1$ ruchów. Widzimy, że z jednej strony jest to minimalna liczba ruchów, które musimy wykonać, a z drugiej, że ta liczba ruchów jest też wystarczająca. Zatem otrzymujemy równanie rekurencyjne:

$$H_0 = 0, \quad H_{n+1} = 2 \cdot H_n + 1 \quad \text{dla } n \geq 0.$$

Obliczmy kilka początkowych wyrazów ciągu (H_n):

$$\begin{aligned}
H_0 &= 0, \\
H_1 &= 2H_0 + 1 = 1, \\
H_2 &= 2H_1 + 1 = 3, \\
H_3 &= 2H_2 + 1 = 7, \\
H_4 &= 2H_3 + 1 = 15
\end{aligned}$$

i tak dalej. Łatwo domyślamy się wzoru ogólnego:

$$H_n = 2^n - 1$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Możemy teraz sprawdzić przez indukcję, że ten odgadnięty wzór ogólny jest poprawny.

3. Równania rekurencyjne liniowe pierwszego rzędu o stałych współczynnikach

Niech będą dane liczby rzeczywiste a, b i c. Przypuśćmy następnie, że ciąg (a_n) został określony za pomocą równania rekurencyjnego

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = b \cdot a_n + c \quad \text{dla } n \geq 0.$$

Ciąg (H_n) określony wyżej otrzymamy przyjmując $a = 0$, $b = 2$ i $c = 1$. Przyjmijmy ponadto, że $b \neq 1$ (w przeciwnym razie mielibyśmy do czynienia z ciągiem arytmetycznym). Obliczmy kilka początkowych wyrazów ciągu (a_n):

$$\begin{aligned}
a_0 &= a, \\
a_1 &= ba_0 + c = ab + c, \\
a_2 &= ba_1 + c = ab^2 + bc + c, \\
a_3 &= ba_2 + c = ab^3 + b^2c + bc + c, \\
a_4 &= ba_3 + c = ab^4 + b^3c + b^2c + bc + c, \\
a_5 &= ba_4 + c = ab^5 + b^4c + b^3c + b^2c + bc + c
\end{aligned}$$

i tak dalej. Znów domyślamy się wzoru ogólnego:

$$a_n = ab^n + c(1 + b + b^2 + \ldots + b^{n-1}) = ab^n + c \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Sprawdzimy przez indukcję, że ten wzór jest poprawny.
Dla $n = 0$ mamy

$$a_0 = ab^0 + c \cdot \frac{b^0 - 1}{b - 1} = a.$$

Przypuśćmy następnie, że nasz wzór jest spełniony dla pewnego n i obliczmy a_{n+1}:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= ba_n + c = b \cdot \left(ab^n + c \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1} \right) + c = ab^{n+1} + c \cdot \frac{b^{n+1} - b}{b - 1} + c = \\ &= ab^{n+1} + c \cdot \frac{b^{n+1} - b + b - 1}{b - 1} = ab^{n+1} + c \cdot \frac{b^{n+1} - 1}{b - 1}, \end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny.
Wzór ogólny tego ciągu można wyznaczyć też w inny sposób, wprowadzając ciąg pomocniczy (b_n) zdefiniowany wzorem

$$b_n = a_{n+1} - a_n$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Wówczas

$$b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1} = (ba_{n+1} + c) - (ba_n + c) = b \cdot (a_{n+1} - a_n) = b \cdot b_n,$$

skąd dostajemy

$$b_n = b_0 \cdot b^n$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Zatem

$$a_{n+1} = a_n + b_0 \cdot b^n$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Wypiszmy n początkowych równości:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + b_0 \cdot b^0, \\ a_2 &= a_1 + b_0 \cdot b^1, \\ a_3 &= a_2 + b_0 \cdot b^2, \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + b_0 \cdot b^{n-2}, \\ a_n &= a_{n-1} + b_0 \cdot b^{n-1}. \end{aligned}$$

Po dodaniu stronami tych nierówności i skróceniu występujących po obu stronach wyrazów $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, otrzymamy

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + b_0 \cdot (b^0 + b^1 + b^2 + \ldots + b^{n-1}) = a_0 + b_0 \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1} = \\ &= a + (ab + c - a) \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1} = a + a(b - 1) \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1} + c \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1} = \\ &= a + a(b^n - 1) + c \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1} = ab^n + c \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1}. \end{aligned}$$

4. Równania rekurencyjne liniowe pierwszego rzędu o zmiennych współczynnikach

Rozwiążemy najpierw zadanie o tzw. sortowaniu przez łączenie. Mamy 2^n monet, każda innej wagi. Dysponujemy wagą szalkową bez odważników. Naszym zadaniem będzie ułożenie wszystkich monet w kolejności od najcięższej do najlżejszej. Będziemy to robili w następujący sposób. Najpierw podzielimy monety na dwie części po 2^{n-1} monet. Następnie każdą z tych części uporządkujemy od najcięższej do najlżejszej. Potem porównamy najcięższe monety z obu części i cięższą z nich odłożymy jako najcięższą ze wszystkich. Potem porównamy najcięższe monety obu części (jedna z tych części jest teraz mniejsza, ubyła z niej jedna moneta). Cięższą monetę odkładamy na bok jako drugą z kolei. I tak dalej. Trzeba jeszcze wyjaśnić, w jaki sposób porządkujemy obie części. Otóż zrobimy to w taki sam sposób. Każdą z tych części podzielimy znów na dwie części, uporządkujemy je i połączymy ze sobą. Każdą z tych mniejszych części znów porządkujemy tak samo: dzielimy na dwie części i potem łączymy ze sobą. I tak dalej. Wreszcie dojdziemy do części liczących tylko dwie monety i wtedy wystarczy jedno ważenie, by taką małą część uporządkować. Ile potrzeba ważeń, by za pomocą tej metody uporządkować wszystkie monety?

Oznaczmy przez P_n maksymalną liczbę ważeń potrzebnych do uporządkowania 2^n monet w sposób opisany w zadaniu. Oczywiście $P_0 = 0$. Jeśli bowiem mamy 2^0, czyli 1 monetę, to nie musimy nic ważyć. Przypuśćmy teraz, że umiemy już uporządkować 2^n monet za pomocą P_n ważeń. Spróbujmy zatem uporządkować 2^{n+1} monet. Najpierw dzielimy je na dwie części, po 2^n monet każda. Następnie porządkujemy każdą z tych części. Do uporządkowania każdej części potrzebujemy P_n ważeń. Wreszcie musimy połączyć obie części. Zauważamy więc, że każde ważenie pozwala nam odłożyć na bok, jako kolejną, tylko jedną monetę. Do uporządkowania wszystkich 2^{n+1} monet będziemy więc potrzebowali co najwyżej $2^{n+1}-1$ ważeń. (Czasami to łączenie może zakończyć się wcześniej, gdy przy odkładaniu monet na bok jedną z części wyczerpiemy dużo wcześniej niż drugą; na pewno jednak nie będziemy potrzebowali większej liczby ważeń.) Łączna maksymalna liczba ważeń potrzebnych do uporządkowania wszystkich 2^{n+1} monet wynosi więc $2 \cdot P_n + 2^{n+1} - 1$.

Ciąg liczb (P_n) jest zatem określony wzorami: rekurencyjnymi

$$P_0 = 0, \quad P_{n+1} = 2 \cdot P_n + 2^{n+1} - 1 \quad \text{dla } n \geq 0.$$

Znów obliczmy kilka początkowych wyrazów ciągu (P_n):

$$\begin{aligned}
&P_0 = 0,\\
&P_1 = 2 \cdot 0 + 2^1 - 1 = 1,\\
&P_2 = 2 \cdot 1 + 2^2 - 1 = 5,\\
&P_3 = 2 \cdot 5 + 2^3 - 1 = 17,\\
&P_4 = 2 \cdot 17 + 2^4 - 1 = 49,\\
&P_5 = 2 \cdot 49 + 2^5 - 1 = 129,\\
&P_6 = 2 \cdot 129 + 2^6 - 1 = 321
\end{aligned}$$

i tak dalej. Tu domyślenie się wzoru ogólnego jest trudniejsze. Można jednak zauważyć, że

$$\begin{aligned}
P_0 - 1 &= -1 = (-1) \cdot 2^0, \\
P_1 - 1 &= 0 = 0 \cdot 2^1, \\
P_2 - 1 &= 4 = 1 \cdot 2^2, \\
P_3 - 1 &= 16 = 2 \cdot 2^3, \\
P_4 - 1 &= 48 = 3 \cdot 2^4, \\
P_5 - 1 &= 128 = 4 \cdot 2^5, \\
P_6 - 1 &= 320 = 5 \cdot 2^6
\end{aligned}$$

i tak dalej. Widzimy już wzór ogólny

$$P_n = (n-1) \cdot 2^n + 1$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Sprawdzenie poprawności tego wzoru przez indukcję jest prostym ćwiczeniem.

5. Metoda czynnika sumacyjnego

Równanie rekurencyjne otrzymane w ostatnim paragrafie można rozwiązać w sposób następujący. Rozważmy ciąg (Q_n) określony wzorem

$$Q_n = \frac{P_n}{2^n} \quad \text{dla } n \geq 0.$$

Wówczas oczywiście $Q_0 = 0$. Podzielmy teraz obie strony równania

$$P_{n+1} = 2 \cdot P_n + 2^{n+1} - 1$$

przez 2^{n+1}. Otrzymamy

$$\frac{P_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{P_n}{2^n} + 1 - \frac{1}{2^{n+1}},$$

czyli

$$Q_{n+1} = Q_n + 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Wypiszmy teraz otrzymane zależności dla początkowych wartości n:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= Q_0 + 1 - \frac{1}{2^1}, \\
Q_2 &= Q_1 + 1 - \frac{1}{2^2}, \\
Q_3 &= Q_2 + 1 - \frac{1}{2^3}, \\
Q_4 &= Q_3 + 1 - \frac{1}{2^4}, \\
\ldots &\quad \ldots \\
Q_{n-1} &= Q_{n-2} + 1 - \frac{1}{2^{n-1}}, \\
Q_n &= Q_{n-1} + 1 - \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Dodajemy teraz te równości stronami i po skróceniu jednakowych składników występujących po obu stronach, otrzymujemy

$$Q_n = Q_0 + n - \frac{1}{2^1} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \ldots - \frac{1}{2^n}.$$

Mnożymy obie strony przez 2^n, otrzymując

$$P_n = n \cdot 2^n - (1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1}) = n \cdot 2^n - (2^n - 1) = (n-1) \cdot 2^n + 1.$$

Powstaje pytanie, w jaki sposób dobieramy na początku ciąg (Q_n) i liczbę, przez którą dzielimy obie strony równania rekurencyjnego. Popatrzmy zatem na ten problem nieco ogólniej. Przypuśćmy, że mamy dane trzy ciągi (a_n), (b_n) i (c_n) oraz, że ciąg (t_n) jest określony wzorami rekurancyjnymi

$$t_0 = t, \quad a_n t_{n+1} = b_n t_n + c_n \quad \text{dla } n \geq 0.$$

Wybieramy następnie ciąg (s_n) (tzw. **czynnik sumacyjny**) o tej własności, że

$$a_n s_n = b_{n+1} s_{n+1}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Następnie mnożymy obie strony równania

$$a_n t_{n+1} = b_n t_n + c_n$$

przez s_n:

$$a_n s_n t_{n+1} = b_n s_n t_n + c_n s_n,$$

czyli

$$b_{n+1} s_{n+1} t_{n+1} = b_n s_n t_n + c_n s_n$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Określamy teraz ciąg (u_n) wzorem

$$u_n = b_n s_n t_n$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ i wypisujemy n początkowych równań:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + c_0 s_0, \\ u_2 &= u_1 + c_1 s_1, \\ u_3 &= u_2 + c_2 s_2, \\ \ldots &\quad \ldots \\ u_n &= u_{n-1} + c_{n-1} s_{n-1}. \end{aligned}$$

Dodajemy stronami otrzymane równości i po skróceniu dostajemy

$$u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} c_k s_k,$$

czyli

$$t_n = \frac{1}{b_n s_n} \cdot \left(b_0 s_0 t + \sum_{k=0}^{n-1} c_k s_k \right)$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

W naszym przykładzie mieliśmy $a_n = 1$, $b_n = 2$ oraz $c_n = 2^{n+1} - 1$. Dobieraliśmy czynnik sumacyjny s_n tak, by $a_n s_n = b_{n+1} s_{n+1}$, czyli $s_n = 2s_{n+1}$. W tym momencie wybór

$$s_n = \frac{1}{2^n}$$

jest już naturalny.

