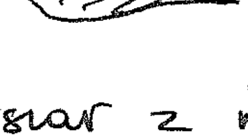
Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwarty i ograniczony.

Mówimy, że Ω ma brzeg (jednostajnie) lipszycowski, gdy istnieje taka stała $L>0$, że $\partial\Omega$ jest, w otoczeniu każdego swojego punktu, wykresem funkcji L-lipszycowskiej.

Łatwo można sprawdzić, że każdy taki obszar ma własność stożka wewnętrznego; spełniony jest też następujący warunek:

$$\begin{cases} \text{Istnieje } A\in(0,1] \text{ t.ż. } \forall_{R\in(0,\operatorname{diam}\Omega]} \\ \text{i } \forall_{x\in\overline{\Omega}} \text{ mamy } |\Omega\cap B(x,R)| \geq A|B(x,R)| \quad (=AR^n\omega_n) \end{cases}$$

Jeżeli obszar Ω $\underbrace{\text{spełnia}}_{\text{(niekoniecznie z brzegiem lipszycowskim)}}$ powyższy warunek, mówimy, że Ω nie ma zewnętrznych ostrzy (no external cusps), bo wrogiem są obszary takie, jak na rysunku: .

Ćwiczenia: (1) Wykazać, że obszar z własnością stożka wewn. nie ma zewnętrznych ostrzy.

(2) Wykazać, że jeśli Ω ma brzeg lipszycowski, to $\forall_{\substack{x\in\overline{\Omega} \\ R>0}}$ $B(x,R)\cap\Omega$ też ma brzeg lipszycowski.

Będziemy dalej pisać $\widetilde{B}(x,R) = B(x,R) \cap \Omega$,
nietrudno sprawdzić, że gdy Ω nie ma zewn. ostrzy, to $\forall_{x \in \overline{\Omega}}$, $s, r \in (0, \operatorname{diam} \Omega]$

$$A\left(\frac{s}{r}\right)^n |\widetilde{B}(x,r)| \le |\widetilde{B}(x,s)| \le A^{-1}\left(\frac{s}{r}\right)^n |\widetilde{B}(x,r)|$$

Dalej, dla $f \in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$, $f_{x,r} = \fint_{\widetilde{B}(x,r)} f$

Zauważmy, że gdy $x \in \Omega$, to dla dost. małych r mamy $\widetilde{B}(x,r) = B(x,r)$ i z tw. Lebesgue'a o różniczkowaniu $\lim_{r \to 0} f_{x,r} = f(x)$ dla p.w. $x \in \Omega$.

Naszym celem jest udowodnienie następującego twierdzenia, które jest wersją twierdzenia Sobolewa dla $p > n$:

<u>Tw. Morreya</u>: Niech $\Omega = \mathbb{R}^n$ lub $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ niech będzie obszarem ograniczonym z brzegiem lipszycowskim. Wówczas każda funkcja $f \in W^{1,p}(\Omega)$, $p > n$, ma reprezentanta który jest na Ω hölderowsko ciągły, z wykładnikiem $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$.

To twierdzenie najczęściej dowodzi się wprost, ja jednak chciałbym przy okazji dowodu pokazać Państwu ważne narzędzie, bardzo użyteczne w teorii regularności rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych: twierdzenie Campanato, pozwalające na scharakteryzowanie poprzez pewne całki funkcji hölderowsko ciągłych.

Twierdzenie Campanato

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem (niekoniecznie ograniczonym) bez zewnętrznych ostrzy i załóżmy, że funkcja $u \in L^p(\Omega)$ spełnia dla pewnej $\lambda \in (n, n+p)$ warunek

$$[u]^p_{p,\lambda} := \sup\left\{ R^{-\lambda} \int_{\tilde{B}(x,R)} |u - u_{x,R}|^p \ : \ x \in \overline{\Omega},\ R \in (0, \operatorname{diam}\Omega] \right\} < \infty$$

$$\left(\text{czyli istnieje } C > 0 \text{ tż } \int_{\tilde{B}(x,R)} |u - u_{x,R}|^p \leq C R^{\lambda} \right)$$

Wówczas u ma reprezentanta hölderowsko ciągłego na Ω, z wykładnikiem $\alpha = \frac{\lambda - n}{p}$.

