Przestrzeń dualna do $L^p(X)$ (za Naski Shioji)

<u>Def</u>: Mówimy, że przestrzeń Banacha F jest jednostajnie wypukła, gdy $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{u,v\in F}$ jeżeli $\|u\|=\|v\|=1$, $\|u-v\|\geq\varepsilon$ to $\|\frac{u+v}{2}\|\leq 1-\delta$

<u>Zadanko</u>: ani $L^1(\mathbb{R}^n)$, ani $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ nie są jednost. wypukłe.

<u>Lemat 1</u> Niech $1<p<\infty$. Dla każdego $c>0$ i $\varepsilon>0$ istnieje $\delta>0$ takie, że jeżeli $\|u\|_p, \|v\|_p\leq c$ oraz $\|u-v\|_p\geq\varepsilon$, to

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^p \leq \frac{\|u\|_p^p+\|v\|_p^p}{2}-\delta$$

W szczególności $(c=1)$ $L^p(X)$ jest jednostajnie wypukła.

<u>Dowód</u>:

Przyjrzyjmy się funkcji $\alpha:\mathbb{R}^2\to[0,\infty)$,

$$\alpha(x,y)=\frac{|x|^p+|y|^p}{2}-\left|\frac{x+y}{2}\right|^p.$$

Z wypukłości $x\longmapsto|x|^p$ mamy, że $\alpha(x,y)>0$ o ile tylko $x\neq y$.

Ustalmy c i ε i niech $0<\eta<\frac{\varepsilon^p}{4c^p}$

Zbiór $D=\{(x,y): |x|^p+|y|^p=1,\ |x-y|^p\geq\eta\}$ jest zwarty, więc $\theta=\inf\{\alpha(z): z\in D\}>0$.

Dla dowolnych x, y niech $z = \frac{x}{(|x|^p + |y|^p)^{1/p}}$,

$w = \frac{y}{(|x|^p + |y|^p)^{1/p}}$, wtedy $|z|^p + |w|^p = 1$;

warunek $|z-w|^p \geq \eta$ tłumaczy się na

$|x-y|^p \geq \eta(|x|^p + |y|^p)$.

Stąd ~~jeżeli $|x-y|^p \geq \eta(|x|^p+|y|^p)$~~

~~to~~ $\frac{\alpha(x,y)}{|x|^p+|y|^p} = \alpha(z,w) \geq \alpha$, więc

$$\underline{|x|^p + |y|^p \leq \frac{\alpha(x,y)}{\theta}}.$$

Niech teraz $u, v \in L^p(X)$, $\|u\|_p \leq c$, $\|v\|_p \leq c$

$\|u-v\|_p \geq \varepsilon$; oznaczmy $M = \{x \in X : |u(x) - v(x)|^p \geq$
$\geq \eta(|u(x)|^p + |v(x)|^p)\}$

Wtedy

$$\varepsilon^p \leq \int_X |u-v|^p = \int_M |u-v|^p + \int_{X\setminus M} |u-v|^p = 2^p \int_M \left|\frac{u-v}{2}\right|^p +$$

$$+ \eta \int_{X\setminus M} (|u|^p + |v|^p) \leq 2^p \int_M \frac{|u|^p+|v|^p}{2} + 2\eta c^p$$

$$\leq \frac{2^{p-1}}{\theta} \int_M \alpha(u,v) + \frac{\varepsilon^p}{2} = \frac{2^{p-1}}{\theta}\left(\frac{\|u\|_p^p + \|v\|_p^p}{2} - \left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^p\right) + \frac{\varepsilon^p}{2},$$

więc $$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^p \leq \frac{\|u\|_p^p + \|v\|_p^p}{2} - \frac{\varepsilon^p \theta}{2^{p-2}} = \delta \quad \square.$$

Jeżeli teraz $1 \le p < \infty$, to dla $q = \begin{cases} \infty & p=1 \\ \frac{p}{p-1} & p>1 \end{cases}$

mamy przekształcenie liniowe

$\Phi : L^q(X) \longrightarrow (L^p(X))^*$ ← przestrzeń funkcjonałów liniowych ciągłych

$$\Phi(u)v = \int_X uv \qquad \text{dla } u \in L^q \;\; v \in L^p;$$

z nier. Höldera od razu widzimy, że

Φ jest ciągłe, ~~oraz~~ $\|\Phi(u)\|_{L^p(X)^*} =$

$= \sup_{\|v\|_p \le 1} |\Phi(u)v| \le \|u\|_q$.

<u>Prościutkie zadanko</u>: Wykazać, że $\|\Phi(u)\|_{L^p(X)^*} = \|u\|$ cyli że Φ jest izometrią.