6. Równania rekurencyjne liniowe pierwszego rzędu o zmiennych współczynnikach – c. d.

W ostatnim przykładzie mieliśmy do czynienia z ciągiem zdefiniowanym za pomocą równania rekurencyjnego liniowego postaci

$$t_0 = t, \quad a_n t_{n+1} = b_n t_n + c_n \quad \text{dla } n \geq 0,$$

w którym ciągi (a_n) i (b_n) były stałe i tylko wyrazy ciągu (c_n) zależały od n. Znamy jednak dobrze ciąg zdefiniowany rekurencyjnie, w którym współczynnik b_n zależy od n. Jest to silnia:

$$0! = 1, \quad (n+1)! = (n+1) \cdot n! \quad \text{dla } n \geq 0.$$

W tym paragrafie przyjrzymy się zastosowaniu metody czynnika sumacyjnego do znalezienia wzoru ogólnego dla ciągu zdefiniowanego podobnymi wzorami. Przypuśćmy, że ciąg (a_n) jest zdefiniowany wzorami

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n + 1 \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Definiujemy ciąg (b_n) wzorem

$$b_n = \frac{a_n}{n!}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Następnie dzielimy obie strony równania

$$a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n + 1$$

przez $(n+1)!$. Otrzymujemy

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a_n}{n!} + \frac{1}{n!}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$, czyli

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)!}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Podobnie jak w poprzednich paragrafach otrzymujemy stąd

$$b_n = b_0 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!},$$

czyli

$$a_n = n! \cdot \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Dla dużych n mamy zatem $a_n \approx n! \cdot \mathrm{e}$.

7. Suma odwrotności współczynników dwumianowych

Metodę czynnika sumacyjnego możemy zastosować także do obliczenia następujących dwóch sum. Oznaczmy:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}, \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{\binom{n}{k}}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Wtedy:

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n-k}{\binom{n}{k}} = n \cdot S_n - T_n, \quad \text{czyli} \quad T_n = \frac{n}{2} \cdot S_n.$$

Następnie:

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}} = 1 + \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\binom{n-1}{k-1}} = \\ &= 1 + \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{\binom{n-1}{k}} = 1 + \frac{1}{n} \cdot (S_{n-1} + T_{n-1}) = \\ &= 1 + \frac{1}{n} \cdot S_{n-1} + \frac{1}{n} \cdot T_{n-1} = 1 + \frac{1}{n} \cdot S_{n-1} + \frac{n-1}{2n} \cdot S_{n-1} = \\ &= \frac{n+1}{2n} \cdot S_{n-1} + 1 \end{aligned}$$

dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Mamy zatem równanie rekurencyjne postaci $S_n = a_n S_{n-1} + 1$, gdzie $a_n = \frac{n+1}{2n}$. Takie równania umiemy rozwiązywać za pomocą czynnika sumacyjnego. Dobieramy czynnik s_n tak, by były spełnione równości $s_n a_n = s_{n-1}$ dla wszystkich $n \geq 1$. Przyjmujemy

$$s_0 = 1 \quad \text{oraz} \quad s_n = \frac{s_{n-1}}{a_n} \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Wtedy otrzymujemy:

$$s_n S_n = s_n a_n S_{n-1} + s_n$$

czyli

$$s_n S_n = s_{n-1} S_{n-1} + s_n$$

dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Przyjmując następnie $U_n = s_n S_n$, otrzymujemy równanie rekurencyjne

$$U_0 = 1, \quad U_n = U_{n-1} + s_n \quad \text{dla } n \geq 1.$$

To równanie rekurencyjne oczywiście ma rozwiązanie w postaci sumy:

$$U_n = U_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k$$

dla $n = 0, 1, 2, \dots$ Nietrudno zauważyć, że czynniki sumacyjne s_n są równe

$$s_n = \frac{s_0}{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \frac{1}{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{k+1} = \frac{2^n}{n+1}$$

dla $n = 1, 2, 3, \dots$ Ponadto $s_0 = 1$. Stąd otrzymujemy

$$U_n = 1 + \sum_{k-1}^{n} \frac{2^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k+1}$$

dla $n = 0, 1, 2, \dots$ Ostatecznie:

$$S_n = \frac{1}{s_n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k+1} = \frac{n+1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{k+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k}$$

oraz

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2^{n+2}} \cdot \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k}$$

dla $n = 0, 1, 2, \dots$

8. Co trzeci współczynnik dwumianowy

W tym paragrafie obliczymy sumę

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k} = \sum_{3|k} \binom{3n}{k}$$

dla $n = 0, 1, 2, \dots$ W drugiej sumie wskaźnik k przebiega wszystkie liczby podzielne przez 3, dla których dodawany składnik jest niezerowy. Przypominamy tu, że każdy wiersz trójkąta Pascala traktujemy jako składający się z nieskończenie wielu współczynników dwumianowych, wśród których jest tylko skończenie wiele różnych od zera. Tej umowy będziemy się trzymać we wszystkich rozważanych dalej sumach. Przystąpimy teraz do ułożenia równania rekurencyjnego dla ciągu (S_n).

Przyjrzymy się dokładniej strukturze trójkąta Pascala. Mamy obliczyć sumę co trzeciego wyrazu w co trzecim wierszu tego trójkąta. Pamiętamy, że każdy wyraz trójkąta Pascala jest sumą dwóch wyrazów stojących bezpośrednio nad nim, z jego lewej i prawej strony. Te wyrazy z kolei są sumami wyrazów stojących wyżej itd. Spróbujemy wyrazić sumę co trzeciego wyrazu wiersza o numerze $3n + 3$ za pomocą analogicznej sumy wyrazów wiersza o numerze $3n$. Popatrzmy w tym celu na przykładowy fragment trójkąta Pascala (wiersze od $n = 9$ do $n = 12$):

$$\begin{array}{c}
\spadesuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \spadesuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \spadesuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \spadesuit \\
\heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \\
\heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \\
\spadesuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \spadesuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \spadesuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \spadesuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \spadesuit
\end{array}$$

Na powyższym rysunku nie wpisaliśmy liczb. Zaznaczyliśmy tylko miejsca, na których się znajdują dwoma znakami: $\spadesuit$ i $\heartsuit$. Okazuje się bowiem, że dla uzyskania równania rekurencyjnego zupełnie nie jest istotne, jakie liczby dodajemy, ale ważne jest to, na jakich miejscach się one znajdują. I tak symbolem $\spadesuit$ są oznaczone te miejsca w trójkącie Pascala, gdzie znajdują się liczby, które będziemy sumować. Symbolem $\heartsuit$ oznaczone są wszystkie pozostałe miejsca w tym trójkącie. Teraz popatrzmy, jak liczby stojące na miejscach $\spadesuit$ najniższego wiersza powstają z liczb stojących w wierszu położonym najwyżej na naszym rysunku:

$$\begin{array}{c}
\boxed{\spadesuit} \quad \boxed{\boxed{\boxed{\heartsuit}}} \quad \boxed{\boxed{\boxed{\heartsuit}}} \quad \boxed{\spadesuit} \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \spadesuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \spadesuit \\
\heartsuit \quad \boxed{\heartsuit} \quad \boxed{\boxed{\heartsuit}} \quad \boxed{\heartsuit} \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \\
\heartsuit \quad \heartsuit \quad \boxed{\heartsuit} \quad \boxed{\heartsuit} \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \\
\spadesuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \boxed{\spadesuit} \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \spadesuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \spadesuit \quad \heartsuit \quad \heartsuit \quad \spadesuit
\end{array}$$

Symbole $\spadesuit$ i $\heartsuit$ są teraz w ramkach. Pojedyncza ramka oznacza, że dana liczba była użyta jeden raz do obliczenia odpowiedniej liczby dolnego wiersza. Takimi są na przykład liczby drugiego wiersza od dołu. Jednak w trzecim wierszu od dołu pojawia się już liczba, która została użyta dwa razy: po jednym razie do obliczenia każdej z obramowanych liczb drugiego wiersza od dołu. W najwyższym wierszu naszego rysunku niektóre liczby mają nawet trzy ramki: te, które były potrzebne do obliczenia liczby w podwójnej ramce niższego rzędu. Tak samo będzie dla każdej interesującej nas liczby najniższego rzędu. Możemy to zapisać w postaci wzoru:

$$\binom{3n+3}{3k} = \binom{3n}{3k-3} + 3 \cdot \binom{3n}{3k-2} + 3 \cdot \binom{3n}{3k-1} + \binom{3n}{3k}$$

Nietrudno teraz dostrzec zależność rekurencyjną (przyjmujemy, że sumowanie rozciąga się na wszystkie niezerowe wyrazy danej sumy):

$$S_{n+1} = 2 \cdot \sum_{3|k} \binom{3n}{k} + 3 \cdot \sum_{3\nmid k} \binom{3n}{k} = 3 \cdot \sum_{k} \binom{3n}{k} - \sum_{3|k} \binom{3n}{k} = 3 \cdot 2^{3n} - S_n$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

Wzór ten możemy otrzymać też za pomocą bezpośrednich obliczeń:

$$\begin{aligned}\binom{3n+3}{3k} = \binom{3n+2}{3k-1} + \binom{3n+2}{3k} = \\ = \binom{3n+1}{3k-2} + \binom{3n+1}{3k-1} + \binom{3n+1}{3k-1} + \binom{3n+1}{3k} = \\ = \binom{3n+1}{3k-2} + 2\cdot\binom{3n+1}{3k-1} + \binom{3n+1}{3k} = \\ = \binom{3n}{3k-3} + \binom{3n+1}{3k-2} + 2\cdot\binom{3n}{3k-2} + 2\cdot\binom{3n}{3k-1} + \binom{3n}{3k-1} + \binom{3n}{3k} = \\ = \binom{3n}{3k-3} + 3\cdot\binom{3n}{3k-2} + 3\cdot\binom{3n}{3k-1} + \binom{3n}{3k}\end{aligned}$$

Stąd wynika, że (pamiętamy, że sumowanie rozciąga się na wszystkie niezerowe wyrazy danej sumy):

$$S_{n+1} = \sum_k \binom{3n+3}{3k} = \sum_k \binom{3n}{3k-3} + 3\cdot\sum_k \binom{3n}{3k-2} + 3\cdot\sum_k \binom{3n}{3k-1} + \sum_k \binom{3n}{3k}.$$

Teraz należy zauważyć, że

$$\sum_k \binom{3n}{3k-3} = \sum_k \binom{3n}{3k}.$$

W obu sumach występują bowiem te same składniki niezerowe $\binom{3n}{k}$ wiersza o numerze $3n$: te mianowicie, dla których liczba k jest podzielna przez 3. Mamy zatem

$$\begin{aligned}S_{n+1} &= \sum_k \binom{3n+3}{3k} = \\ &= 2\cdot\sum_k \binom{3n}{3k-3} + 3\cdot\sum_k \binom{3n}{3k-2} + 3\cdot\sum_k \binom{3n}{3k-1} = \\ &= 3\cdot\sum_k \binom{3n}{k} - \sum_{3|k} \binom{3n}{k} = \\ &= 3\cdot 2^{3n} - S_n\end{aligned}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

Nietrudno zauważyć, że $S_0 = 1$. Pozostaje nam wyprowadzenie wzoru ogólnego na S_n ze wzorów rekurencyjnych

$$S_0 = 1, \quad S_{n+1} = 3\cdot 2^{3n} - S_n = 3\cdot 8^n - S_n \quad \text{dla } n \geq 0.$$

Możemy to osiągnąć bardzo prosto wyrażając S_{n+2} za pomocą S_n:

$$S_{n+2} = 3 \cdot 8^{n+1} - S_{n+1} = 3 \cdot 8^{n+1} - 3 \cdot 8^n + S_n,$$

czyli

$$S_{n+2} = S_n + 21 \cdot 8^n.$$

Teraz już łatwo zauważyć, że dla liczby nieparzystej n mamy

$$S_n = S_1 + 21 \cdot (8^1 + 8^3 + \ldots + 8^{n-2})$$

i ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego otrzymujemy

$$S_n = 2 + 21 \cdot \frac{8^n - 8}{8^2 - 1} = 2 + \frac{8^n - 8}{3} = \frac{8^n - 2}{3}.$$

Dla n parzystych skorzystamy ze wzoru rekurencyjnego:

$$S_n = 3 \cdot 8^{n-1} - S_{n-1} = 3 \cdot 8^{n-1} - \frac{8^{n-1} - 2}{3} = \frac{9 \cdot 8^{n-1} - 8^{n-1} + 2}{3} = \frac{8^n + 2}{3}.$$