Ćwiczenie: Wykazać twierdzenie odwrotne: jeżeli v jest hölderowsko ciągła na Ω, z wykładnikiem $\alpha \in (0,1)$, to istnieje $C > 0$ tż $\int_{\tilde{B}(x,R)} |u - u_{x,R}|^p \leq C R^{\alpha p + n}$.

Z tw. Campanato łatwo już wynika tw. Morreya na $\Omega = \mathbb{R}^n$, gdy $\forall_{x,R}$ $\tilde{B}(x,R) = B(x,R)$.

Rzeczywiście, gdy $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ dla $p > n$, to

$$\int_{B(x,R)} |u - u_{x,R}|^p \underset{\text{nier. Poincaré}}{\leq} C(n,p) R^p \int_{B(x,R)} |\nabla u|^p \text{; więc}$$

$$R^{-p} \int_{B(x,R)} |u - u_{x,R}|^p \leq C(n,p) \|\nabla u\|_p^p$$

$$\underset{\lambda = p}{\overset{\text{tw. Campanato}}{\Longrightarrow}} \quad u \text{ ma repr. hölderowsko ciągłego}$$

$$\text{z wykładnikiem } \alpha = \frac{p-n}{p} = 1 - \frac{n}{p}.$$

Na ogólnych obszarach z brzegiem lipszycowskim jest trudniej, rozumowanie jak wyżej daje nam łatwo (o ile Ω nie ma zewn. ostrzy), że $u \in W^{1,p}$ ma reprezentanta, który jest lokalnie hölderowsko ciągły, ale nie mamy pewności, czy stała Höldera nie eksploduje gdy zbliżamy się do brzegu (na $\tilde{B}(x,R)$ nie mamy – a w każdym razie nie udowodniliśmy – tak wygodnej postaci nier. Poincaré jak na kulach $B(x,R)$).

Mamy jednak, pochodzące chyba od Steina, ważne twierdzenie o rozszerzaniu:

<u>Def</u>: Obszar $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (nieskończenie ograniczony) ma brzeg $\partial\Omega$ jednostajnie lipszycowski, gdy istnieją $\varepsilon, L > 0$, $M \in \mathbb{N}$ i lokalnie skończone, przeliczalne pokrycie $\{\Omega_i\}$ zbioru $\partial\Omega$ takie, że

(·) jeżeli $x \in \partial\Omega$, to $B(x,\varepsilon) \subset \Omega_i$ dla pewnego i

(··) każdy punkt $\mathbb{R}^n$ należy do nie więcej niż M zbiorów Ω_i

(···) dla każdego i zbiór $\Omega \cap \Omega_i$ jest (z dokł. do permutacji współrzędnych) postaci $\Omega \cap \{x_n > f_i(x_1, \dots, x_{n-1})\}$, gdzie f_i jest funkcją L-lipszycowską.

Gdy Ω jest ograniczony, $\partial\Omega$ jest zwarty i punkty (·) i (··) są nieistotne, więc definicja redukuje się do poprzedniej.

<u>Tw. (Stein)</u> Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym z jednost. lipszycowskim brzegiem. Wówczas dla każdego $p \in [1, \infty]$ istnieje ciągły operator rozszerzenia

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

tż. $\mathcal{E}(u) = u$ na Ω (dokładniej $\mathcal{E}(u)(x) = u(x)$ dla p.w. $x \in \Omega$)

oraz $\|\mathcal{E}(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \underbrace{C(n, M, L, \varepsilon)}_{\text{czyli } C(\Omega)} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

~~Jeżeli~~ Dowód (szkic) za tydzień.

Jeżeli zatem $u \in W^{1,p}(\Omega)$ dla $p > n$ i Ω ma jednost. lipszycowski brzeg, to $\mathcal{E}(u) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, więc $\mathcal{E}(u)$ jest hölderowsko ciągła, z wykł. $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$, więc $u = \mathcal{E}(u)|_{\Omega}$ też (modulo wybór odp. reprezentantów).

