Rekapitulacja i przypomnienie poprzedniego wykładu:

- wprowadziliśmy potencjały Riesza na $\mathbb{R}^n$

$$I_a f(x) = C(a,n) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-a}} dy \qquad a \in (0,n)$$

$$C(a,n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{a}{2}\right)}{2^a \pi^{n/2} \Gamma(a/2)}$$

i udowodniliśmy twierdzenie Hardy'ego - Littlewooda - Sobolewa o całkowaniu ułamkowym:

Tw. Jeżeli $a \in (0,n)$, $1 \le p < q < \infty$ i $q = \frac{np}{n-ap}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{a}{n}$

to ① gdy $p > 1$,

I_a jest ograniczonym operatorem z $L^p(\mathbb{R}^n)$ w $L^q(\mathbb{R}^n)$, tzn. $\|I_a f\|_q \le C(a,p,n)\|f\|_p$ dla $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

② dla $p = 1$ mamy oszacowania słabego typu: gdy $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$|\{I_a f > t\}| \le \left(\frac{C(a,n)\|f\|_1}{t}\right)^{n/n-a}.$$

- Łącząc twierdzenie o całkowaniu ułamkowym z formułą reprezentacyjną dla kuli:

Gdy $f \in W^{1,1}(B)$, to dla p.w. $x \in B$

$$|u(x) - u_B| \le C(n) \int_B \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy = C(n) I_1(|\nabla u| \cdot \chi_B)(x)$$

dostaliśmy tw. Sobolewa o włożeniu dla $p \geq 1$:

Twierdzenie: Niech $1<p<\infty$, $f\in W^{1,p}(B)$, wówczas $f\in L^q(B)$ dla $q=\frac{np}{n-p}(>p)$ oraz $\|f-f_B\|_q \le C\|\nabla f\|_p$. (nier. Sobolewa)

$$C=C(n,p)$$

W dokładnie ten sam sposób możemy uzyskać tw. Sobolewa na każdym obszarze, dla którego mamy jakąś wersję formuły reprezentacyjnej – a więc gdy Ω jest wypukły, gwiaździsty wzgl. pewnej kuli lub ma własność stożka wewn., mamy, dla pewnego $E\subset\Omega$, $|E|>0$

$$|u(x)-u_E|\le C(n,\Omega,E)\, I_1(|\nabla u|\cdot \chi_\Omega)$$

więc dla $1<p<\infty$, $f\in W^{1,p}(\Omega)\Rightarrow f\in L^q(\Omega)$ dla $q=\frac{np}{n-p}$ i $\|f-f_E\|_q\le\|\nabla f\|_p$.

Również dla $\Omega=\mathbb{R}^n$ mamy formułę reprezentacyjną

$|u(x)|\le C(n)\, I_1(|\nabla u|)$ dla p.w. $x\in\mathbb{R}^n$

więc $f\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)\Rightarrow f\in L^q(\mathbb{R}^n)$ dla $q=\frac{np}{n-p}$

i $\|f\|_q\le C\|\nabla f\|_p$.

Wniosek $f\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)\Rightarrow f\in L^s(\mathbb{R}^n)$ dla każdego $s\in\left[\frac{np}{n-p},p\right]$ i $\|f\|_s\lesssim\|f\|_{W^{1,p}}$

Dowód: ćwiczenie, interpolacja przestrzeni Lebesgue'a (czyli nier. Höldera).

Pozostają nam dwa graniczne przypadki: $p=1$ i $p=n$. Zajmijmy się najpierw pierwszym z nich. Ze względu na to, że dla $p=1$ mamy tylko ~~słab~~ oszacowania słabego typu dla potencjału Riesza I_1 na L^1, nie możemy powtórzyć dotychczasowej drogi dowodu
(Zadanie: Wykazać, że I_1 rzeczywiście nie jest ograniczony jako operator z $L^1(\mathbb{R}^n)$ w $L^n(\mathbb{R}^n)$)

Musimy skorzystać z innej, klasycznej drogi dowodu, pochodzącej od Gagliardo. Dla wygody tę wersję tw. Sobolewa sformułujemy nie na kulach, ale na kostkach.

Tw Gagliardo (nier. Sobolewa dla $p=1$, na kostkach)

Dla każdej kostki $Q\subset\mathbb{R}^n$ i $f\in W^{1,1}(Q)$ zachodzi nierówność

$$\|f\|_{L^{n/n-1}(Q)} \le \|\nabla f\|_{L^1(Q)} + |Q|^{-1/n}\|f\|_{L^1(Q)}$$

(dla $n=1$ przyjmujemy po lewej stronie
$\|f\|_{L^\infty(Q)} \le \dots$).