<u>Twierdzenie</u> Jeżeli $1 < p < \infty$, to Φ jest izometrycznym izomorfizmem, więc $L^p(X)^* \simeq L^q(X)$

(tw. Riesza o reprezentacji)

<u>Dowód</u>:

Wystarczy wykazać, że Φ jest surjekcją (jako liniowa izometria jest różnowartościowe).

Niech $g \in L^p(X)^*$. Rozważmy funkcjonał na $L^p(X)$,

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_X |u|^p - g(u) \qquad \text{dla } u \in L^p(X)$$

Dla każdego $u \in L^p$ $\;I(u) \ge \frac{1}{p}\|u\|_p^p - \underbrace{\|g\|}_{\text{norma w } (L^p)^*}\cdot\|u\|_p$;

funkcja $t \mapsto \frac{t^p}{p} - \|g\|t$ ma na $[0,\infty)$ minimum

w $t = \|g\|^{\frac{1}{p-1}}$, równe $\frac{1-p}{p}\|g\|^{\frac{p}{p-1}} =: M$

więc $I(u) \geq m \geq M > -\infty$, gdzie $m = \inf_{L^p} I$.

Lemat: I ma dokładnie jedno minimum, tzn. $\exists! \, v \in L^p$ tż $I(v) = m$.

Dowód: niech $C_n = \left\{ u \in L^p : I(u) \leq m + \frac{1}{n} \right\}$

Zbiory C_n są niepuste, domknięte, $C_1 \supset C_2 \supset \dots$

Wykażemy, że $\operatorname{diam} C_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Oznaczmy $c = \sup\{ \|u\|_p : u \in C_1 \}$,

na C_1 $\quad I(u) = \frac{\|u\|_p^p}{p} - g(u) \leq m+1$

$$I(u) \geq \frac{\|u\|_p^p}{p} - \|g\| \cdot \|u\|_p,$$ skąd odrazu wynika, że $c < \infty$.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z Lematu 1 istnieje $\delta > 0$ tż. jeżeli $\|u\|_p, \|v\|_p \leq c$, $\|u-v\|_p \geq \varepsilon$, to $\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_p^p \overset{(*)}{\leq} \frac{\|u\|_p + \|v\|_p}{2} - \delta$, ale jeżeli n jest tak duże, by $\frac{p}{n} < \delta$, to dla $u, v \in C_n \subset C_1$ mamy

$\|u\|_p, \|v\|_p \leq c$, $I(u) \leq m + \frac{1}{n}$, $I(v) \leq m + \frac{1}{n}$

oraz $I\left(\frac{u+v}{2}\right) \geq m$, więc

$$\delta > \frac{p}{n} = p\left(m + \frac{1}{n} - m\right) \geq p\left(\frac{I(u) + I(v)}{2} - I\left(\frac{u+v}{2}\right) \right)$$

$$= p\left(\frac{\|u\|_p^p}{2p} - \frac{g(u)}{2} + \frac{\|v\|_p^p}{2p} - \frac{g(v)}{2} - \frac{1}{p}\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_p^p + g\left(\frac{u+v}{2}\right) \right) =$$

$$= \frac{\|u\|_p^p + \|v\|_p^p}{2} - \left\| \frac{u+v}{2} \right\|_p^p,$$ co jest sprzeczne z $(*)$, o ile $\|u-v\| \geq \varepsilon$.

To dowodzi, że $\|u-v\|_p < \varepsilon$ dla $u,v \in C_n$ o ile $n > \frac{p}{\delta}$, czyli że $\operatorname{diam}_{n\to\infty} C_n \to 0$.

Z zupełności L^p i tw. Cantora $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ jest zbiorem jednopunktowym, $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \{v\}$.

w tym punkcie I osiąga minimum; $I(v) = m$. □

Dowód tw. Riesza, ciąg dalszy

Niech ~~z~~ v będzie jak w Lemacie.

Dla dowolnego $u \in L^p(X)$ zdefiniujmy

$$F_u(t) = I(v+tu) = \frac{1}{p}\int_X |v+tu|^p - g(v+tu) = \frac{1}{p}\int_X |v+tu|^p - g(v) - tg(u)$$

Wiemy, że $I(v+tu)$ przyjmuje minimum dla $t=0$, więc jeżeli tylko $F_u(t)$ jest różniczkowalne w $t=0$, to $F_u'(0) = 0$. Sprawdźmy, czy możemy F_u po prostu zróżniczkować (pod znakiem całki)

