Zdefiniowaliśmy przestrzenie

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{D}'(\Omega) : \forall_{\alpha : |\alpha| \le k} \; D^\alpha f \in L^p \right\}$$

$$BL^{k,p}(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{D}'(\Omega) : \forall_{\alpha : |\alpha| = k} \; D^\alpha f \in L^p \right\}$$

i $\quad \mathring{W}^{k,p}(\Omega) = BL^{k,p} \cap L^p(\Omega)$

Na ćwiczeniach widzieli Państwo przykłady, że nawet na obszarach Ω ograniczonych mogą to być różne przestrzenie.

Jeżeli jednak na Ω spełniona jest <u>nierówność Poincaré</u>:

$$\forall_{u \in BL^{k,p}(\Omega)} \; \exists_{\substack{\text{wielomian } P \\ \text{stopnia } \le k-1}} \quad \sum_{0 \le |\alpha| \le k-1} \|D^\alpha (u-P)\|_{p} \le C \sum_{|\alpha| = k} \|D^\alpha u\|_p$$

$$\left(C \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha (u-P)\|_p \right)$$

i obszar Ω jest ograniczony (a w każdym razie ma miarę wygasającą w pobliżu ∞ na tyle szybko, by wielomiany stopnia $\le k-1$ były na Ω całkowalne - <u>pytanie</u>: czy wystarczy, by $|\Omega| < \infty$?)

to $P \in W^{k,p}(\Omega)$ i z nier. Poincaré wynika, że $u \in BL^{k,p}(\Omega) \Rightarrow u - P \in W^{k,p}(\Omega) \Rightarrow u \in W^{k,p}(\Omega)$.

__Uwaga__: Nierówność Poincaré wystarczy wykazać dla $k=1$: $\forall_{u \in BL^{1,p}(\Omega)} \ \exists_{a \in \mathbb{R}} \quad \|u-a\|_p \leq C \|\nabla u\|_p$

i dalej dowodzić przez indukcję po k.

__Lemat__: $\forall_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}$

$$\underbrace{u(x) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\langle x-y, \nabla u(y) \rangle}{|x-y|^n}\, dy}_{\text{reprezentacja całkowa funkcji gładkiej.}}$$

$C_c^\infty = C_0^\infty$

__Dowód__: Ustalmy $s \in \mathbb{S}^{n-1}$ ← sfera jednostkowa.

Wówczas $u(x) = -\int_0^\infty \frac{d}{dt} u(x+ts)\, dt = -\int_0^\infty \langle \nabla u(x+ts), s \rangle\, dt$

dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$

$$= -\frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|_{(n-1)}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty \langle \nabla u(x+ts), s \rangle\, dt\, ds$$

$(n-1)$-wymiarowa miara (powierzchniowa = Hausdorffa) $\mathbb{S}^{n-1}$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} -\frac{1}{n\omega_n} \int_0^\infty t^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\langle s, \nabla u(x+ts) \rangle}{t^{n-1}}\, ds\, dt =$$

współrzędne biegunowe
$$\begin{cases} t^{n-1}\, ds\, dt = dy \\ y = x+ts \\ t = |x-y| \\ s = \frac{y-x}{|y-x|} \end{cases}$$

$$= -\frac{1}{n\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left\langle \frac{y-x}{|y-x|}, \nabla u(y) \right\rangle}{|x-y|^{n-1}}\, dy =$$

$$= -\frac{1}{n\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\langle y-x, \nabla u(y) \rangle}{|x-y|^n}\, dy$$

Def: Potencjałem (lub operatorem) Riesza I_α rzędu α, $0<\alpha<n$, nazywamy operator, który funkcji $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ przypisuje funkcję

$$I_\alpha f(x) = C_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy \;, \quad \text{gdzie}$$

$$C_\alpha = \left(\pi^{n/2} \cdot 2^\alpha \frac{\Gamma(\alpha/2)}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)} \right)^{-1} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{mało istotna} \\ \text{stała}\end{array}\right)$$

innymi słowy, $I_\alpha f = f * \underbrace{\left(C_\alpha \frac{1}{|x|^{n-\alpha}} \right)}_{\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)}$

cyli to jest dystryb. regularna.