Dowód tw. Campanato

Dowód opiera się na dwóch lematach. Pierwszy pokazuje, jak szacować różnicę dwóch wartości średnich funkcji u, po kulach o tym samym środku:

Lemat 1 Istnieje $C = C(\Omega, n, \lambda, p)$ tż. $\forall x \in \overline{\Omega}$ $\forall r, s: 0 < r \leq s \leq \operatorname{diam} \Omega$ zachodzi

$$|u_{x,s} - u_{x,r}| \leq C [u]_{p,\lambda} s^{\alpha}$$

Drugi lemat pozwala w podobny sposób oszacować różnicę dwóch wartości średnich po ustalonych kulach o tym samym promieniu R i różnych środkach, w odległości 2R:

Lemat 2 Niech $x, y \in \overline{\Omega}$, $|x-y| = R$. Wówczas

$$|u_{x,2R} - u_{y,2R}| \leq C R^{\alpha} [u]_{p,\lambda}$$

dla pewnej $C = C(\Omega, n, \lambda)$.

Pokażę najpierw, jak przy pomocy tych dwóch lematów wykazać tw. Campanato:

Dowód:

Niech $v(x) = \lim_{r \to 0} u_{x,r}$. Jak już wspomnieliśmy, z tw. Lebesgue'a o różniczkowaniu ta granica istnieje dla p.w. x i dla p.w. $x \in \Omega$ jest równa $u(x)$, niech więc $v(x) = u(x)$ dla $x \in \Omega \setminus Z$, gdzie Z jest pewnym (być może pustym) zbiorem miary zero.

Oszacujmy $|v(x) - v(y)|$ dla $x, y \in \Omega \setminus Z$, $|x-y| = R$.

$$|v(x) - v(y)| \leq |v(x) - u_{x,2R}| + |v_{x,2R} - u_{y,2R}| +$$
$$+ |v(y) - u_{y,2R}| = I_1 + I_2 + I_3.$$

Z Lematu 1 możemy oszacować I_1 oraz I_3:

$$I_1 = |v(x) - u_{x,2R}| = \lim_{r \to 0} |u_{x,r} - u_{x,2R}| \leq C[u]_{p,\lambda} (2R)^\alpha$$

i tak samo I_3

a z Lematu 2 szacujemy I_2:

$$I_2 = |u_{x,2R} - u_{y,2R}| \leq C[u]_{p,\lambda} R^\alpha$$

i ostatecznie $|v(x) - v(y)| \leq C[u]_{p,\lambda} R^\alpha =$

$$= C[u]_{p,\lambda} |x-y|^\alpha$$

Funkcja v jest więc hölderowsko ciągła (a więc w szczególności jednost. ciągła) na $\Omega \setminus Z$, który jest gęsty w $\overline{\Omega}$ — rozszerza się zatem jednoznacznie do funkcji ~~..~~ ciągłej na całym $\overline{\Omega}$ i bez trudu sprawdzamy, że $|v(x) - v(y)| \leq C[u]_{p,\lambda} |x-y|^\alpha$ dla wszystkich $x, y \in \overline{\Omega}$.

$\square$

Pozostaje udowodnić oba lematy:

Dowód Lematu 1

Niech $0 < \varrho \leq \sigma \leq \operatorname{diam} \Omega$.

Mamy $|u_{x,\varrho} - u_{x,\sigma}| = \left| \fint_{\tilde{B}(x,\varrho)} (u - u_{x,\sigma}) \right| \leq$

$\leq \fint_{\tilde{B}(x,\varrho)} |u - u_{x,\sigma}| \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\fint_{\tilde{B}(x,\varrho)} |u - u_{x,\sigma}|^p \right)^{1/p} =$

$= |\tilde{B}(x,\varrho)|^{-1/p} \left(\int_{\tilde{B}(x,\varrho)} |u - u_\sigma|^p \right)^{1/p} \leq$

$\leq C \varrho^{-n/p} \left(\int_{\tilde{B}(x,\sigma)} |u - u_\sigma|^p \right)^{1/p} \leq C \varrho^{-n/p} \sigma^{\frac{\lambda}{p}} [u]_{p,\lambda}$

Mając teraz $0 < r \leq s \leq \operatorname{diam} \Omega$ wybieramy ciąg promieni $s_1 = s$, $s_2 = \frac{1}{2} s, \ldots, s_k = \frac{s}{2^{k-1}}, \ldots$; niech k będzie takie, że $s_k \geq r > s_{k+1}$, a więc że $\frac{r}{s} \in [2^{-k}, 2^{1-k}]$. Mamy