Jeżeli $f(t,x) = \frac{1}{p}|v(x)+tu(x)|^p$ dla $(t,x) \in [-T,T] \times X$,

to $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = |v(x)+tu(x)|^{p-2}(v(x)+tu(x)) \cdot u(x)$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \underset{\substack{\text{nier. Younga} \\ |ab| \le \frac{1}{q}|a|^q + \frac{1}{p}|b|^p}}{\le} \frac{1}{q}|v(x)+tu(x)|^{(p-1)\cdot q} + \frac{1}{p}|u(x)|^p$$

$$= \cancel{\le} \frac{2^p}{q}\left|\frac{v(x)+tu(x)}{2}\right|^p + \frac{1}{p}|u(x)|^p \underset{\substack{T \\ \text{wypukłość} \\ s \mapsto |s|^p}}{\le} \frac{2^p}{q}\,\frac{|v(x)|^p + T^p|u(x)|^p}{2} + \frac{1}{p}|u(x)|^p \in L^1(X)$$

więc możemy ~~wś~~ wejść z pochodną pod znak całki,

$$F_u'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,\cdot) - g(u) = \int_X |v+tu|^{p-2}(v+tu)u - g(u)$$

i z $F_u'(0)=0$ dostajemy, że

$$g(u) = \int_X |v|^{p-2} v u = \int_X w u \quad \text{gdzie } w=|v|^{p-2}v$$

Bez trudu sprawdzamy, że $w \in L^q(X)$

Stąd $g = \Phi(w)$ i Φ jest surjekcją. $\square$.

<u>Twierdzenie</u>: Jeżeli miara μ jest σ-skończona (np $\mu = \lambda_n$ na $\mathbb{R}^n$), to Φ zadaje izometrię liniową między $L^1(X)^*$ a $L^\infty(X)$.

<u>Dowód</u> Założmy na początek, że $\mu(X)<\infty$. i niech $F \in (L^1(X))^*$. Dla każdego $p \in (1,2]$ ~~mamy~~ i $u \in L^p(X)$ mamy $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$|F(u)| \leq \|F\| \cdot \|u\|_1 \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|F\| \cdot \mu(X)^{\frac{1}{q}} \|u\|_p \text{, więc}$$

F jest funkcjonałem liniowym ciągłym na $L^p(X)$.

Stąd istnieje $v_q \in L^q$ t.że. $F(u) = \int_X u \cdot v_q$ dla $\forall\, u \in L^p$.

Dla wszystkich $u \in L^2$ $(\subset L^p)$ i $1<p_1<p_2\leq 2$ mamy

$$F(u) = \int_X u v_{q_1} = \int_X u v_{q_2} \text{, więc } v_{q_1} = v_{q_2} \overset{v}{=} \mu\text{ p.w.}$$

Wykażemy, że $v \in L^\infty(X)$, $\|F\| \leq \|v\|_\infty$.

Niech $E_c = \{x \in X : v(x) \geq c\}$

$$\|v\|_q = \left(\int_X |v|^q\right)^{1/q} \geq \left(\int_{E_c} c^q\right)^{1/q} = c\mu(E_c)^{1/q}$$

Dalej, $\|v\|_q^q = \int_X |v|^q = \int_X v \cdot v|v|^{q-2} = F(v|v|^{q-2}) \leq$

$$\leq \|F\| \cdot \mu(X)^{1/q} \cdot \|v|v|^{q-2}\|_p = \|F\|\mu(X)^{1/q}\|v\|_q^{q-1}$$

więc ~~$\|v\|_q \leq$~~

$$c\,\mu(E_c)^{1/q} \leq \|F\|\,\mu(X)^{1/q} \quad \otimes$$

Jeżeli zatem $\mu(E_c) > 0$, to biorąc w $\otimes$ $p \to 1$ (czyli $q \to \infty$) dostajemy $c \leq \|F\|$. Stąd $\|v\|_\infty \leq \|F\|$, więc F jest postaci $\Phi(v)$ dla pewnego $v \in L^\infty(X) \Rightarrow \Phi$ jest surjekcją.

Gdy $\mu(X) = \infty$, to dzielimy X na kawałki o mierze skończonej, $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$; ~~niech~~ dla $F \in (L^1(X))^*$

Dla każdego i znajdujemy $w_i \in L^\infty(X_i)$ t.ż.

$F(u) = \int_{X_i} \tilde{u} w_i$ dla $\tilde{u} \in L^1(X_i)$, w szczególności dla $u \in L^1(X)$

$\int_{X_i} \chi_{X_i} u\, w_i = F(\chi_{X_i} u)$. Przedłużamy w_i zerem poza X_i; wtedy $w_i \in L^\infty(X)$; $w = \sum_{n=1}^{\infty} w_i \in L^\infty(X)$ (bo X_i rozłączne)

$$F(u) = \sum_{i=1}^{\infty} F(u \cdot \chi_{X_i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_X u w_i = \int_X u w$$

tw. Lebesgue'a o zb. zmajoryzowanej.

□