To pozwala zdefiniować potencjał Riesza dla dowolnej dystrybucji $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ o nośniku zwartym.

O potencjałach Riesza jeszcze sporo usłyszymy.

Na razie kluczowy wniosek z Lematu:

<u>Wniosek</u> Jeżeli $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, to $\forall_{x \in \mathbb{R}^n}$

$$|u(x)| \leq \frac{1}{n\omega_n C_1} I_1(|\nabla u|)(x)$$

$$= \frac{1}{n\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\, dy \,.$$

Dowód jest oczywisty.

Co stąd wynika dla funkcji z klasy Sobolewa?

Udowodnijmy najpierw odpowiednik naszego wniosku dla funkcji określonych na kuli B.

<u>Lemat</u>: Istnieje $C = C(n)$ t.ż. dla dowolnej kuli $B \subset \mathbb{R}^n$ i $u \in C^\infty(B)$ mamy

$$|u(x) - u_B| \le C(n) \int_B \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}} \, dy$$

dla wszystkich $x \in B$, gdzie $u_B = \fint_B u = \frac{1}{|B|}\int_B u$.

<u>Dowód</u>: Prawie to samo, co poprzednio, tylko trochę staranniej i ostrożniej! Ustalmy $x \in B$. Każdy inny punkt $y \in B$ możemy zapisać jako

$$y = x + t\frac{y-x}{|y-x|} = x + t\lambda, \quad \text{gdzie } \lambda \in \mathbb{S}^{n-1}$$

Niech $\delta(\lambda) = \sup\{t > 0 : x + t\lambda \in B\}$. Mamy

$$u(x) - u(y) = \int_0^{|y-x|} \frac{d}{ds} u(x+s\lambda)\, ds = \int_0^{|y-x|} \langle \nabla u(x+s\lambda), \lambda \rangle \, ds,$$

więc
$$|u(x)-u(y)| \le \underbrace{\int_0^{|y-x|} |\nabla u(x+s\lambda)|\, ds \le \int_0^{\delta(\lambda)} |\nabla u(x+s\lambda)|\, ds}_{\text{oszacowanie } \star}$$

Dalej,

$$|u(x) - u_B| = \left| \fint_B (u(x) - u(y))\,dy \right| \leq \fint_B |u(x) - u(y)|\,dy$$

$$= \frac{1}{|B|} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x) - u(y)|\, \chi_B(y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{|B|} \int_0^\infty t^{n-1} \int_{S^{n-1}} |u(x) - u(x+t\lambda)|\, \chi_B(x+t\lambda)\,d\lambda\,dt$$

$$= \frac{1}{|B|} \int_{S^{n-1}} \int_0^{\delta(\lambda)} t^{n-1} \underbrace{|u(x) - u(\underbrace{x+t\lambda}_{=y})|}_{\text{to oszacujemy przy pomocy } \star}\,dt\,d\lambda$$

$$\leq \frac{1}{|B|} \int_{S^{n-1}} \int_0^{\delta(\lambda)} t^{n-1} \int_0^{\delta(\lambda)} |\nabla u(x+s\lambda)|\,ds\,dt\,d\lambda$$

$$\leq \frac{1}{|B|} \int_{S^{n-1}} \underbrace{\left(\int_0^{2r} t^{n-1}\,dt \right)}_{= C(n)\cdot|B|} \int_0^{\delta(\lambda)} |\nabla u(x+s\lambda)|\,ds\,d\lambda =$$

$2r \leftarrow$ promień kuli B

$$= C(n) \int_{S^{n-1}} \int_0^{\delta(\lambda)} \frac{|\nabla u(x+s\lambda)|}{s^{n-1}}\, s^{n-1}\,ds\,d\lambda = C(n) \int_B \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy$$

$\square$.

Punkty $x + s\lambda$, $s \in S^{n-1}$, $\lambda \in [0, \delta(\lambda)]$, przebiegają B.

Przypomnijmy wykazane na ćwiczeniach

<u>Twierdzenie</u> (Meyers, Serrin)

Dla każdego otwartego $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $C^\infty(\Omega)$ jest gęste w $W^{k,p}(\Omega)$.

<u>Zadanie</u>: Wykazać, że dla $p = \infty$ powyższe twierdzenie nie zachodzi.

