# Sploty dystrybucji z funkcją

Oznaczmy, dla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$.
Mamy wówczas, dla dowolnych $u, v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$u * v\,(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\, v(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\, \check{v}(y-x)\,dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\, \tau_x \check{v}(y)\,dy = \langle T_u, \tau_x \check{v} \rangle$$

Przez analogię, możemy zdefiniować, dla $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ i $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $(T * \varphi)(x) := \langle T, \tau_x \check{\varphi} \rangle$

Łatwo można sprawdzić (ćwiczenia), że dla $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

(1) $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

(2) $\forall_\alpha \; D^\alpha(T * \varphi) = (D^\alpha T) * \varphi = T * D^\alpha \varphi$

(3) $\tau_h (T * \varphi) = (\tau_h T) * \varphi = T * \tau_h \varphi$

**Zadanie**: Wykazać, że jeżeli $\Lambda : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ jest przekształceniem liniowym spełniającym, dla każdego wielowskaźnika $\alpha$, warunek $D^\alpha \Lambda = \Lambda D^\alpha$, to istnieje $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ t.ż. $\forall_{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \; \Lambda(\varphi) = T * \varphi$.

<u>Zadanie</u> Jeżeli $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, to

$$\langle T_{T*\varphi}, \psi \rangle = \langle T, \check{\varphi} * \psi \rangle$$

<u>Szkic rozwiązania</u>

Rozpisując powyższą równość otrzymujemy

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle T, \tau_x \check{\varphi} \rangle \psi(x)\, dx = \langle T, \int_{\mathbb{R}^n} \tau_x \check{\varphi}(\cdot) \psi(x)\, dx \rangle$$

widać więc, że chodzi o to, czy z funkcjonałem liniowym $T$ wolno mi wejść pod całkę.

Niech $Q$ będzie kostką w $\mathbb{R}^n$, tak dużą, że $\operatorname{supp}\varphi + \operatorname{supp}\psi \subset Q$. Wtedy całkę po obu stronach możemy liczyć tylko po $Q$. Dzielimy $Q$ na $m^n$ identycznych, mniejszych kostek $Q_{m,i}$, o środkach $q_{m,i}$, i przybliżamy całkę po prawej stronie sumą Riemanna.

Niech
$$W_m(x) = \sum_{i=1}^{m^n} |Q_{m,i}| \cdot \tau_{q_{m,i}} \check{\varphi}(x) \psi(q_{m,i}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m^n} |Q_{m,i}| \varphi(q_{m,i} - x) \psi(q_{m,i})$$

Funkcje $W_m$, jako kombinacje liniowe funkcji z $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, należą do $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

<u>Zadanie:</u> wykazać, że $W_m \longrightarrow \check{\varphi} * \psi$ w $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Stąd

$$\langle T, \check{\varphi} * \psi \rangle = \lim_{m\to\infty} \langle T, w_m \rangle =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} |Q_{m,i}| \langle T, \tau_{q_{m,i}} \check{\varphi} \rangle \psi(q_{m,i})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\langle T, \tau_x \check{\varphi} \rangle \psi(x)}\, dx$$

bo to jest, jak już wiemy, gładka funkcja $x$.

$\square$.

<u>Ćwiczonko</u>

Dla dowolnych $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mamy $(T*\varphi)*\psi = T*(\varphi*\psi) = T*(\psi*\varphi) =$

$$= (T*\psi)*\varphi$$

<u>Twierdzenie</u>: Funkcje gładkie są gęste w $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,

tzn. $\{T_f : f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ jest gęsty w $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

<u>Dowód</u>: Niech $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$.

Wówczas $\varphi_m(x) = m^n \varphi(mx)$ zadaje jedność aproksymatywną, w szczególności dla każdej $f \in C(\mathbb{R}^n)$ i zwartego $K \subset \mathbb{R}^n$ $f * \varphi_m \rightrightarrows f$ na $K$.