Łącząc razem otrzymane wzory dla n parzystych i n nieparzystych dostajemy wzór

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k} = \frac{8^n + 2 \cdot (-1)^n}{3}.$$

Równanie rekurencyjne

$$S_0 = 1, \quad S_{n+1} = 3 \cdot 8^n - S_n \quad \text{dla } n \geq 0$$

można rozwiązać też za pomocą czynnika sumacyjnego. Zdefiniujmy ciąg (T_n) wzorem:

$$T_n = (-1)^n \cdot S_n$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ i pomnóżmy obie strony równania

$$S_{n+1} = 3 \cdot 8^n - S_n$$

przez $(-1)^{n+1}$. Otrzymamy

$$(-1)^{n+1} \cdot S_{n+1} = 3 \cdot (-1)^{n+1} \cdot 8^n + (-1)^n \cdot S_n,$$

czyli

$$T_{n+1} = T_n - 3 \cdot (-1)^n \cdot 8^n = T_n - 3 \cdot (-8)^n.$$

Stąd już łatwo stwierdzimy, że (pamiętając, że $T_0 = 1$):

$$\begin{aligned} T_n &= T_0 - 3 \cdot (-8)^0 - 3 \cdot (-8)^1 - \ldots - 3 \cdot (-8)^{n-1} = \\ &= T_0 - 3 \cdot \left(1 + (-8)^2 + (-8)^2 + \ldots + (-8)^{n-1}\right) = \\ &= T_0 - 3 \cdot \frac{(-8)^n - 1}{-8 - 1} = 1 + \frac{(-8)^n - 1}{3} = \frac{(-8)^n + 2}{3}. \end{aligned}$$

Ponieważ $T_n = (-1)^n \cdot S_n$, więc

$$S_n = (-1)^n \cdot \frac{(-8)^n + 2}{3} = \frac{8^n + 2 \cdot (-1)^n}{3}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

Dowód kombinatoryczny. Równanie rekurencyjne

$$S_0 = 1, \quad S_{n+1} = 3 \cdot 8^n - S_n \quad \text{dla } n \geq 0$$

można też otrzymać za pomocą rozumowania kombinatorycznego. Mamy bowiem

$$S_n = \big|\{A \subseteq [3n] : \ 3 \mid |A|\}\big|$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Możemy teraz zastanowić się, jak wyglądają podzbiory zbioru $[3n+3]$ o liczbie elementów podzielnej przez 3. Te podzbiory możemy pogrupować w cztery zbiory:

1) $A \subseteq [3n]$, gdzie $3 \mid |A|$,
2) $A = B \cup \{3n+1, 3n+2, 3n+3\}$, gdzie $B \subseteq [3n]$ i $3 \mid |B|$,
3) $A = B \cup \{3n+1\}$ lub $A = B \cup \{3n+2\}$ lub $A = B \cup \{3n+3\}$, gdzie $B \subseteq [3n]$ i $|B| \equiv 2 \pmod 3$,
4) $A = B \cup \{3n+1, 3n+2\}$ lub $A = B \cup \{3n+1, 3n+3\}$ lub $A = B \cup \{3n+2, 3n+3\}$, gdzie $B \subseteq [3n]$ i $|B| \equiv 1 \pmod 3$.

W pierwszej i drugiej grupie mamy po S_n zbiorów, w trzeciej i czwartej mamy łącznie $3 \cdot (2^{3n} - S_n)$ zbiorów. Stąd otrzymujemy równanie

$$S_{n+1} = 2S_n + 3 \cdot 2^{3n} - 3S_n = 3 \cdot 8^n - S_n.$$

Rozwiązanie algebraiczne. Zadanie obliczenia sumy S_n można rozwiązać metodami algebry. W tym celu weźmy zespolony pierwiastek trzeciego stopnia z jedności:

$$\varepsilon^3 = 1.$$

Wtedy ε jest pierwiastkiem równania $x^3 - 1 = 0$, czyli $(x-1)(x^2+x+1) = 0$. Stąd wynika, że nierzeczywisty pierwiastek tego równania spełnia równanie

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0.$$

Obliczymy teraz dwoma sposobami sumę

$$(1+\varepsilon^0)^{3n} + (1+\varepsilon^1)^{3n} + (1+\varepsilon^2)^{3n}.$$

Najpierw skorzystamy ze wzoru dwumianowego Newtona:

$$\begin{aligned}
&(1+\varepsilon^0)^{3n} + (1+\varepsilon^1)^{3n} + (1+\varepsilon^2)^{3n} = \\
&= \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} \varepsilon^{0 \cdot k} + \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} \varepsilon^{1 \cdot k} + \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} \varepsilon^{2 \cdot k} = \\
&= \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} (\varepsilon^0 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k}).
\end{aligned}$$

Popatrzmy teraz, jak wyglądają sumy

$$1+\varepsilon^k+\varepsilon^{2k}$$

dla różnych k. Oczywiście dla liczb k podzielnych przez 3 dodajemy do siebie trzy jedynki. Zatem suma jest równa 3. Niech teraz $k=3l+1$. Wtedy

$$1+\varepsilon^k+\varepsilon^{2k}=1+\varepsilon^{3l}\cdot\varepsilon+\varepsilon^{6l}\cdot\varepsilon^2=1+\varepsilon+\varepsilon^2=0.$$

Podobnie dla $k=3l+2$ stwierdzimy, że ta suma równa jest 0. Zatem, kontynuując przerwane obliczenia, dostajemy

$$\sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k}(\varepsilon^0+\varepsilon^k+\varepsilon^{2k})=\sum_{k=0}^{n}3\binom{3n}{3k}=3\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{3n}{3k}.$$

Następnie obliczymy tę samą sumę bez odwoływania się do wzoru Newtona. Mamy wtedy:

$$\begin{aligned}
&(1+\varepsilon^0)^{3n}+(1+\varepsilon^1)^{3n}+(1+\varepsilon^2)^{3n}=\\
&=(1+1)^{3n}+(1+\varepsilon)^{3n}+(1+\varepsilon^2)^{3n}=\\
&=2^{3n}+(-\varepsilon^2)^{3n}+(-\varepsilon)^{3n}=\\
&=2^{3n}+(-1)^{3n}\varepsilon^{6n}+(-1)^{3n}\varepsilon^{3n}=\\
&=2^{3n}+(-1)^n(\varepsilon^3)^n+(-1)^n(\varepsilon^3)^n=\\
&=2^{3n}+(-1)^n+(-1)^n=\\
&=2^{3n}+2\cdot(-1)^n.
\end{aligned}$$

W tym dowodzie korzystaliśmy z oczywistych równości:

$$(-1)^{3n}=(-1)^n,\quad 1+\varepsilon=-\varepsilon^2,\quad 1+\varepsilon^2=-\varepsilon.$$

Porównując wyniki obu obliczeń, otrzymamy:

$$3\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{3n}{3k}=8^n+2\cdot(-1)^n,$$

czyli ostatecznie

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{3n}{3k}=\frac{8^n+2\cdot(-1)^n}{3}.$$

9. Nieporządki

W tym paragrafie rozwiążemy znane nam już zadanie o liczbie nieporządków. Mamy zadanie:

- Piszemy n listów i adresujemy n kopert. Na ile sposobów możemy włożyć te listy do kopert tak, by żaden list nie trafił do właściwej koperty?

Ponumerujmy listy i koperty liczbami od 1 do n; zakładamy przy tym, że list o numerze k powinien trafić do koperty o numerze k. Popatrzmy teraz na ciąg numerów listów włożonych do kopert: a_1 jest numerem listu włożonego do koperty z numerem 1, a_2 jest numerem listu w kopercie z numerem 2 i tak dalej. Ogólnie a_k jest numerem listu włożonego do koperty o numerze k. Oczywiście ciąg liczb $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jest permutacją zbioru liczb od 1 do n. Będziemy używać znanego oznaczenia permutacji: permutację $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ oznaczamy symbolem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

wskazując w ten sposób w górnym wierszu numery kopert i pod nimi w dolnym wierszu numery listów, które trafiły do kolejnych kopert.

Przypomnijmy, że liczba k jest **punktem stałym** permutacji $(a_1, \ldots, a_n)$, jeśli $a_k = k$, tzn. jeśli liczba a_k stoi na swoim, tzn. k-tym miejscu. Interesuje nas liczba **nieporządków**, czyli tych permutacji, które nie mają punktów stałych, tzn. permutacji $(a_1, \ldots, a_k)$ takich, że żadna liczba a_k nie stoi na swoim miejscu:

$$D_n = \left|\left\{(a_1, \ldots, a_n) : \ \forall k \ \left(a_k \neq k\right)\right\}\right|.$$

Przyjrzyjmy się, w jaki sposób możemy pogrupować nieporządki. Popatrzmy na n-tą kopertę. Mógł do niej trafić jeden z $n-1$ listów: każdy z wyjątkiem n-tego. Niech zatem będzie to list o numerze k. Mamy teraz dwa przypadki.

Przypadek 1. List o numerze n trafił do koperty z numerem k. Inaczej mówiąc, listy z numerami n i k „zamieniły się” kopertami. Mamy więc sytuację:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k & \ldots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & n & \ldots & a_{n-1} & k \end{pmatrix}$$

Oczywiście wtedy pozostałe listy (a jest ich $n-2$) muszą też być „wymieszane”, czyli ich numery muszą tworzyć nieporządek zbioru pozostałych liczb:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k-1 & k+1 & \ldots & n-1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{k-1} & a_{k+1} & \ldots & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Tak włożyć te $n-2$ listy do kopert można na D_{n-2} sposobów. Inaczej mówiąc, istnieją D_{n-2} nieporządki n liczb, w których na n tym miejscu stoi dana liczba k i na k-tym miejscu stoi liczba n. Uwzględniając liczbę możliwych k (jest ich $n-1$) widzimy, że w tym przypadku mamy łącznie $(n-1)D_{n-2}$ sposobów włożenia listów do kopert.

Popatrzmy na przykład. Przypuśćmy, że listy o numerach 5 i 2 zamieniły się miejscami. Istnieją 2 nieporządki zbioru liczb $\{1, 3, 4\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z nich powstają 2 nieporządki liczb od 1 do 5, w których 2 i 5 zamieniły się miejscami:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Przypadek 2. List o numerze n trafił do koperty z numerem l, przy czym $k \neq l$. Mamy więc sytuację:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & l & \dots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & n & \dots & a_{n-1} & k \end{pmatrix}.$$

Wtedy na chwilę przekładamy listy: list o numerze n wkładamy do właściwej (tzn. n-tej) koperty, a list o numerze k wkładamy do koperty z numerem l (czyli zamieniamy miejscami k-ty i n-ty list):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & l & \dots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & k & \dots & a_{n-1} & n \end{pmatrix}.$$

Po tej zamianie mamy jeden list (o numerze n) we właściwej kopercie i pozostałe $n-1$ listów dokładnie wymieszanych, tzn. ich numery tworzą nieporządek $n-1$ liczb od 1 do $n-1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & l & \dots & n-1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & k & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Odwrotnie, jeśli mamy nieporządek liczb od 1 do $n-1$, to wkładamy list z numerem n do n-tej koperty, a następnie zamieniamy listy z numerami k i n, otrzymując nieporządek n numerów listów. Mamy D_{n-1} nieporządków liczb od 1 do $n-1$ i z każdego takiego nieporządku dostajemy jeden nieporządek n liczb, w którym na miejscu n-tym stoi liczba k. Uwzględniając liczbę możliwych k, dostajemy w tym przypadku $(n-1)D_{n-1}$ sposobów włożenia listów.

Popatrzmy na przykład. Istnieje 9 nieporządków liczb od 1 do 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Z każdego z tych dziewięciu nieporządków otrzymamy jeden nieporządek liczb od 1 do

5, w którym na miejscu piątym stoi liczba 2:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&3&5\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&4&3&2\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&1&5\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&4&1&2\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&1&3&5\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&1&3&2\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&4&2&5\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&4&5&2\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&1&2&5\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&1&5&2\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&2&1&5\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&1&2\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&2&3&5\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&5&3&2\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&1&2&5\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&1&5&2\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&2&1&5\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&5&1&2\end{pmatrix},$$

Łącznie mamy w obu przypadkach $(n-1)\cdot(D_{n-2}+D_{n-1})$ sposobów włożenia listów. Ponieważ $D_1 = 0$ oraz $D_2 = 1$, więc otrzymujemy równanie rekurencyjne:

$$D_1 = 0, \quad D_2 = 1, \quad D_n = (n-1)\cdot\big(D_{n-2}+D_{n-1}\big) \quad \text{dla } n > 2.$$

Zwróćmy uwagę na to, że otrzymaliśmy równanie rekurencyjne **drugiego rzędu**: do obliczenia kolejnego wyrazu ciągu musimy znać dwa poprzednie wyrazy. Zajmiemy się teraz poszukiwaniem wzoru ogólnego na liczbę nieporządków.