Potrzebny nam będzie też prosty lemat:

<u>Lemat</u>: Istnieje $C = C(n)$ t.ż dla każdego mierzalnego $E \subset \mathbb{R}^n$ zachodzi $\int_E \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} \leq C(n)|E|^{1/n}$.

<u>Dowód</u>: Lemat jest oczywisty, gdy $|E| = 0$ lub $|E| = +\infty$.

Dalej więc zakładamy, że $|E| \in (0, \infty)$.

Niech $B = B(x,r)$ będzie kulą t.ż $|B| = |E|$;

wtedy $|E| = \omega_n r^n$.

$$\int_E \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} = \int_{E\cap B} \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} + \int_{E\setminus B} \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} \leq \int_B \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} + \int_{E\setminus B} \frac{dy}{r^{n-1}} \leq$$

$$\leq \int_{S^{n-1}} \int_0^r \frac{s^{n-1}\, d\xi\, ds}{s^{n-1}} + \frac{1}{r^{n-1}} \cdot |E| = n\omega_n r + \omega_n r =$$

$$= (n+1)\,\omega_n^{\frac{n-1}{n}} |E|^{1/n}$$

<u>Twierdzenie</u> Dla każdego $u \in W^{1,1}(B)$ nierówność

$$|u(x) - u_B| \leq C(n) \int_B \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\, dy$$

zachodzi dla p.w. $x \in B$.

<u>Dowód</u>

Rozważmy ciąg $u_k \in C^\infty(B)$, $k = 1, 2, \ldots$, taki, że $u_k \to u$ w $W^{1,1}(B)$

(czyli $u_k \to u$ w $L^1(B)$, $\nabla u_k \to \nabla u$ w $L^1(B, \mathbb{R}^n)$)

zauważmy, że

$$|(u_k)_B - u_B| = \frac{1}{|B|} \left| \int_B (u_k - u) \right| \leq \frac{1}{|B|} \underbrace{\|u_k - u\|_1}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0}$$

więc $(u_k)_B \to u_B$ przy $k \to \infty$.

Stąd $u_k - (u_k)_B \longrightarrow u - u_B$ w $L^1(B)$,

więc, dzięki tw. Riesza-Fischera, istnieje podciąg (u_{k_l}) t. że $u_{k_l} - (u_{k_l})_B \longrightarrow u - u_B$ p.w. w B.

Dla uproszczenia notacji będę dalej zakładał, że to (u_k) ma tę własność.

Zdefiniujmy teraz <u>lokalny potencjał Riesza</u>.

To operator

$$I_\alpha^B f(x) = \int_B \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy$$

dla uproszczenia odpuścimy sobie stałą

(ogólniej w miejsce B można wstawić obszar ograniczony Ω).

<u>Lemat</u> I_1^B jest operatorem liniowym ciągłym z $L^1(B)$ w siebie.

Dowód: Liniowość I_1^B nie ulega wątpliwości.

Teraz, dla $g \in L^1(B)$ mamy

$$\|I_1^B g\|_1 = \int_B \left| \int_B \frac{g(y)}{|x-y|^{n-1}} dy \right| dx \leq \int_B \int_B \frac{|g(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy\, dx$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_B |g(y)| \int_B \frac{dx}{|x-y|^{n-1}} \overset{\text{Zadanie}}{\leq} C(n) \cdot |B|^{1/n} \|g\|_1$$

więc I_1^B jest ograniczony $\Rightarrow$ jest ciągły. $\square$

Oczywiście taki sam lemat zachodzi dla każdego Ω z $|\Omega| < \infty$ w miejsce B.

Mamy dla każdego k i każdego $x \in B$

$$(*) \quad |u_k(x) - (u_k)_B| \leq C(n) \int_B \frac{|\nabla u_k(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy = C(n) I_1^B(|\nabla u_k|)(x)$$

Wiemy, że $\nabla u_k \to \nabla u$ w L^1 $\Rightarrow |\nabla u_k| \to |\nabla u|$ w L^1

$\Rightarrow I_1^B(|\nabla u_k|) \longrightarrow I_1^B(|\nabla u|)$ w L^1

$\Rightarrow$ istnieje podciąg (k_l) t.ż. $I_1^B(|\nabla u_{k_l}|)(x) \to I_1^B(|\nabla u|)(x)$ dla p.w. $x \in B$

Wypisując więc $(*)$ dla k_l w miejsce k i przechodząc z l do ∞ dostajemy tezę twierdzenia.