Ustalmy $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ i niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem zwartym takim, że $\operatorname{supp} \chi * \varphi_m \subset K$ $\forall_m$

(wystarczy wziąć $K = \underbrace{\operatorname{supp} \chi + \operatorname{supp} \varphi}$) suma Minkowskiego zbiorów

Wówczas $\forall_\alpha$ $\operatorname{supp} D^\alpha(\chi * \varphi_m) \subset K$,

a że $D^\alpha(\chi * \varphi_m) = (D^\alpha \chi) * \varphi_m \rightrightarrows D^\alpha \chi$,

(na $K$, ale w związku z tym i na całym $\mathbb{R}^n$)

to $\chi * \varphi_m \longrightarrow \chi$ w topologii $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Dalej już łatwiutko: Jeżeli $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ i $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, to

$$\langle T, \psi \rangle = \langle T, (\check{\psi})^\vee \rangle = (T * \check{\psi})(0) =$$

$$= \lim_{m \to \infty} ((T * \check{\psi}) * \varphi_m)(0) = \lim_{m \to \infty} (T * \varphi_m) * \check{\psi}(0)$$

$$= \lim_{m \to \infty} \langle T_{T * \varphi_m}, \psi \rangle, \text{ a zatem } T_{T*\varphi_m} \xrightarrow{\mathcal{D}'} T.$$

Wiemy zaś, że $T * \varphi_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

<u>Definicja</u>: Mówimy, że dystrybucja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ <u>znika</u> na $V \subset \Omega$ otwartym, jeżeli $\langle T, \varphi \rangle = 0$ dla wszystkich $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ spełniających $\operatorname{supp}\varphi \subset V$.

<u>Nośnik</u> dystrybucji $T$ ~~to~~ to dopełnienie maksymalnego $V$, na którym $T$ znika, a więc

$$\operatorname{supp} T = \bigcap \{ \Omega \setminus V : T \text{ znika na } V \}$$

Proszę sprawdzić, że gdy $T$ jest funkcją lub miarą (tzn dystrybucją regularną lub dystrybucją $\varphi \xmapsto{T_\mu} \int \varphi \, d\mu$ ), to pojęcie nośnika $T$ pokrywa się z odpowiednio nośnikiem funkcji lub miary.

<u>Zadanie</u>: Jeżeli $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ma nośnik zwarty, to $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ $\quad T * \varphi$ ma nośnik zwarty

Korzystając z tego wyniku możemy zdefiniować splot dwóch dystrybucji, o ile jedna z nich ma nośnik zwarty:

<u>Def</u>: Jeżeli $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ i $T$ ma nośnik zwarty, to definiujemy $\underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)}{S * T}$ wzorem $\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S, T * \varphi \rangle$

<u>Zadanie</u>: Dla dowolnej $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mamy

$$S * \delta_0 = S.$$

# Dystrybucje temperowane

Przestrzeń $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ funkcji próbnych oczywiście wkłada się w przestrzeń Schwartza $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, nietrudno też sprawdzić, że to włożenie jest ciągłe (a więc że ciąg $(\varphi_n)$ funkcji z $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, zbieżny w $\mathcal{D}$ do pewnego $\varphi$, będzie też zbieżny do $\varphi$ w $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$). Oznacza to, że każdy funkcjonał liniowy ciągły na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ograniczony do $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, zadaje element $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, czyli dystrybucję: $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Elementy $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ nazywamy <u>dystrybucjami temperowanymi</u>.

Poniższe twierdzenie charakteryzuje dystrybucje temperowane.

Oznaczmy przez $[\cdot]_{\alpha,\beta}$ półnormy, przy pomocy których zdefiniowaliśmy topologię na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$[f]_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)|$$, gdzie $\alpha,\beta$ - multiindeksy

Twierdzenie: Funkcjonał liniowy T na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ jest dystrybucją temperowaną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $C>0$, $m\in\mathbb{N}$ takie, że

$$(*)\quad |\langle T,\varphi\rangle| \le C\sum_{|\alpha|,|\beta|\le m}[\varphi]_{\alpha,\beta} \quad \text{dla wszystkich } \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Dowód: To, że funkcjonał liniowy spełniający warunek $(*)$ jest ciągły na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ jest oczywiste; dowodu wymaga przeciwna implikacja.