Dowód

Dzięki gęstości funkcji gładkich w $W^{1,1}(Q)$ i w $L^1(Q)$ wystarczy wykazać tezę dla $f \in C^\infty(Q)$. Zauważmy też, że twierdzenie jest niezmiennicze ze względu na skalowanie:

Jeżeli $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $Ax = \lambda x + x_0$ takie, że $A([0,1]^n) = Q$, $g(x) := f(Ax)$, $g: [0,1]^n \to \mathbb{R}$,

~~to~~ i jeżeli $\|g\|_{L^{n/n-1}([0,1]^n)} \leq \|\nabla g\|_{L^1([0,1]^n)} + \|g\|_{L^1([0,1]^n)}$,

~~to również~~ (a więc g spełnia tezę twierdzenia z $[0,1]^n$ w miejsce Q), to f spełnia tezę twierdzenia: $\|f\|_{L^{n/n-1}(Q)} \leq \|\nabla f\|_{L^1(Q)} + |Q|^{-1/n} \|f\|_{L^1(Q)}$

Wystarczy zatem wykazać tezę dla $Q = [0,1]^n$.

Dowód będzie przez indukcję ze względu na wymiar n.

<u>$n=1$</u> $\quad Q = [0,1]$.

Skoro $f \in C^\infty([0,1])$ to $\exists_{y \in [0,1]}$ t.ż. $|f(y)| = \|f\|_{L^1([0,1])}$

Mamy bowiem $\|f\|_{L^1([0,1])} = \underbrace{\int_{[0,1]} |f|}_{\text{bo to jest pomiędzy max i minf na } [0,1]} = |f(y)|$ dla pewnego $y \in [0,1]$

Teraz $\forall_{t \in [0,1]}$ $f(t) = \int_y^t f'(s)\,ds$ ~~$\Rightarrow |f(t)|$~~ $+ f(y) \Rightarrow |f(t)| \leq \int_y^t |f'(s)|\,ds + \|f\|_{L^1([0,1])}$

$\leq \|f'\|_{L^1([0,1])} + \|f\|_{L^1([0,1])}$.

Stąd $\|f\|_{L^\infty([0,1])} \leq \|f'\|_{L^1([0,1])} + \|f\|_{L^1([0,1])}$.

<u>Krok indukcyjny</u>

Oznaczmy $\tilde{Q} = [0,1]^{n-1}$ i załóżmy, że dla każdej gładkiej $h : \tilde{Q} \to \mathbb{R}$ mamy

$$\|h\|_{L^{\frac{n-1}{n-2}}(\tilde{Q})} \leq \|\nabla h\|_{L^1(\tilde{Q})} + \|h\|_{L^1(\tilde{Q})}.$$

∞, gdy $n=2$.

Wówczas $Q = [0,1] \times \tilde{Q} \ni (t,y)$ i korzystając z rachunku dla $n=1$ mamy

$$|f(t,y)| \leq \int_0^1 \left|\frac{\partial f}{\partial t}(\tau,y)\right| d\tau + \int_0^1 |f(\tau,y)|\, d\tau.$$

Całkując po $y \in \tilde{Q}$ dostajemy

$$\|f(t,\cdot)\|_{L^1(\tilde{Q})} = \int_{\tilde{Q}} |f(t,y)|\, dy \leq \int_{\tilde{Q}} \left(\int_0^1 \left|\frac{\partial f}{\partial t}(\tau,y)\right| d\tau + \int_0^1 |f(\tau,y)|\, d\tau \right) dy$$

$$\overset{(*)}{\leq} \|\nabla f\|_{L^1(Q)} + \|f\|_{L^1(Q)}$$

Z drugiej strony

$$\int_{\tilde{Q}} |f(t,y)|^{n/n-1}\, dy = \int_{\tilde{Q}} |f|^{\frac{1}{n-1}} |f| \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_{\tilde{Q}} |f|\right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_{\tilde{Q}} |f|^{\frac{n-1}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}$$

$$= \|f(t,\cdot)\|_{L^1(\tilde{Q})}^{1/n-1} \, \|f(t,\cdot)\|_{L^{(n-1)/(n-2)}(\tilde{Q})}$$

$$\overset{\text{z zał. ind}}{\leq} \|f(t,\cdot)\|_{L^1(\tilde{Q})}^{1/n-1} \left(\|f(t,\cdot)\|_{L^1(\tilde{Q})} + \left\|\frac{\partial f}{\partial y}(t,\cdot)\right\|_{L^1(\tilde{Q})} \right)$$

$$\overset{z\,(*)}{\leq} \left(\|\nabla f\|_{L^1(Q)} + \|f\|_{L^1(Q)}\right)^{1/n-1} \cdot$$

$$\cdot \left(\|f(t,\cdot)\|_{L^1(\tilde{Q})} + \left\|\frac{\partial f}{\partial y}(t,\cdot)\right\|_{L^1(\tilde{Q})}\right).$$