$\square$.

Zadanie: Udowodnić następujące uogólnienia:

1. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie ograniczony, otwarty i wypukły i niech $S \subset \Omega$ będzie mierzalny, $|S| > 0$.

Wówczas dla każdego $u \in W^{1,1}(\Omega)$ zachodzi, dla p.w. $x \in \Omega$, nierówność

$$|u(x) - u_S| \leq \frac{(\operatorname{diam}\Omega)^n}{|S|} \cdot C(n) \int_\Omega \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\, dy .$$

2. Mówimy, że obszar (tzn. zbiór otwarty, spójny, ograniczony) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest gwiaździsty względem $x \in \Omega$, gdy każda półprosta o końcu w x przecina $\partial\Omega$ w dokładnie jednym punkcie.

Obszar Ω jest gwiaździsty wzgl. $A \subset \Omega$, gdy jest gwiaździsty wzgl wszystkich $x \in A$.

Wykaż, że gdy Ω jest gwiaździsty wzgl. kuli $B \subset \Omega$, to $\forall_{u \in W^{1,1}(\Omega)}$ i p.w. $x \in \Omega$

$$|u(x) - u_B| \leq C(n) \frac{(\operatorname{diam}\Omega)^n}{|B|} \int_\Omega \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\, dy$$

Wzmocnijmy jeszcze trochę lemat o lokalnym potencjale Riesza:

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwarty, $|\Omega| < \infty$.

Lemat: I_1^Ω jest ograniczony z $L^p(\Omega)$ w $L^p(\Omega)$ i zachodzi nierówność

$$\|I_1^\Omega(g)\|_p \leq C(n,p)\, |\Omega|^{1/n} \|g\|_p \qquad \forall_{g \in L^p(\Omega)}$$

Dowód Niech $g \in L^p(\Omega)$.

$$\|I_1^\Omega(g)\|_p^p = \int_\Omega \Big| \int_\Omega \frac{g(y)}{|x-y|^{n-1}}\, dy \Big|^p dx =$$

$$= \int_\Omega \Big| \int_\Omega \frac{g(y)}{|x-y|^{\frac{n-1}{p}}} \cdot \frac{1}{|x-y|^{(n-1)\frac{p-1}{p}}}\, dy \Big|^p dx$$

$$\overset{H}{\leq} \int_\Omega \Big| \Big(\int_\Omega \frac{|g(y)|^p}{|x-y|^{n-1}}\, dy \Big)^{1/p} \cdot \Big(\int_\Omega \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} \Big)^{\frac{p-1}{p}} \Big|^p dx$$

$$\leq \int_\Omega |I_1(|g|^p)(x)| \cdot \left(C(n) |\Omega|^{1/n} \right)^{p-1} dx$$

$$\leq C(n,p) |\Omega|^{1/n} \, \| |g|^p \|_1 \cdot |\Omega|^{\frac{p-1}{n}} = C(n,p) |\Omega|^{\frac{p}{n}} \|g\|_p^p,$$

skąd $\|I_1^\Omega(g)\|_p \leq C(n,p) |\Omega|^{1/n} \|g\|_p$ $\square$.

Stąd od razu dostajemy nierówność Poincaré dla kuli:

Twierdzenie: Niech $B = B(x_0, r)$ będzie kulą w $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$. Wówczas istnieje $C(n,p)$ - stała t.że

$$\|u - u_B\|_p \leq C(n,p) \cdot r \cdot \|\nabla u\|_p \quad \text{dla wszystkich } u \in W^{1,p}(B).$$

Dowód:

$|u(x) - u_B| \leq C(n) \cdot I_1^B(|\nabla u|)(x)$, więc

$$\|u - u_B\|_p \leq C(n) \|I_1^B(|\nabla u|)\|_p \leq \tilde{C}(n,p) \underbrace{|B|^{1/n}}_{\omega_n^{1/n} r} \|\nabla u\|_p$$

$\square$

<u>Zadanie</u>: Wykazać twierdzenie dla $p=\infty$

<u>Wskazówka</u>: Udowodnić, że $I_1^\Omega : L^\infty(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$ jest ograniczony