Oznaczmy przez $N_m$ zbiór

$$N_m = \left\{\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m}[\varphi]_{\alpha,\beta}\le\frac{1}{m}\right\}.$$

Z ciągłości T wynika, że dla pewnego $m\in\mathbb{N}$ i wszystkich $\varphi\in N_m$ mamy $|\langle T,\varphi\rangle|\le 1$.

Załóżmy bowiem przeciwnie: dla każdego $m\in\mathbb{N}$ istnieje $\varphi_m\in N_m$ t. że $|\langle T,\varphi_m\rangle|>1$.

$$\underbrace{\varphi_m\in N_m}\ \Downarrow$$

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\le m}[\varphi_m]\le\frac{1}{m}\ \Big\}\Rightarrow \varphi_m\xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}0$$

a to jest sprzeczne z tym, że $|\langle T,\varphi_m\rangle|>1\ \ \forall_m$, bo T jest ciągły.

Jeżeli teraz $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, to

$$\tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{m \sum\limits_{|\alpha|,|\beta| \leq m} [\varphi]_{\alpha,\beta}} \in N_m, \quad \text{więc}$$

$$|\langle T, \varphi \rangle| = |\langle T, \tilde{\varphi} \rangle| \cdot m \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} [\varphi]_{\alpha,\beta}$$

$$\leq m \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} [\varphi]_{\alpha,\beta} ,$$

co kończy dowód. □

<u>Przykłady dystrybucji temperowanych</u>

(proszę sprawdzić, korzystając np. z powyższego twierdzenia, że przykłady te rzeczywiście należą do $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$)

1. Jeżeli $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, to $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$
2. Jeżeli istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\frac{f(x)}{(1+|x|^2)^k} \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad ~~dla~~ \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

to $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

3. Niech $\mu$ będzie miarą borelowską na $\mathbb{R}^n$, taką że $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^k} \, d\mu < \infty$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$.

Wtedy $T_\mu$; $\langle T_\mu, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu$, jest dystrybucją temperowaną.

4. $\delta_a$ i jej pochodne są dystrybucjami temp.

$$\left(\langle \delta_a^\alpha, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi(a)\right)$$

<u>Zadanie</u>: Wskazać dystrybucję regularną, która nie jest temperowana.

<u>Zadanie</u>: Jeżeli $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, to $T_{T*f}$ jest dystrybucją temperowaną, co więcej, $\forall_\alpha$ $D^\alpha(T*f)$ definiuje $T_{D^\alpha(T*f)}$ – dystrybucję regularną.

W podobny sposób, jak dowodziliśmy gęstość $\mathcal{D}$ w $\mathcal{D}'$ można wykazać gęstość $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ w $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, a więc i $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ w $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Trzeba wykazać, że jeżeli $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\eta \equiv 1$ na $B(0,1)$, $\eta \equiv 0$ poza $B(0,2)$, $\eta(x) \in [0,1]$, zaś $(\varphi_k)$ jest jedynością aproksymatywną w $\mathbb{R}^n$, to gdy $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ i $u_k(x) = \eta(\frac{x}{k}) \cdot (T * \varphi_k)(x)$, to $T_{u_k} \longrightarrow T$ w $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

(i wymaga to pewnej wprawy, albo w brutalnych rachunkach, albo w analizie na p-niach Frécheta)

Głównym powodem, dla którego wprowadzamy dystrybucje temperowane jest to, że możemy dla nich wprowadzić transformatę Fouriera:

<u>Def</u> Niech $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; transformatą Fouriera dystrybucji $T$ nazywamy dystrybucję $\mathcal{F}T = \hat{T}$ daną, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, wzorem $\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle$

Bez trudu sprawdzamy, że dla $T = T_f$, gdzie $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, mamy $\mathcal{F}T_f = T_{\hat{f}}$ (to w zasadzie treść wzoru $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} g = \int_{\mathbb{R}^n} f \hat{g}$), więc $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ jest rozszerzeniem $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ z gęstego podzbioru $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; nietrudno sprawdzić (<u>ćwiczenie</u>), że $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ jest jednostajnie ciągła, więc rozszerza się w sposób jednoznaczny.