$|u_{x,s} - u_{x,r}| \leq |u_{x,s} - u_{x,s_{k+1}}| + |u_{x,r} - u_{x,s_{k+1}}|$

$\leq \sum_{j=1}^{k} |u_{x,s_j} - u_{x,s_{j+1}}| + |u_{x,r} - u_{x,s_{k+1}}|$

$\leq \sum_{j=1}^{k} C s_j^{-n/p} s_{j+1}^{\lambda/p} [u]_{p,\lambda} + C r^{-n/p} s_{k+1}^{\lambda/p} [u]_{p,\lambda}$

$= C [u]_{p,\lambda} \, s^{\frac{\lambda - n}{p}} \left(\sum_{j=1}^{k} 2^{(j-1)\frac{n}{p} - j\frac{\lambda}{p}} + \left(\frac{r}{s}\right)^{-\frac{n}{p}} 2^{-k\lambda/p} \right)$

$\leq C [u]_{p,\lambda} \, s^{\alpha} \underbrace{\left(1 + 2^{-n/p} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j\alpha} \right)}_{\text{stała}} = \tilde{C} [u]_{p,\lambda} \, s^{\alpha}$ $\square$.

Dowód Lematu 2

Niech $x, y \in \Omega$, $|x-y| = R$. Dla dowolnego $z \in \widetilde{B}(x,2R) \cap \widetilde{B}(y,2R)$ mamy

$$|u_{x,2R} - u_{y,2R}| \le |u_{x,2R} - u(z)| + |u_{y,2R} - u(z)|,$$

więc

$$|u_{x,2R} - u_{y,2R}| = \fint_{\widetilde{B}(x,2R)\cap\widetilde{B}(y,2R)} |u_{x,2R} - u_{y,2R}| \le \fint_{\widetilde{B}(x,2R)\cap\widetilde{B}(y,2R)} |u_{x,2R} - u(z)| +$$

$$+ \fint_{\widetilde{B}(x,2R)\cap\widetilde{B}(y,2R)} |u_{y,2R} - u(z)| = I_1 + I_2.$$

Zauważmy, że $\widetilde{B}(x,R) \subset \widetilde{B}(x,2R) \cap \widetilde{B}(y,2R) \subset \widetilde{B}(x,2R)$,

więc

$$I_1 = \fint_{\widetilde{B}(x,2R)\cap\widetilde{B}(y,2R)} |u(z) - u_{x,2R}| \le \frac{1}{|\widetilde{B}(x,R)|} \int_{\widetilde{B}(x,2R)} |u(z) - u_{x,2R}|$$

$$\le C(A,n) R^{-n} \int_{\widetilde{B}(x,2R)} |u(z) - u_{x,2R}| \le \widetilde{C}(A,n) \fint_{\widetilde{B}(x,2R)} |u(z) - u_{x,2R}|$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\le} C \left(\fint_{\widetilde{B}(x,2R)} |u(z) - u_{x,2R}|^p \right)^{1/p} \le$$

$$\le C(A,n,\lambda,p) R^{\frac{\lambda-n}{p}} \left((2R)^{-\lambda} \int_{\widetilde{B}(x,2R)} |u(z) - u_{x,2R}|^p \right)^{1/p}$$

$$\le C(A,n,\lambda,p) R^{\alpha} [u]_{p,\lambda}.$$

Tak samo szacujemy I_2, co w sumie daje teza. □

Nierówności Gagliardo – Nirenberga

W zastosowaniach prócz nier. Sobolewa duże znaczenie mają nierówności, w których pewne normy ~~Sobolewa szacujemy~~ Lebesgue'a pochodnych szacujemy nie przez normy Lebesgue'a funkcji czy innych jej pochodnych (jak w nier. Poincaré czy Sobolewa), ale przez iloczyny tych ~~po~~ norm. Nierówności takie obejmujemy wspólną nazwą nier. typu G.-N.