Definiujemy nowy ciąg:
$$E_n = D_n - nD_{n-1}$$

dla $n \geq 2$. Wtedy mamy:

$$E_n = D_n - nD_{n-1} = -(D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}) = -E_{n-1}.$$

Ciąg (E_n) jest więc ciągiem geometrycznym o ilorazie -1, którego początkowym wyrazem jest E_2. Mamy zatem
$$E_n = E_2 \cdot (-1)^{n-2}.$$

Ponieważ $E_2 = D_2 - 2D_1 = 1$, więc ostatecznie otrzymujemy

$$E_n = (-1)^n,$$

czyli
$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n.$$
Otrzymane nowe równanie rekurencyjne ciągu (D_n) umiemy już rozwiązać metodą czynnika sumacyjnego. Podzielmy obie strony ostatniego równania przez $n!$:
$$\frac{D_n}{n!} = \frac{nD_{n-1}}{n!} + \frac{(-1)^n}{n!},$$
czyli
$$\frac{D_n}{n!} = \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!}.$$
Definiujemy ciąg (G_n) wzorem
$$G_n = \frac{D_n}{n!}$$
dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Wtedy
$$G_n = G_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n!},$$
skąd łatwo wynika, że
$$G_n = G_1 + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$
Ponieważ $G_1 = 0$, więc ostatni wzór możemy zapisać w postaci
$$G_n = 1 + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$
Stąd otrzymujemy ostatecznie
$$D_n = n! \left(1 + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$
dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Dla dużych n mamy znane już przybliżenie $D_n \approx n! \cdot \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}367879n$.

10. Sortowanie szybkie

Analizując średni czas działania algorytmu tzw. sortowania szybkiego (ang. quicksort) dochodzimy do następującego równania rekurencyjnego:
$$C_0 = 0, \quad C_n = n - 1 + \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} C_k \quad \text{dla } n \geq 1.$$
Zauważmy, że każdy wyraz C_n (dla $n \geq 1$) ciągu określonego tym równaniem zależy od wszystkich wyrazów poprzednich. Pierwszym krokiem na drodze do znalezienia wzoru ogólnego będzie zmniejszenie rzędu rekurencji. Pomnóżmy obie strony równania
$$C_n = n - 1 + \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} C_k$$

przez n. Otrzymamy równanie

$$nC_n = n(n-1) + 2\sum_{k=0}^{n-1} C_k.$$

Podstawmy w tym równaniu $n+1$ w miejsce n:

$$(n+1)C_{n+1} = n(n+1) + 2\sum_{k=0}^{n} C_k.$$

Następnie odejmijmy stronami otrzymane równania:

$$(n+1)C_{n+1} - nC_n = n(n+1) - n(n-1) + 2C_n,$$

czyli

$$(n+1)C_{n+1} = (n+2)C_n + 2n.$$

Otrzymaliśmy równanie rekurencyjne liniowe pierwszego rzędu, które możemy rozwiązać metodą czynnika sumacyjnego. Podzielmy teraz obie strony otrzymanego równania przez $(n+1)(n+2)$

$$\frac{C_{n+1}}{n+2} = \frac{C_n}{n+1} + \frac{2n}{(n+1)(n+2)}$$

i wprowadźmy ciąg pomocniczy (D_n) określony wzorem

$$D_n = \frac{C_n}{n+1}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Mamy wówczas

$$D_{n+1} = D_n + \frac{2n}{(n+1)(n+2)} = D_n + \frac{4}{n+2} - \frac{2}{n+1}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Stąd dostajemy

$$D_n = D_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{4}{k+2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{k+1}.$$

Ponieważ $C_0 = 0$, więc $D_0 = 0$. Przyjmijmy następnie oznaczenie

$$H_0 = 0, \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{dla } n \geq 0.$$

Liczby H_n nazywamy **liczbami harmonicznymi**. Wówczas

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{4}{k+2} = 4 \cdot \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 4 \cdot (H_{n+1} - 1)$$

oraz

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{k+1} = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 2H_n.$$

Stąd wynika, że

$$D_n = 4(H_{n+1} - 1) - 2H_n = 2H_{n+1} + 2(H_{n+1} - H_n) - 4 = 2H_{n+1} + \frac{2}{n+1} - 4.$$

Ponieważ $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}$, więc

$$D_n = 2H_n + \frac{4}{n+1} - 4 = 2H_n - \frac{4n}{n+1}.$$

Stąd ostatecznie otrzymujemy

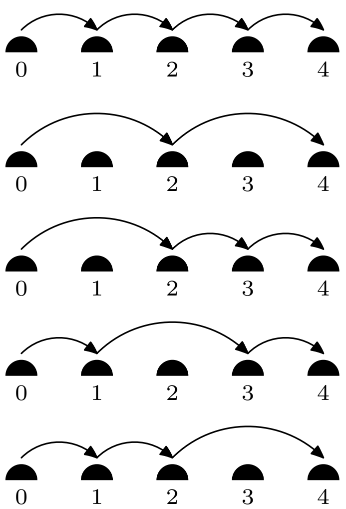
$$C_n = (n+1)D_n = 2(n+1)H_n - 4n$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

11. Ciąg Fibonacciego

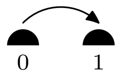
Ciąg liczb Fibonacciego pojawił się po raz pierwszy w książce Leonarda z Pizy (zwanego Fibonaccim) *Liber abaci* przy okazji zadania o rozmnażaniu królików. Zobaczymy teraz inne zadanie kombinatoryczne prowadzące do tego samego ciągu.

Zadanie. Żaba skacze z kamienia na kamień. Kamienie leżą jeden za drugim i są ponumerowane liczbami naturalnymi od zera; żaba startuje z kamienia zerowego. W jednym skoku potrafi ona przeskoczyć z jednego kamienia na następny lub o dwa kamienie dalej. Żaba może wykonywać po sobie skoki różnych długości. Na przykład, na czwarty kamień może dostać się skacząc cztery razy na odległość jednego kamienia lub skacząc dwa razy, za każdym razem na odległość dwóch kamieni, lub też skacząc raz na odległość dwóch kamieni i dwa razy na odległość jednego kamienia. Tę ostatnią możliwość może zrealizować na trzy sposoby, skok podwójny może być pierwszym, drugim lub trzecim skokiem. Oto możliwe drogi żaby na czwarty kamień:

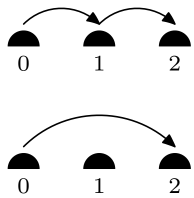


Łącznie ma więc pięć różnych sposobów dostania się na czwarty kamień. A ile istnieje sposobów dostania się na n-ty kamień?

Oznaczmy przez F_n liczbę dróg żaby na n-ty kamień. Oczywiście $F_1 = 1$. Na kamień z numerem 1 żaba może dostać się tylko w jeden sposób – ma wykonać jeden pojedynczy skok:



Następnie $F_2 = 2$. Na kamień z numerem 2 żaba może dostać się dwoma sposobami – wykonać dwa skoki pojedyncze lub jeden podwójny:



Zobaczmy teraz, na ile sposobów żaba może się dostać na kamień o numerze $n + 2$. Ma ona F_n różnych dróg na kamień o numerze n i F_{n+1} dróg na kamień o numerze $n+1$. Ponieważ ostatni skok żaby jest skokiem podwójnym z kamienia o numerze n lub pojedynczym z kamienia o numerze $n + 1$, więc łącznie istnieje $F_n + F_{n+1}$ dróg żaby na kamień $n + 2$. A więc $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Zatem na trzeci kamień żaba może dostać się na $1 + 2 = 3$ sposoby, na czwarty na $2 + 3 = 5$ sposobów i tak dalej. Zauważmy, że jeśli przyjmiemy $F_0 = 1$ (co jest całkiem naturalne: istnieje jeden sposób dostania się na kamień o numerze 0, mianowicie nie robić nic), to okaże się, że $F_2 = F_0 + F_1$. Zatem ciąg (F_n) jest określony wzorami

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{dla } n \geq 0.$$

Otrzymane równanie rekurencyjne jest równaniem drugiego rzędu; widzieliśmy już takie równania przy okazji nieporządków. Jest to tzw. równanie liniowe (kolejny wyraz jest kombinacją liniową poprzednich) jednorodne (nie ma „wyrazu wolnego”) o stałych współczynnikach (w powyższym wzorze są one równe 1). Istnieje dość prosta metoda znajdowania wzoru ogólnego dla ciągów określonych równaniami liniowymi jednorodnymi o stałych współczynnikach. W następnym paragrafie pokażemy tę metodę dla ciągów określonych takimi równaniami drugiego rzędu.

12. Równania rekurencyjne liniowe jednorodne drugiego rzędu o stałych współczynnikach

Mówimy, że ciąg (t_n) liczb zespolonych spełnia równanie rekurencyjne liniowe, jednorodne o stałych współczynnikach, jeśli istnieją liczby $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0$ takie, że $a_k \neq 0$, $a_0 \neq 0$ oraz dla wszystkich liczb naturalnych n zachodzi równość

$$a_k \cdot t_{n+k} + a_{k-1} \cdot t_{n+k-1} + \ldots + a_1 \cdot t_{n+1} + a_0 \cdot t_n = 0. \tag{4.1}$$

Mówimy też, że to równanie rekurencyjne jest równaniem rzędu k.

Jeśli ciąg liczb zespolonych (t_n) spełnia równanie rekurencyjne rzędu k, to każdy wyraz tego ciągu, począwszy od a_k, jest jednoznacznie określony za pomocą k poprzednich wyrazów. Na przykład, dla ciągu określonego równaniem (4.1) mamy

$$t_{n+k} = -\frac{a_{k-1}}{a_k} \cdot t_{n+k-1} - \ldots - \frac{a_1}{a_k} \cdot t_{n+1} - \frac{a_0}{a_k} \cdot t_n. \tag{4.2}$$

Jeśli będziemy znali pierwsze k wyrazów tego ciągu, to za pomocą równości (4.2) będziemy mogli wyznaczyć wszystkie następne wyrazy tego ciągu. Zauważmy również, że z warunku $a_k \neq 0$ wynika, iż możemy ograniczyć się do rozpatrywania równań rekurencyjnych postaci (4.1), w których $a_k = 1$. Wystarczy bowiem obie strony naszego równania rekurencyjnego podzielić przez a_k, by otrzymać równanie równoważne.

Zauważamy następnie, że jeśli dwa ciągi liczb zespolonych (t_n) i (u_n) spełniają równanie rekurencyjne (4.1), to ciąg (v_n) określony wzorem

$$v_n = c \cdot t_n + d \cdot u_n$$

(dla $n = 0, 1, 2, \ldots$) też spełnia to równanie. Mianowicie

$$\begin{aligned} a_k v_{n+k} + a_{k-1} \cdot v_{n+k-1} + \ldots + a_1 \cdot v_{n+1} + a_0 \cdot v_n = \\ &= c \cdot (a_k t_{n+k} + a_{k-1} \cdot t_{n+k-1} + \ldots + a_1 \cdot t_{n+1} + a_0 \cdot t_n) + \\ &+ d \cdot (a_k u_{n+k} + a_{k-1} \cdot u_{n+k-1} + \ldots + a_1 \cdot u_{n+1} + a_0 \cdot u_n) = \\ &= c \cdot 0 + d \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że ciągi liczb zespolonych spełniające równanie rekurencyjne (4.1) tworzą podprzestrzeń liniową przestrzeni wszystkich ciągów o wyrazach zespolonych. Ponieważ wyrazy $t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}$ wyznaczają jednoznacznie cały ciąg, więc ta podprzestrzeń ma wymiar k. Stąd wynika, że jeśli znajdziemy k liniowo niezależnych rozwiązań równania (4.1), to każde rozwiązanie równania będzie pewną kombinacją liniową tych k rozwiązań. W przypadku $k = 2$ chcemy zatem znaleźć dwa liniowo niezależne rozwiązania.