Takie podejście z reguły wystarcza – i nasze rozważania dla kuli łatwo można rozszerzyć na inne klasy zbiorów, dla których mamy odpowiednie oszacowanie $u-u_B$ przez potencjał Riesza. Czasem jednak zależy nam na staranniejszej kontroli nad stałymi (w szczególności nad tym, jak zależą od p); (choć ustalone przez nas stałe nie są optymalne i w ogóle problem optymalnej stałej w nier. Poincaré jest, poza pewnymi szczególnymi przypadkami nierozstrzygnięty i bardzo trudny).

W zastosowaniach bardzo przydatna bywa poniższa postać nierówności Poincaré:

<u>Twierdzenie</u>: Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwarty, ograniczony, wypukły i środkowo-symetryczny i niech $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Wtedy dla każdego $S \subset \Omega$, $|S|>0$ zachodzi $\boxed{1 \le p < \infty}$

$$\int_\Omega |u-u_S|^p \le 2^n (\operatorname{diam}\Omega)^p \frac{|\Omega|}{|S|} \int_\Omega |\nabla u|^p$$

Jej dowód jest zaskakująco prosty i bezpośredni

Dowód:

Krok 1: Uproszczenia:

- Obie strony nierówności są niewrażliwe na przesunięcia, więc możemy założyć, że Ω jest symetryczny względem zera.

- wystarczy wykazać nierówność dla $f \in C^\infty(\Omega)$ i dalej skorzystać z tw. Meyersa-Serrina, bo obie strony nierówności są ciągłe względem $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$.

Krok 2 Jak poprzednio, $u(x)-u(y) = \int_0^1 \langle \nabla u(y+t(x-y)), x-y \rangle \, dt$,

więc

$$|u(x)-u_S| = \left| \fint_S (u(x)-u(y))\,dy \right| \leq \fint_S |u(x)-u(y)|\,dy \leq$$

$$\leq \fint_S \int_0^1 |\nabla u(y+t(x-y))|\,|x-y|\,dt\,dy \leq$$

Fubini

$$\leq \operatorname{diam}\Omega \int_0^1 \fint_S |\nabla u(y+t(x-y))\,dy\,dt, \quad \text{więc}$$

$$|u(x)-u_S|^p \overset{H}{\leq} (\operatorname{diam}\Omega)^p \int_0^1 \fint_S |\nabla u(y+t(x-y))|^p\,dy\,dt$$

Nier. Höldera: $\left(\fint_A f\right)^p \leq \fint_A f^p$

$$\int_\Omega |u(x)-u_S|^p\,dx \leq \frac{(\operatorname{diam}\Omega)^p}{|S|} \int_0^1 \int_{\Omega\times S} |\nabla u(y+t(x-y))|^p\,dx\,dy\,dt$$

Zmieniamy zmienne: $(x,y) \to (\xi, \zeta)$

$\xi = y + t(x-y) \in \Omega$, $\zeta = y - x \in \Omega - \Omega = 2\Omega$

Jakobian zamiany zmiennych: $\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} t & 1-t \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{to ma wyzn. } 1.} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

więc $\displaystyle\int_\Omega |u - u_S|^p dx \le \frac{(\operatorname{diam}\Omega)^p}{|S|} \int_0^1 \int_{\Omega \times 2\Omega} |\nabla u(\xi)|^p d\xi \, d\zeta \, dt$

$$= \frac{(\operatorname{diam}\Omega)^p}{|S|} \cdot |2\Omega| \int_\Omega |\nabla u(\xi)|^p d\xi$$

$$= \frac{(\operatorname{diam}\Omega)^p \cdot 2^n |\Omega|}{|S|} \int_\Omega |\nabla u|^p .$$

$\square$.