Najprostszy przykład:

niech $u \in C_0^\infty(\cancel{\mathbb{R}^n}\ \Omega)$, wtedy

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla u, \nabla u \rangle = -\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \cdot u$$

$$\Rightarrow \|\nabla u\|_{L^2}^2 \overset{H.}{\leq} \|\Delta u\|_2 \cdot \|u\|_2 \leq \|D^2 u\|_2 \|u\|_2$$

albo też $\leq \|\Delta u\|_p \|u\|_q \leq \|D^2 u\|_p \|u\|_q \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

w szczególności

$$\|\nabla u\|_2^2 \leq \|D^2 u\|_{1} \|u\|_\infty$$

~~Wtedy~~ i oczywiście nier. te zachodzą, przez gęstość, na $W_0^{2,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, ~~W~~ szczeg.

dla $u \in W_0^{2,1}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) = W^{2,1}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$

mamy $\quad \|\nabla u\|_2^2 \leq \|D^2 u\|_1 \|u\|_\infty$

<u>Wniosek</u>: Dla $n > 2$ wiemy z nier. Sobolewa, że $u \in W^{2,1}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \cancel{D^2 u \in L^1(\mathbb{R}^n)}$

$$\Rightarrow \nabla u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla u \in L^{n/n-1}(\mathbb{R}^n)$$

i $n/n-1 < 2$. Jeżeli jednak dodatkowo wiemy, że $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, to $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$L^\infty \cap W^{2,1}(\mathbb{R}^n) \subset W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$$

Ogólniej możemy tak: <u>Tw</u>.

Niech $1 \leq p \leq k$, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Wówczas $\quad \|D_j u\|_{2k/p}^2 \leq C \|u\|_{2k/p-1} \|D_j^2 u\|_{2k/p+1}$

<u>Dowód</u>: Oznaczmy $q = 2k/p$. Dla $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$D_j(v|v|^{q-2}) = (q-1)|v|^{q-2} D_j v \quad \text{(rachunek)}.$$

Wstawmy $v = D_j u$

$$|D_j u|^q = D_j u \cdot D_j u \cdot |D_j u|^{q-2} = D_j(u D_j u |D_j u|^{q-2}) -$$
$$- u D_j(D_j u |D_j u|^{q-2}) =$$

$= D_j(\cancel{u|D_j u|} \, u D_j u \, |D_j u|^{q-2}) - (q-1) u |D_j u|^{q-2} D_j^2 u.$

Całkując po $\mathbb{R}^n$ dostajemy

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D_j u|^q = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} D_j(u D_j u \, |D_j u|^{q-2})}_{=0, \text{ bo } u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)} - (q-1) \int u |D_j u|^{q-2} D_j^2 u$$

$$\underset{\text{Hölder}\left(\frac{2k}{p-1}, \frac{q}{q-2}, \frac{2k}{p+1}\right)}{\leq} (q-1) \|u\|_{\frac{2k}{p-1}} \|D_j u\|_q^{q-2} \|D_j^2 u\|_{\frac{2k}{p+1}}$$

$q = \frac{2k}{p}$

co po podzieleniu przez to daje teza.

W szczególności

$\|D_j u\|_{2k}^2 \leq C \|u\|_\infty \|D_j^2 u\|_k$ i to samo działa dla $u \in W^{2,k} \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$

~~Wniosek~~

$u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \nabla u \in W^{1,2} \Rightarrow u \in L^{\frac{2n}{n-2}}$

$n > 4$

$\nabla u \in L^{\frac{2n}{n-2}}$

$\Downarrow$ $u \in W^{1, 2n/n-2} \Rightarrow$ ~~$u \in$~~ L

$\Downarrow$

$u \in L^{\frac{n \cdot \frac{2n}{n-2}}{n - 2n/n-2}} = L^{2n/n-4}$

i w ogólności nie ma szans, by $u \in L^\infty$ czy też $\nabla u \in L^4$.

$2n/n-4 < \infty$, $2n/n-2 < 4$

Ale jeżeli wiemy, że $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$,

to $\nabla u \in L^4(\mathbb{R}^n)$ i $\|\nabla u\|_4^2 \le \|u\|_\infty \|D^2 u\|_2$,

więc $L^\infty \cap W^{2,2}(\mathbb{R}^n) \subset W^{1,4}(\mathbb{R}^n)$.