Nietrudno zauważyć, że równania rekurencyjne jednorodne rzędu 1 definiują ciągi geometryczne:

$$t_{n+1} = q \cdot t_n.$$

Próbujemy znaleźć ciągi geometryczne spełniające równanie rzędu 2. Przypuśćmy więc, że mamy dany ciąg liczb zespolonych (t_n) spełniający równanie

$$t_{n+2} + a \cdot t_{n+1} + b \cdot t_n = 0. \tag{4.3}$$

Szukamy takiego ilorazu q, różnego od zera, by ciąg określony wzorem $t_n = q^n$ spełniał równanie (4.3). Ten iloraz q musiałby zatem spełniać równanie:

$$q^{n+2} + aq^{n+1} + bq^n = 0,$$

czyli

$$q^2 + aq + b = 0. \tag{4.4}$$

A zatem, jeśli liczba q jest ilorazem ciągu geometrycznego spełniającego równanie rekurencyjne (4.3), to jest ona pierwiastkiem równania kwadratowego (4.4). Nietrudno zauważyć, że i na odwrót, jeśli liczba q jest pierwiastkiem równania kwadratowego (4.4), to ciąg geometryczny określony wzorem $t_n = q^n$ spełnia równanie rekurencyjne (4.3). Równanie

$$x^2 + ax + b = 0 \tag{4.5}$$

jest zwykle nazywane **równaniem charakterystycznym** równania rekurencyjnego (4.3). Mamy teraz dwa przypadki w zależności od liczby rozwiązań równania charakterystycznego.

Przypadek 1. Równanie charakterystyczne (4.5) ma dwa różne pierwiastki (rzeczywiste lub zespolone) q_1 i q_2. Wtedy mamy dwa ciągi geometryczne spełniające równanie (4.3). Rozwiązanie ogólne równania rekurencyjnego (4.3) ma zatem postać

$$t_n = c \cdot q_1^n + d \cdot q_2^n$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Współczynniki c i d wyznaczamy z układu równań otrzymanego przez wstawienie $n = 0$ i $n = 1$ do rozwiązania ogólnego. Przyjmując $n = 0$, otrzymujemy równanie

$$c + d = t_0.$$

Przyjmując $n = 1$, otrzymujemy równanie

$$q_1 c + q_2 d = t_1.$$

Układ równań

$$\begin{cases} c + d = t_0 \\ q_1 c + q_2 d = t_1 \end{cases}$$

zawsze ma rozwiązanie, gdyż

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = q_2 - q_1 \neq 0.$$

Zatem dwa początkowe wyrazy ciągu (t_n) pozwalają wyznaczyć jednoznacznie liczby c i d, a więc określają jednoznacznie cały ciąg (t_n).

Popatrzmy na kilka przykładów. Rozwiążmy najpierw równanie rekurencyjne

$$t_0 = 3, \quad t_1 = 7, \quad t_{n+2} - 5t_{n+1} + 6t_n = 0 \quad \text{dla } n \geq 0.$$

Równanie charakterystyczne $x^2 - 5x + 6 = 0$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste $x_1 = 2$ oraz $x_2 = 3$. Stąd wynika, że ciąg (t_n) jest określony wzorem ogólnym

$$t_n = c \cdot 2^n + d \cdot 3^n$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Współczynniki c i d wyznaczamy z układu równań powstałego przez podstawienie $n = 0$ i $n = 1$:

$$\begin{cases} c + d = 3 \\ 2c + 3d = 7 \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań, otrzymujemy $c = 2$ i $d = 1$. Zatem

$$t_n = 2^{n+1} + 3^n$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

Możemy teraz wyznaczyć wzór ogłny dla ciągu liczb Fibonacciego. Równanie rekurencyjne ciągu F_n ma postać

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0 \quad \text{dla } n \geq 0.$$

Jego równanie charakterystyczne

$$x^2 - x - 1 = 0$$

ma dwa pierwiastki

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{oraz} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Zatem rozwiązanie ogólne rozważanego równania rekurencyjnego ma postać

$$F_n = c \cdot \alpha^n + d \cdot \beta^n$$

dla pewnych współczynników c i d. Współczynniki te wyznaczamy z układu równań

$$\begin{cases} c + d = 1 \\ \alpha c + \beta d = 1 \end{cases}$$

Ten układ równań ma następujące rozwiązanie:

$$c = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}, \quad d = -\frac{\beta}{\sqrt{5}}.$$

Stąd otrzymujemy

$$F_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

Otrzymany wzór ogólny jest nazywany **wzorem Bineta**.

Rozwiążmy jeszcze jedno równanie rekurencyjne

$$t_0 = 1, \quad t_1 = 4, \quad t_{n+2} - 2t_{n+1} + 2t_n = 0 \quad \text{dla } n \geq 0.$$

Równanie charakterystyczne $x^2 - 2x + 2 = 0$ ma dwa pierwiastki zespolone

$$x_1 = 1 + \mathrm{i} \quad \text{oraz} \quad x_2 = 1 - \mathrm{i}.$$

Stąd wynika, że ciąg (t_n) jest określony wzorem ogólnym

$$t_n = c \cdot (1 + \mathrm{i})^n + d \cdot (1 - \mathrm{i})^n$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Współczynniki c i d wyznaczamy z układu równań powstałego przez podstawienie $n = 0$ i $n = 1$:

$$\begin{cases} c + d = 2 \\ (1 + \mathrm{i})c + (1 - \mathrm{i})d = 2 \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań, otrzymujemy

$$c = \frac{1 - 3\mathrm{i}}{2} \quad \text{oraz} \quad d = \frac{1 + 3\mathrm{i}}{2}.$$

Zatem

$$t_n = \frac{1 - 3\mathrm{i}}{2} \cdot (1 + \mathrm{i})^n + \frac{1 + 3\mathrm{i}}{2} \cdot (1 - \mathrm{i})^n$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

Jest oczywiste, że ciąg (t_n) ma wyrazy rzeczywiste (nawet całkowite). Otrzymany wzór odwołuje się jednak do liczb urojonych. Okazuje się, że dość łatwo możemy z powyższych wzorów zespolonych otrzymać postać rzeczywistą rozwiązania. Mamy bowiem

$$\begin{aligned} 1 + \mathrm{i} &= \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + \mathrm{i} \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right), \\ 1 - \mathrm{i} &= \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} - \mathrm{i} \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Ze wzoru de Moivre'a otrzymujemy

$$\begin{aligned} t_n &= \frac{1 - 3\mathrm{i}}{2} \cdot (1 + \mathrm{i})^n + \frac{1 + 3\mathrm{i}}{2} \cdot (1 - \mathrm{i})^n = \\ &= \frac{1 - 3\mathrm{i}}{2} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^n \cdot \left(\cos \frac{n\pi}{4} + \mathrm{i} \cdot \sin \frac{n\pi}{4} \right) + \frac{1 + 3\mathrm{i}}{2} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^n \cdot \left(\cos \frac{n\pi}{4} - \mathrm{i} \cdot \sin \frac{n\pi}{4} \right) = \\ &= \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{2} \cdot \left((1 - 3\mathrm{i}) \left(\cos \frac{n\pi}{4} + \mathrm{i} \cdot \sin \frac{n\pi}{4} \right) + (1 + 3\mathrm{i}) \left(\cos \frac{n\pi}{4} - \mathrm{i} \cdot \sin \frac{n\pi}{4} \right) \right) = \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^n \cdot \left(\cos \frac{n\pi}{4} + 3 \sin \frac{n\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Pokażemy teraz, że tę postać rzeczywistą możemy uzyskać także nieco inną metodą.

Rozpatrujemy zatem przypadek, gdy równanie charakterystyczne (4.5) ma współczynniki rzeczywiste, ale nie ma pierwiastków rzeczywistych (czyli ma dwa sprzężone pierwiastki zespolone). Oznacza to, że w równaniu (4.5) mamy $a^2 < 4b$. Stąd wynika, że $b > 0$. Niech więc $b = r^2$. Wtedy

$$\left(\frac{a}{2r} \right)^2 = \frac{a^2}{4b} < 1.$$

Zatem
$$\left|\frac{a}{2r}\right| < 1.$$
Stąd wynika, że istnieje liczba φ taka, że
$$\frac{a}{2r} = -\cos\varphi.$$
Równanie rekurencyjne (4.3) przyjmuje teraz postać
$$t_{n+2} - 2r\cos\varphi \cdot t_{n+1} + r^2 t_n = 0. \tag{4.6}$$
Można teraz sprawdzić, że ciąg (t_n) określony wzorem
$$t_n = r^n(c \cdot \cos n\varphi + d \cdot \sin n\varphi)$$
(dla $n = 0, 1, 2, \ldots$) jest rozwiązaniem ogólnym równania (4.6). W dowodzie korzysta się z następujących tożsamości trygonometrycznych:
$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$
oraz
$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\beta-\alpha).$$
Szczegóły tego dowodu pozostawiamy jako ćwiczenie.

Przypadek 2. Równanie charakterystyczne (4.5) ma jeden pierwiastek podwójny q. Mamy wtedy tylko jeden ciąg geometryczny (q^n) spełniający równanie rekurencyjne (4.3). Potrzebne jest drugie rozwiązanie. Sprawdzimy, że takim drugim rozwiązaniem jest ciąg liczb postaci $n \cdot q^n$. Mianowicie równanie charakterystyczne naszego równania rekurencyjnego ma postać
$$x^2 + ax + b = 0.$$
Takie równanie ma jeden pierwiastek podwójny, gdy $a^2 = 4b$ i ten pierwiastek jest równy
$$x = -\frac{a}{2}.$$
Ponieważ q jest tym pierwiastkiem podwójnym, więc
$$2q + a = 0.$$
Teraz sprawdzamy, że ciąg (nq^n) spełnia równanie rekurencyjne (4.3):
$$t_{n+2} + at_{n+1} + bt_n = 0,$$
czyli
$$(n+2)q^{n+2} + a(n+1)q^{n+1} + bnq^n = 0.$$

Przekształcamy to równanie w sposób równoważny:

$$\begin{gathered}
4(n+2)q^{n+2} + 4a(n+1)q^{n+1} + 4bnq^n = 0, \\
4(n+2)q^{n+2} + 4a(n+1)q^{n+1} + a^2nq^n = 0, \\
q^n \cdot \big(4(n+2)q^2 + 4a(n+1)q + a^2n\big) = 0, \\
q^n \cdot \big(n(4q^2 + 4aq + a^2) + 4q(2q+a)\big) = 0, \\
q^n \cdot \big(n(2q+a)^2 + 4q(2q+a)\big) = 0, \\
q^n \cdot (2q+a) \cdot \big(n(2q+a) + 4q\big) = 0.
\end{gathered}$$

Ostatnie równanie jest spełnione, gdyż

$$2q + a = 0.$$

Teraz mamy już dwa niezależne rozwiązania równania rekurencyjnego (4.3):

$$t_n = q^n \quad \text{oraz} \quad t_n = nq^n,$$

a więc mamy rozwiązanie ogólne:

$$t_n = c \cdot q^n + d \cdot nq^n,$$

czyli

$$t_n = (c + dn) \cdot q^n$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Współczynniki c i d wyznaczamy – podobnie, jak w przypadku 1 – z układu równań otrzymanego przez podstawienie $n = 0$ i $n = 1$ do wzoru ogólnego:

$$\begin{cases} c = t_0 \\ (c+d)q = t_1 \end{cases}$$

Znów dowolne wartości t_0 i t_1 wyznaczają jednoznacznie współczynniki c i d, a więc tym samym rozwiązanie równania rekurencyjnego.

Popatrzmy na jeden przykład. Rozwiążmy równanie rekurencyjne

$$t_0 = 1, \quad t_1 = 6, \quad t_{n+2} - 4t_{n+1} + 4t_n = 0 \quad \text{dla } n \geq 0.$$

Równanie charakterystyczne $x^2 - 4x + 4 = 0$ ma jeden podwójny pierwiastek rzeczywisty $x = 2$. Stąd wynika, że ciąg (t_n) jest określony wzorem ogólnym

$$t_n = c \cdot 2^n + d \cdot n \cdot 2^n = (c + dn) \cdot 2^n$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Współczynniki c i d wyznaczamy z układu równań powstałego przez podstawienie $n = 0$ i $n = 1$:

$$\begin{cases} c = 3 \\ (c+d) \cdot 2 = 6 \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań, otrzymujemy $c = 1$ i $d = 2$. Zatem

$$t_n = (2n + 1) \cdot 2^n$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

13. Równania rekurencyjne liniowe jednorodne wyższych rzędów o stałych współczynnikach

Rozpatrzone wyżej dwa przypadki dają w sumie pełną analizę równania rekurencyjnego (4.3)czyli równania liniowego jednorodnego o stałych współczynnikach, rzędu 2. Przypadek ogólny równań jednorodnych wyższych rzędów rozpatruje się podobnie. Dla równania (4.1) w analogiczny sposób definiujemy jego **równanie charakterystyczne**:

$$a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0. \tag{4.7}$$

Następnie znajdujemy jego wszystkie pierwiastki (uwzględniając pierwiastki zespolone i wielokrotne)

$$r_1, r_2, \ldots, r_k.$$

Przypuśćmy najpierw, że wszystkie pierwiastki są różne (tzn. wszystkie mają krotność 1). Wtedy rozwiązanie ogólne ma postać

$$t_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + \ldots + c_k r_k^n. \tag{4.8}$$

Przypuśćmy następnie, że niektóre pierwiastki równania (4.7) pokrywają się (czyli mamy do czynienia z pierwiastkiem wielokrotnym). Dla ustalenia uwagi, niech na przykład $r_1 = r_2 = \ldots = r_l = r$, tzn. r jest pierwiastkiem krotności l. Wtedy zamiast sumy

$$c_1 r_1^n + \ldots + c_l r_l^n$$

w rozwiązaniu (4.8) będziemy mieli sumę

$$r^n (c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + \ldots + c_l n^{l-1}).$$

W taki sam sposób postępujemy dla każdego pierwiastka wielokrotnego, rzeczywistego lub zespolonego. Szczegółowe sformułowanie tego twierdzenia i jego dowod odłożymy do następnego wykładu.