<u>Zadanie</u>: Wykaż, że, przy powyższych założeniach na Ω i S, jeżeli $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, to

$$\|u - u_S\|_\infty \le \operatorname{diam}\Omega \cdot \|\nabla u\|_\infty .$$

Korzystając z naszego pierwszego podejścia i zadania o zbiorach gwiaździstych wzgl. kuli łatwo możemy udowodnić i dla nich nierówność Poincaré: jeżeli Ω jest obszarem gwiaździstym wzgl. kuli B, to

$$\|u - u_B\|_p \le C(n, p, \Omega, B) \|\nabla u\|_p$$

Dość ogólną klasę obszarów, dla których umiemy wykazać nier. Poincaré (a co za tym idzie, że $BL^{1,p} = \mathring{W}^{1,p} = W^{1,p}$) to tzw. obszary z własnością stożka wewnętrznego:

<u>Def</u>: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otwarty (ograniczony) ma własność stożka wewnętrznego, jeżeli istnieją $\alpha, \beta > 0$ tż. dla każdego $x \in \Omega$ istnieje stożek C_x o wierzchołku w x, izometryczny z $C_{\alpha,\beta} = \{x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \leq \alpha x_n^2,\ 0 \leq x_n \leq \beta\}$, tż. $C_x \subset \Omega$.

Okazuje się, że takie Ω można rozłożyć na skończenie wiele obszarów gwiaździstych wzgl. pewnych kul zawartych w Ω; wypisujemy n. Poincaré dla każdego z nich i dodajemy stronami.

Więcej szczegółów w moich starych notatkach i w książce „Sobolev Spaces" V. Maz'yi.

Kilka słów o analizo-funkcjonalnych własnościach przestrzeni Sobolewa.

Przestrzenie Sobolewa $W^{1,p}(\Omega)$ są, dla $1 \le p \le \infty$, przestrzeniami Banacha. Można to udowodnić wprost, w dużej mierze powtarzając dowód tw. Riesza-Fischera, ale można się też wykpić:

<u>Obserwacja</u>: Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwarty

$$\begin{array}{ccc} W^{1,p}(\Omega) & & L^p(\Omega) \times L^p(\Omega, \mathbb{R}^n) \simeq \left(L^p(\Omega)\right)^{n+1} \\ \Psi & & \Psi \\ u & \longmapsto & (u, \nabla u) \end{array}$$

jest ciągłym włożeniem $W^{1,p}(\Omega)$ w $\left(L^p(\Omega)\right)^{n+1}$
(a nawet izometrycznym, jeżeli dobierzemy odp. normę tu)

<u>Zadanie</u>: Obraz tego włożenia jest domkniętą podprzestrzenią liniową przestrzeni $\left(L^p(\Omega)\right)^{n+1}$

<u>Wniosek</u>: $W^{1,p}(\Omega)$, jako domknięta podprzestrzeń przestrzeni Banacha $\left(L^p(\Omega)\right)^{n+1}$, jest przestrzenią zupełną, jest więc przestrzenią Banacha.

Ten sam trik pozwala wykazać inne własności $W^{1,p}$:

~~Defn~~ Dla każdej przestrzeni liniowo-topologicznej X mamy włożenie $X \overset{i}{\hookrightarrow} X^{**}$ dane przez

$i(x) = \hat{x}$, gdzie $\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$ (obrazem punktu x jest funkcjonał liniowy na przestrzeni funkcjonałów na X, polegający na ewaluacji $\varphi \in X^*$ w punkcie x).

Jeżeli X jest przestrzenią Banacha, to $i : X \hookrightarrow i(X)$ jest izometrią; gdy $i(X) = X^{**}$, mówimy, że X jest <u>przestrzenią refleksywną</u> (<u>uwaga</u>: to więcej, niż wynikająca stąd własność $X^{**} \simeq X$)

Przestrzenie $L^p(\Omega)$ są refleksywne dla $1 < p < \infty$ i domknięte podprzestrzenie przestrzeni refleksywnych są przestrzeniami refleksywnymi. Stąd $W^{1,p}(\Omega)$ jest refleksywna dla $1 < p < \infty$.

(analogiczne twierdzenia zachodzą dla $W^{k,p}(\Omega)$, $k > 1$).

Z tw. Meyersa-Serrina wiemy, że dla dowolnego otwartego $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ przestrzeń $C^\infty \cap W^{k,p}(\Omega)$ jest gęsta w $W^{k,p}(\Omega)$. Oczywiście $C^\infty \cap W^{k,p}(\Omega)$ jest ośrodkowa (w normie $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$), $\leftarrow$ dlaczego? więc również $W^{k,p}(\Omega)$ jest ośrodkowa.