14. Równania rekurencyjne liniowe niejednorodne drugiego rzędu o stałych współczynnikach

Zajmiemy się teraz równaniami niejednorodnymi. Przypuśćmy więc, że mamy równanie niejednorodne rzędu k:

$$a_k \cdot t_{n+k} + a_{k-1} \cdot t_{n+k-1} + \ldots + a_1 \cdot t_{n+1} + a_0 \cdot t_n = f(n). \tag{4.9}$$

Zajmiemy się najpierw równaniami, w których funkcja f ma szczególną postać:

$$f(n) = c^n \cdot w(n),$$

gdzie c jest liczbą zespoloną, a $w(n)$ jest wielomianem stopnia d zmiennej n. Wtedy ciąg (t_n) spełnia pewne równanie rekurencyjne jednorodne rzędu $k+d+1$, którego wielomian charakterystyczny ma postać

$$(a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0)(r - c)^{d+1} = 0.$$

Takie równania już potrafimy rozwiązać. Musimy tylko zwrócić uwagę na to, że do rozwiązania tego równania potrzebujemy $k + d + 1$ wartości początkowych. Mamy zaś podane tylko k wartości początkowych (bo równanie (4.9) jest rzędu k). Pozostałe $d+1$ wartości musimy sami wyznaczyć z równania (4.9). Pozostaje więc tylko uzasadnić, że równanie (2) rzeczywiście sprowadza się w taki sposób do równania jednorodnego. Nie przeprowadzimy tu dowodu w całej ogólności, ograniczymy się tylko do jednego przypadku, gdy równanie (4.9) jest rzędu 2 i wielomian $w(n)$ jest stopnia 1. Mamy zatem równanie

$$t_{n+2} + at_{n+1} + bt_n = c^n(pn + q). \tag{4.10}$$

Podstawiamy w nim za n kolejno $n + 1$ i $n + 2$:

$$t_{n+3} + at_{n+2} + bt_{n+1} = c^{n+1}(p(n + 1) + q). \tag{4.11}$$

$$t_{n+4} + at_{n+3} + bt_{n+2} = c^{n+2}(p(n + 2) + q). \tag{4.12}$$

Następnie mnożymy równanie (4.10) przez c^2, równanie (4.11) przez $(-2c)$ i dodajemy otrzymane równania do równania (4.12). Nietrudno sprawdzić, że po prawej stronie otrzymamy zero i całe równanie będzie miało postać

$$t_{n+4} + (a - 2c)t_{n+3} + (b - 2ac + c^2)t_{n+2} + (ac^2 - 2bc)t_{n+1} + bc^2 t_n = 0. \tag{4.13}$$

Równanie charakterystyczne tego równania rekurencyjnego ma postać

$$x^4 + (a - 2c)x^3 + (b - 2ac + c^2)x^2 + (ac^2 - 2bc)x + bc^2 = 0. \tag{4.14}$$

Teraz wystarczy zuważyć, że lewa strona równania (4.14) rozkłada się na czynniki

$$x^4 + (a - 2c)x^3 + (b - 2ac + c^2)x^2 + (ac^2 - 2bc)x + bc^2 = (x^2 + ax + b)(x - c)^2.$$

Zatem rzeczywiście ciąg (t_n) spełnia równanie rekurencyjne jednorodne, którego równanie charakterystyczne ma żądaną postać.

W podobny sposób można rozwiązać nieco bardziej skomplikowane równania niejednorodne. Jeśli funkcja f w równaniu (4.9) ma postać

$$f(n) = c_1^n \cdot w_1(n) + c_2^n \cdot w_2(n) + \ldots,$$

gdzie $w_1(n), w_2(n), \ldots$ są wielomianami stopni odpowiednio $d_1, d_2, \ldots$, to ciąg (t_n) spełnia równanie rekurencyjne jednorodne, którego równaniem charakterystycznym jest

$$(a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0)(x - c_1)^{d_1+1}(x - c_2)^{d_2+1} \ldots$$

Dowód tego stwierdzenia pominiemy.

15. Układy równań rekurencyjnych

Rozwiązywanie układów równań rekurencyjnych omówimy na jednym przykładzie. Rozwiążemy układ równań

$$\begin{cases} t_0 = 2 \\ u_0 = 3 \\ t_{n+1} = 6t_n + 4u_n \\ u_{n+1} = t_n + 3u_n \end{cases}$$

Sprowadzimy ten układ równań do jednego równania liniowego drugiego rzędu. Najpierw w równaniu

$$t_{n+1} = 6t_n + 4u_n$$

podstawimy $n+1$ w miejsce n. Otrzymamy

$$t_{n+2} = 6t_{n+1} + 4u_{n+1} = 6t_{n+1} + 4 \cdot (t_n + 3u_n) = 6t_{n+1} + 4t_n + 12u_n.$$

Teraz podstawiamy $4u_n = t_{n+1} - 6t_n$:

$$t_{n+2} = 6t_{n+1} + 4t_n + 3 \cdot (t_{n+1} - 6t_n) = 6t_{n+1} + 4t_n + 3t_{n+1} - 18t_n = 9t_{n+1} - 14t_n.$$

Otrzymaliśmy równanie rekurencyjne

$$t_{n+2} - 9t_{n+1} + 14t_n = 0.$$

Jego równaniem charakterystycznym jest:

$$x^2 - 9x + 14 = 0,$$

czyli

$$(x-2)(x-7) = 0.$$

Stąd wynika, że ciąg (t_n) jest określony wzorem ogólnym

$$t_n = c \cdot 7^n + d \cdot 2^n$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Współczynniki c i d obliczamy z układu równań

$$\begin{cases} c + d = t_0 = 2 \\ 7c + 2d = t_1 = 24 \end{cases}$$

Otrzymujemy $c = 4$ i $d = -2$. A więc

$$t_n = 4 \cdot 7^n - 2 \cdot 2^n = 4 \cdot 7^n - 2^{n+1}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Wzór ogólny ciągu (u_n) otrzymujemy z równania $t_{n+1} = 6t_n + 4u_n$:

$$4u_n = t_{n+1} - 6t_n = 4 \cdot 7^{n+1} - 2^{n+2} - 24 \cdot 7^n + 2^{n+1} = 4 \cdot 7^n + 4 \cdot 2^{n+1},$$

czyli

$$u_n = 7^n + 2^{n+1}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

Ten układ równań, dzięki wyjątkowemu doborowi współczynników, można też rozwiązać prościej, nie odwołując się do rozwiązywania równań liniowych drugiego rzędu. Zauważmy bowiem, że

$$\begin{cases} t_0 + u_0 = 5 \\ t_{n+1} + u_{n+1} = 7 \cdot (t_n + u_n), \end{cases}$$

skąd dostajemy $t_n + u_n = 5 \cdot 7^n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Następnie

$$t_{n+1} = 4(t_n + u_n) + 2t_n = 2t_n + 20 \cdot 7^n.$$

Teraz zauważamy, że

$$t_{n+2} - 7t_{n+1} = 2t_{n+1} + 20 \cdot 7^{n+1} - 14t_n - 20 \cdot 7^{n+1} = 2 \cdot (t_{n+1} - 7t_n).$$

Stąd wynika, że

$$t_{n+1} - 7t_n = (t_1 - 7t_0) \cdot 2^n = (24 - 14) \cdot 2^n = 10 \cdot 2^n.$$

Zatem

$$t_{n+1} = 2t_n + 20 \cdot 7^n = 7t_n + 10 \cdot 2^n,$$

czyli

$$5t_n = 20 \cdot 7^n - 10 \cdot 2^n.$$

Ostatecznie

$$t_n = 4 \cdot 7^n - 2^{n+1}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Wzór ogólny ciągu (u_n) otrzymujemy teraz z równości $t_n + u_n = 5 \cdot 7^n$:

$$u_n = 5 \cdot 7^n - t_n = 5 \cdot 7^n - 4 \cdot 7^n + 2^{n+1} = 7^n + 2^{n+1}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

16. Liczby Catalana

Przypomnijmy z wykładu 1, że liczbą Catalana C_n nazywamy liczbę funkcji niemalejących $f : [n] \rightarrow [n]$ spełniających warunek

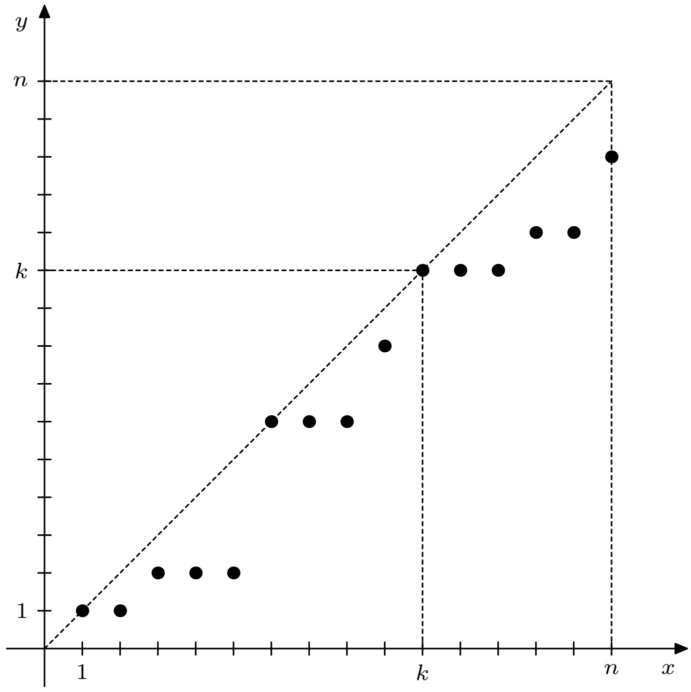
$$f(k) \leq k \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Warunek ten nazwiemy w skrócie **warunkiem Catalana** (spełnionym w zbiorze $[n]$). Przyjmujemy ponadto, że $C_0 = 1$. Poznaliśmy wzór ogólny:

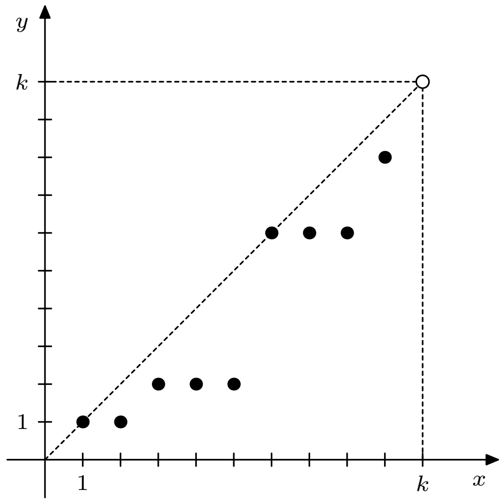
$$C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

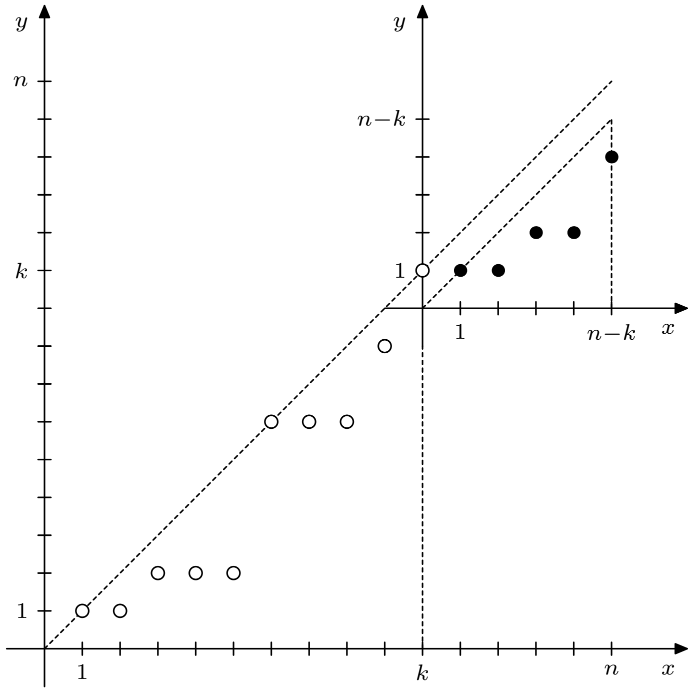
W tym paragrafie poznamy równanie rekurencyjne, za pomocą którego można zdefiniować ciąg liczb Catalana. Główny pomysł wyjaśnimy najpierw na wykresie. Niech $f : [n] \to [n]$ będzie funkcją niemalejącą spełniającą warunek Catalana. Oto wykres takiej funkcji f (na rysunku przyjęto $n = 15$).



Warunek Catalana oznacza, że punkty tworzące ten wykres nie mogą leżeć ponad prostą o równaniu $y = x$. Niech k będzie największą liczbą x taką, że $f(x) = x$ (na rysunku mamy $k = 10$). Taka liczba istnieje, bo z warunku Catalana wynika, że $f(1) = 1$. Prosta pionowa o równaniu $x = k$ dzieli ten wykres na dwie części: na lewo od niej mamy wykres funkcji niemalejącej $f \mid [k-1] : [k-1] \to [k-1]$ spełniającej warunek Catalana (w zbiorze $[k-1]$):



Oczywiście istnieje C_{k-1} takich funkcji. Zastanówmy się teraz, co się dzieje na prawo od prostej $x = k$. Po pierwsze zauważamy, że $f(k+1) = k$. Z warunku Catalana wynika bowiem, że $f(k+1) \leq k+1$. Z drugiej strony liczba k była największą liczbą x taką, że $f(x) = x$. Zatem $f(k+1) < k+1$. Ponieważ funkcja f jest niemalejąca oraz $f(k) = k$, więc $f(k+1) \geq k$. Łącznie to daje $f(k+1) = k$. Ponieważ dla $x > k$ mamy $f(x) < x$, więc punkty wykresu funkcji f leżące na prawo od prostej $x = k$ nie mogą leżeć nad prostą o równaniu $y = x-1$. Odpowiednio przesuwając osie układu współrzędnych, otrzymamy wykres pewnej funkcji niemalejącej $g : [n-k] \to [n-k]$ spełniającej warunek Catalana (w zbiorze $[n-k]$):



Istnieje C_{n-k} takich funkcji. Zatem każdy wykres funkcji niemalejącej $f : [n] \to [n]$ spełniającej warunek Catalana w zbiorze $[n]$ wyznacza jednoznacznie parę funkcji niemalejących spełniających warunek Catalana: jedną określoną w zbiorze $[k-1]$ i drugą określoną w zbiorze $[n-k]$. Odwrotnie, każda taka para funkcji wyznacza jednoznacznie funkcję f. Musimy bowiem przyjąć $f(k) = k$ i umieścić odpowiednio wysoko wykres drugiej funkcji (wiemy przy tym, jak wysoko: pierwsza wartość jest bowiem równa k). Ponieważ k może być dowolną z liczb od 1 do n, więc otrzymujemy równanie rekurencyjne

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} \cdot C_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-k-1}$$

dla $n = 1, 2, 3, \ldots$

Podamy teraz ścisłą definicję obu funkcji wyznaczonych przez funkcję f. Pierwszą funkcją jest oczywiście $f \mid [k-1]$. Drugą funkcję $g : [n-k] \to [n-k]$ definiujemy wzorem

$$g(x) = f(x+k) - k + 1 \quad \text{dla } x \in [n-k].$$

Oczywiście funkcja g jest niemalejąca. Ponadto

$$g(x) < x + k - k + 1 = x + 1,$$

czyli $g(x) \leq x$. To wynika z określenia liczby k: dla $x \geq 1$ mamy bowiem $f(x+k) < x+k$. Funkcja g spełnia więc rzeczywiście warunek Catalana w zbiorze $[n-k]$. Wyznaczenie wzoru definiującego funkcję f, gdy znane są funkcje $f \mid [k-1]$ i g pozostawiamy jako ćwiczenie.

Podsumowując, liczby Catalana mogą być zdefiniowane następującymi wzorami rekurencyjnymi:

$$C_0 = 1, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1} \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Korzystając z powyższego równania rekurencyjnego obliczymy kilka początkowych liczb Catalana:

$$\begin{aligned}
&C_0 = 1,\\
&C_1 = C_0^2 = 1,\\
&C_2 = C_0C_1 + C_1C_0 = 2C_0C_1 = 2,\\
&C_3 = C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0 = 2 + 1 + 2 = 5,\\
&C_4 = C_0C_3 + C_1C_2 + C_2C_1 + C_3C_0 = 5 + 2 + 2 + 5 = 14,\\
&C_5 = C_0C_4 + C_1C_3 + C_2C_2 + C_3C_1 + C_4C_1 = 14 + 5 + 4 + 5 + 14 = 42.
\end{aligned}$$

Pokażemy jeszcze jeden przykład zadania prowadzącego do liczb Catalana. Niech $\bullet$ będzie działaniem niełącznym w pewnym zbiorze A. Wtedy wynik n-krotnego wykonania tego działania na elementach $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ zależy od rozmieszczenia nawiasów. Na przykład dla $n = 3$ mamy 5 sposobów rozmieszczenia nawiasów, gdy wykonujemy działanie $\bullet$ na elementach $a, b, c, d \in A$:

$$a \bullet \big(b \bullet (c \bullet d)\big), \quad a \bullet \big((b \bullet c) \bullet d\big), \quad (a \bullet b) \bullet (c \bullet d), \quad \big(a \bullet (b \bullet c)\big) \bullet d, \quad \big((a \bullet b) \bullet c\big) \bullet d.$$

Dla $n = 4$ mamy 14 sposobów rozmieszczenia nawiasów:

$$\begin{array}{llll}
a \bullet \big(b \bullet (c \bullet (d \bullet e))\big) & (a \bullet b) \bullet \big(c \bullet (d \bullet e)\big) & \big(a \bullet (b \bullet c)\big) \bullet (d \bullet e) & \big(a \bullet (b \bullet (c \bullet d))\big) \bullet e\\
a \bullet \big(b \bullet ((c \bullet d) \bullet e)\big) & (a \bullet b) \bullet \big((c \bullet d) \bullet e\big) & \big((a \bullet b) \bullet c\big) \bullet (d \bullet e) & \big(a \bullet ((b \bullet c) \bullet d)\big) \bullet e\\
a \bullet \big((b \bullet c) \bullet (d \bullet e)\big) & & & \big((a \bullet b) \bullet (c \bullet d)\big) \bullet e\\
a \bullet \big((b \bullet (c \bullet d)) \bullet e\big) & & & \big((a \bullet (b \bullet c)) \bullet d\big) \bullet e\\
a \bullet \big(((b \bullet c) \bullet d) \bullet e\big) & & & \big(((a \bullet b) \bullet c) \bullet d\big) \bullet e
\end{array}$$

Domyślamy się, że liczba rozmieszczeń nawiasów jest liczbą Catalana. Wykażemy, że tak jest.

Niech B_n będzie liczbą rozmieszczeń nawiasów przy n wykonywanych działaniach. Przyjmujemy, że $B_0 = 1$. Mamy teraz $n \geq 1$ i $n+1$ elementów $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ zbioru A. Ostatnie działanie, które mamy wykonać dzieli te $n+1$ elementów na dwie grupy:

$$(a_1 \ldots a_{k+1}) \bullet (a_{k+2} \ldots a_{n+1}).$$

W pierwszej grupie musimy wykonać k działań, w drugiej $n-k-1$ działań. Oczywiście może być $k = 0$, gdy lewa grupa składa się tylko z jednego elementu:

$$a_1 \bullet (a_2 \ldots a_{n+1}).$$

W prawej grupie musimy wykonać wtedy $n-1$ działań. Z drugiej strony lewa grupa może składać się z co najwyżej n elementów; w prawej będzie wtedy tylko jeden element:

$$(a_1 \ldots a_n) \bullet a_{n+1}.$$

W lewej grupie mamy wtedy do wykonania $n-1$ działań, w prawej ani jednego. Podział

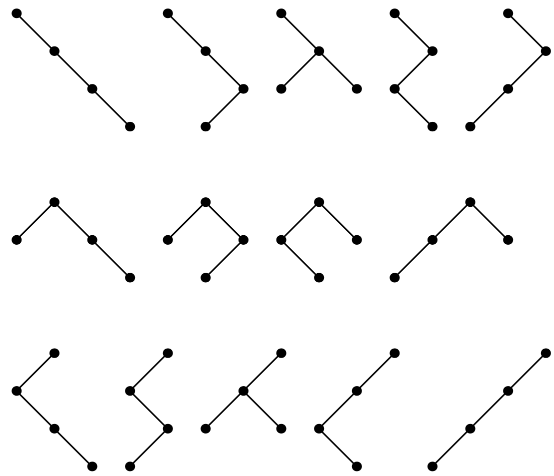
$$(a_1 \ldots a_{k+1}) \bullet (a_{k+2} \ldots a_{n+1})$$

może być dokonany na $B_k B_n - k - 1$ sposobów: możemy rozmieścić nawiasy w lewej grupie na B_k sposobów i na $B_n - k - 1$ sposobów w prawej. Stąd dostajemy równanie

$$B_n = B_0 B_{n-1} + B_1 B_{n-2} + \ldots + B_{n-1} B_0 = \sum_{k=0}^{n-1} B_k B_{n-k-1}$$

dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Otrzymaliśmy zatem to samo równanie co w przypadku liczb Catalana. Stąd wynika, że $B_n = C_n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

Znamy wiele zadań prowadzących do liczb Catalana. Oto jeszcze dwa z nich. Istnieje 14 drzew mających 4 wierzchołki takich, że każdy wierzchołek ma co najwyżej 2 leżące bezpośrednio niżej (można od niego iść w lewo, w prawo, w obie strony lub w żadną):



Ogólnie: istnieje C_n drzew mających n wierzchołków o powyższej własności.

Liczby od 1 do 8 można na 14 sposobów ustawić w tablicy o 4 kolumnach i dwóch wierszach tak, by w każdej kolumnie i w każdym wierszu liczby były ustawione malejąco (licząc od góry i od lewej strony:

$$\begin{bmatrix} 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 8 & 7 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 8 & 7 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 8 & 7 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 8 & 7 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 7 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 8 & 7 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 8 & 7 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 8 & 7 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 8 & 6 & 5 & 4 \\ 7 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 8 & 6 & 5 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ogólnie: istnieje C_n tablic o n kolumnach i 2 wierszach, w których liczby od 1 do $2n$ są ustawione zgodnie z powyższymi regułami (tzn. w obu wierszach liczby tworzą ciągi malejące, a w każdej kolumnie liczba większa stoi nad mniejszą).

Wykazanie, że w obu powyższych zadaniach poszukiwana liczba (drzew i tablic) jest liczbą Catalana, jest nietrudnym ćwiczeniem.

17. Zadanie olimpijskie

Na zawodach II stopnia XLIII Olimpiady Matematycznej zawodnicy mieli do rozwiązania następujące zadanie:

- Ciągi (x_n) i (y_n) są określone następująco: $x_0 = y_0 = 1$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n^2 + 2}{2y_n} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej $n \geq 0$ zachodzi równość $y_n = x_{2^n - 1}$.

Jedna z metod rozwiązania tego zadania polega na znalezieniu wzorów ogólnych obu ciągów i porównaniu tych wzorów dla odpowiednich indeksów. Wyznaczenie wzoru ogólnego ciągu (x_n) można sprowadzić do równania rekurencyjnego liniowego. Zdefiniujmy bowiem dwa ciągi (a_n) i (b_n) wzorami: $a_0 = b_0 = 1$,

$$a_{n+1} = a_n + 2b_n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Wówczas łatwo dowodzimy przez indukcję, że

$$x_n = \frac{a_n}{b_n} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Podobnie jak w paragrafie 15 sprowadzamy układ równań rekurencyjnych do równania drugiego rzędu

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n = 0.$$

Równanie charakterystyczne $x^2 - 2x - 1 = 0$ ma dwa pierwiastki

$$x_1 = 1 + \sqrt{2}, \quad x_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

Stąd łatwo otrzymujemy rozwiązanie ogólne

$$a_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{2}$$

oraz

$$b_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1} - (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}}$$

i ostatecznie otrzymujemy

$$x_n = \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2} \cdot \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{(1 + \sqrt{2})^{n+1} - (1 - \sqrt{2})^{n+1}}.$$

Uzyskanie wzoru ogólnego dla ciągu (y_n) jest bardziej skomplikowane. Ciąg ten jest bowiem zdefiniowany za pomocą równania nieliniowego i nie widać żadnej ogólnej metody rozwiązywania takich równań rekurencyjnych. Posłużymy się następującym pomysłem. Najpierw obliczamy

$$y_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{y_n^2+2}{2y_n}-\sqrt{2}=\frac{y_n^2-2\sqrt{2}y_n+2}{2y_n}=\frac{(y_n-\sqrt{2})^2}{2y_n}$$

i podobnie

$$y_{n+1}+\sqrt{2}=\frac{(y_n+\sqrt{2})^2}{2y_n}.$$

Stąd wynika, że

$$\frac{y_{n+1}-\sqrt{2}}{y_{n+1}+\sqrt{2}}=\frac{(y_n-\sqrt{2})^2}{(y_n+\sqrt{2})^2}=\left(\frac{y_n-\sqrt{2}}{y_n+\sqrt{2}}\right)^2.$$

Zdefiniujmy ciąg (c_n) wzorem

$$c_n=\frac{y_n-\sqrt{2}}{y_n+\sqrt{2}}.$$

Wówczas

$$c_{n+1}=c_n^2,$$

skąd wynika, że

$$c_n=c_0^{2^n}=\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{2^n}.$$

Teraz już łatwo dostajemy

$$y_n=\sqrt{2}\cdot\frac{1+c_n}{1-c_n}=\sqrt{2}\cdot\frac{(1+\sqrt{2})^{2^n}+(1-\sqrt{2})^{2^n}}{(1+\sqrt{2})^{2^n}-(1-\sqrt{2})^{2^n}}.$$

Porównując otrzymane wzory ogólne dostajemy $y_n=x^{2^n-1}$.

Zadanie można też łatwo rozwiązać bezpośrednio przez indukcję. Najpierw dowodzimy przez indukcję równość pomocniczą:

$$x_{2n+1}=\frac{x_n^2+2}{2x_n}$$

dla $n=0,1,2,\dots$ Sprawdzenie warunku początkowego (dla $n=0$) jest oczywiste. Przyjmijmy więc, że dla pewnego n mamy równość

$$x_{2n+1}=\frac{x_n^2+2}{2x_n}$$

i dowodzimy, że

$$x_{2n+3}=\frac{x_{n+1}^2+2}{2x_{n+1}}.$$

Przekształcamy najpierw lewą stronę:

$$
\begin{aligned}
x_{2n+3} &= \frac{x_{2n+2}+2}{x_{2n+2}+1} = \frac{\frac{x_{2n+1}+2}{x_{2n+1}+1}+2}{\frac{x_{2n+1}+2}{x_{2n+1}+1}+1} = \frac{(x_{2n+1}+2)+2(x_{2n+1}+1)}{(x_{2n+1}+2)+(x_{2n+1}+1)} = \\
&= \frac{3x_{2n+1}+4}{2x_{2n+1}+3} = \frac{3\cdot\frac{x_m^2+2}{2x_m}+4}{2\cdot\frac{x_m^2+2}{2x_m}+3} = \frac{3(x_m^2+2)+8x_m}{2(x_m^2+2)+6x_m} = \\
&= \frac{3x_m^2+8x_m+6}{2x_m^2+6x_m+4}.
\end{aligned}
$$

Następnie przekształcamy prawą stronę:

$$
\begin{aligned}
\frac{x_{m+1}^2+2}{2x_{m+1}} &= \frac{\left(\frac{x_m+2}{x_m+1}\right)^2+2}{2\cdot\frac{x_m+2}{x_m+1}} = \frac{(x_m+2)^2+2(x_m+1)^2}{2(x_m+2)(x_m+1)} = \\
&= \frac{x_m^2+4x_m+4+2x_m^2+4x_m+2}{2(x_m^2+3x_m+2)} = \frac{3x_m^2+8x_m+6}{2x_m^2+6x_m+4}.
\end{aligned}
$$

W ten sposób nasza równość pomocnicza została udowodniona. Teraz dowodzimy przez indukcję, że $y_n = x_{2^n-1}$. Znów sprawdzenie warunku początkowego (dla $n = 0$) jest oczywiste. W kroku indukcyjnym mamy:

$$
y_{n+1} = \frac{y_n^2+2}{2y_n} = \frac{\left(x_{2^n-1}\right)^2+2}{2x_{2^n-1}} = x_{2(2^n-1)+1} = x_{2^{n+1}-1},
$$

co kończy dowód.

18. Zadanie z zawodów matematycznych

Na XXI Austriacko-Polskich Zawodach Matematycznych zawodnicy rozwiązywali następujące zadanie:

- Rozważamy n punktów $P_1, P_2, \ldots, P_n$ położonych w tej kolejności na jednej linii prostej. Malujemy każdy z tych punktów na jeden z następujących kolorów: biały, czerwony, zielony, niebieski, fioletowy. Kolorowanie nazwiemy *dopuszczalnym*, jeśli dla dowolnych dwóch kolejnych punktów P_i, P_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ oba są tego samego koloru lub co najmniej jeden z nich jest biały. Ile jest dopuszczalnych kolorowań?

Najpierw ustalmy terminologię. Powiemy, że punkt jest *kolorowy*, jeśli został pomalowany na kolor różny od białego; w przeciwnym razie nazywamy ten punkt *białym*. Definiujemy dwa ciągi (b_n) i (k_n) w następujący sposób: b_n jest liczbą dopuszczalnych kolorowań n punktów takich, że punkt P_n jest biały, k_n zaś jest liczbą dopuszczalnych kolorowań takich, że punkt P_n jest kolorowy. Wówczas oczywiście

$$
b_1 = 1, \quad k_1 = 4.
$$

Następnie $b_{n+1} = b_n + k_n$, bo jeśli punkt P_{n+1} jest biały, to kolorowanie poprzednich n punktów jest dowolnym dopuszczalnym kolorowaniem zakończonym punktem białym lub dowolnym kolorowym. Natomiast $k_{n+1} = 4b_n + k_n$, bo jeśli punkt P_{n+1} jest kolorowy, to kolorowanie poprzednich n punktów jest kolorowaniem dopuszczalnym zakończonym punktem białym (i wtedy mamy 4 możliwości wyboru koloru dla P_{n+1}) lub kolorowym tego samego koloru co P_{n+1}.

Układ równań rekurencyjnych

$$b_1 = 1, \quad k_1 = 4, \quad b_{n+1} = b_n + k_n, \quad k_{n+1} = 4b_n + k_n$$

rozwiązujemy tak jak w paragrafie 15, otrzymując ostatecznie liczbę kolorowań dopuszczalnych równą

$$b_n + k_n = b_{n+1} = \frac{3^{n+1} + (-1)^{n+1}}{2}.$$

To zadanie można rozwiązać bez układania równań rekurencyjnych. Nazwijmy *blokiem* ciąg punktów tego samego koloru. Kolorowanie dopuszczalne dzieli punkty $P_1, \ldots, P_n$ na k bloków (gdzie $k = 1, 2, \ldots, n$), wśród których co drugi jest biały, pozostałe zaś kolorowe. Chcemy policzyć wszystkie sposoby takiego podziału na bloki. Zauważmy najpierw, że istnieje $\binom{n-1}{k-1}$ sposobów podziału n punktów na k bloków, bez uwzględniania kolorów. Musimy bowiem w wolne miejsca między punktami wstawić $k-1$ kresek oddzielających bloki od siebie. Teraz będziemy rozpatrywać dwa przypadki:

1. Przypuśćmy najpierw, że liczba n jest parzysta: $n = 2m$. Ten przypadek dzielimy na dwa podprzypadki:
   1a. Liczba bloków jest parzysta ($k = 2l$, gdzie $l = 1, 2, \ldots, m$). Mamy wtedy l bloków białych i l bloków kolorowych. Możemy dla nich wybrać kolory na 4^l sposobów. Uwzględniając to, czy pierwszy blok jest biały, czy kolorowy, mamy w tym przypadku $2 \cdot 4^l$ sposobów wyboru kolorów bloków kolorowych.
   1b. Liczba bloków jest nieparzysta ($k = 2l-1$, gdzie $l = 1, 2, \ldots, m$). Jeśli pierwszy blok jest biały, to mamy 4^{l-1} możliwości wyboru kolorów dla bloków kolorowych; jeśli zaś pierwszy blok jest kolorowy, to mamy 4^l możliwości wyboru kolorów. Łącznie mamy w tym przypadku $\frac{5}{4} \cdot 4^l$ możliwości wyboru kolorów.

   Łacznie liczba kolorowań dopuszczalnych wynosi w tym przypadku

$$\sum_{l=1}^{m} \binom{2m-1}{2l-1} \cdot 2 \cdot 4^l + \sum_{l=1}^{m} \binom{2m-1}{2l-2} \cdot \frac{5}{4} \cdot 4^l.$$

   Zauważmy teraz, że

$$2 \cdot 4^l = \frac{9-1}{4} \cdot 2^{2l} = \frac{9 + (-1)^{2l-1}}{2} \cdot 2^{2l-1}$$

   oraz

$$\frac{5}{4} \cdot 4^l = \frac{9+1}{8} \cdot 2^{2l} = \frac{9 + (-1)^{2l-2}}{2} \cdot 2^{2l-2}.$$

Stąd wynika, że w przypadku 1 mamy następującą liczbę kolorowań dopuszczalnych:

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{m}\binom{2m-1}{2l-1}\cdot 2\cdot 4^l+\sum_{l=1}^{m}\binom{2m-1}{2l-2}\cdot\frac{5}{4}\cdot 4^l=\\
&=\sum_{l=1}^{m}\binom{2m-1}{2l-1}\cdot\frac{9+(-1)^{2l-1}}{2}\cdot 2^{2l-1}+\sum_{l=1}^{m}\binom{2m-1}{2l-2}\cdot\frac{9+(-1)^{2l-2}}{2}\cdot 2^{2l-2}=\\
&=\sum_{l=0}^{2m-1}\binom{2m-1}{l}\cdot\frac{9+(-1)^l}{2}\cdot 2^l=\\
&=\frac{9}{2}\cdot\sum_{l=0}^{2m-1}\binom{2m-1}{l}2^l+\frac{1}{2}\cdot\sum_{l=0}^{2m-1}\binom{2m-1}{l}(-2)^l=\\
&=\frac{9}{2}\cdot(1+2)^{2m-1}+\frac{1}{2}\cdot(1-2)^{2m-1}=\frac{9\cdot 3^{2m-1}-1}{2}=\frac{3^{n+1}-1}{2}.
\end{aligned}$$

2. Przypuśćmy następnie, że liczba n jest nieparzysta: $n=2m+1$. Ten przypadek znów dzielimy na dwa podprzypadki:
   2a. Liczba bloków jest parzysta ($k=2l$, gdzie $l=1,2,\ldots,m$). Mamy wtedy l bloków białych i l bloków kolorowych. Możemy dla nich wybrać kolory na 4^l sposobów. Uwzględniając to, czy pierwszy blok jest biały, czy kolorowy, mamy w tym przypadku $2\cdot 4^l$ sposobów wyboru kolorów bloków kolorowych.
   2b. Liczba bloków jest nieparzysta ($k=2l-1$, gdzie $l=1,2,\ldots,m+1$). Jeśli pierwszy blok jest biały, to mamy 4^{l-1} możliwości wyboru kolorów dla bloków kolorowych; jeśli zaś pierwszy blok jest kolorowy, to mamy 4^l możliwości wyboru kolorów. Łącznie mamy w tym przypadku $\frac{5}{4}\cdot 4^l$ możliwości wyboru kolorów.

   Łacznie liczba kolorowań dopuszczalnych wynosi w tym przypadku

$$\sum_{l=1}^{m}\binom{2m}{2l-1}\cdot 2\cdot 4^l+\sum_{l=1}^{m+1}\binom{2m}{2l-2}\cdot\frac{5}{4}\cdot 4^l.$$

   Podobnie jak w przypadku 1 pokazujemy, że ta liczba jest równa

$$\frac{3^{n+1}+1}{2}.$$

W obu przypadkach mamy zatem $\frac{1}{2}\cdot(3^{n+1}+(-1)^{n+1})$ kolorowań dopuszczalnych.