Scałkujmy tę nierówność po $t \in [0,1]$.

Dostajemy

$$\|f\|^{n/n-1}_{L^{n/n-1}(Q)} = \int_Q |f(t,y)|^{n/n-1}\, dy\, dt \leq$$

$$\leq \left(\|\nabla f\|_{L^1(Q)} + \|f\|_{L^1(Q)}\right)^{1/n-1} \cdot \left(\|f\|_{L^1(Q)} + \left\|\frac{\partial f}{\partial y}\right\|_{L^1(Q)}\right)$$

$$\leq \left(\|\nabla f\|_{L^1(Q)} + \|f\|_{L^1(Q)}\right)^{n/n-1}. \qquad \square$$

A co na drugim końcu skali – dla $p=n$?

Niech $f \in W^{1,n}(B)$, $B \subset \mathbb{R}^n$, $n>1$.

~~Z twierdzenia Sobolewa~~

Wówczas $f \in W^{1,q}(B)$ $\forall q<n$, więc

z tw. Sobolewa $f \in L^p(B)$ dla $p = \frac{nq}{n-q}$

i to jest dowolnie duże,

więc $f \in L^p(B)$ $\forall p \geq 1$.

Co możemy powiedzieć o $\|f\|_{L^p(B)}$ jako funkcji p?

Z nier. Höldera mamy łatwo, że gdy $p<q$, to $\|f\|_p \cdot |B|^{-1/p} \leq \|f\|_q \cdot |B|^{-1/q}$, więc przynajmniej gdy $|B|=1$, funkcja $p \longmapsto \|f\|_{L^p(B)}$ jest niemalejąca.

Z drugiej strony nie może być dla wszystkich $f \in W^{1,n}(B)$ ograniczona, bo jeżeli $\forall_{p>1}\ \|f\|_{L^p(B)} \leq M$, to $f \in L^\infty(B)$ i $\|f\|_{L^\infty(B)} \leq M$, a przecież wiemy, że w $\cancel{L^\infty}\, W^{1,n}(B)$ są funkcje nieograniczone gdy $n>1$, np. $\log|\log|x||$

Chcemy zatem ustalić, jak szybko może rosnąć, dla $f \in W^{1,\cancel{p}\,n}(B)$, norma $\|f\|_{L^p(B)}$ wraz z $p \to \infty$. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $B = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$

<u>Twierdzenie</u> (nierówność Trudingera-Mosera)

Niech $u \in W^{1,n}(B)$. Wówczas dla każdego $p \geq 1$

$$\|u-u_B\|_{L^p(B)} \leq C(n)\, p^{\frac{n-1}{n}} \|\nabla u\|_{L^n(B)}$$

Dowód: Dla prostszej notacji będę dalej pisał $f = u - u_B$. Ustalmy p i niech $q = \frac{p}{p-1}$

(więc $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ i $L^q(B) = (L^p(B))^*$)

Niech teraz $g \in L^q(B)$.

Z formuły reprezentacyjnej mamy dla p.w. $x \in B$

$$|f(x)| = |u(x) - u_B| \leq C(n) \int_B \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy$$

$$= C(n) \int_B \frac{|\nabla f(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy ,$$

więc

$$\int_B |f(x)||g(x)| dx \leq C(n) \int_B \int_B \frac{|\nabla f(y)||g(x)|}{|x-y|^{n-1}} dy dx$$

$$= C(n) \int_B \int_B \frac{|\nabla f(y)| \cdot |g(x)|^{\frac{1}{n}}}{|x-y|^{\frac{n-1}{np}}} \cdot \frac{|g(x)|^{\frac{n-1}{n}}}{|x-y|^{(np-1)(n-1)/np}} dy dx$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\underset{\text{z wykł. } n, \frac{n-1}{n}}{\leq}} C(n) \underbrace{\left(\int_B \int_B \frac{|\nabla f(y)|^n |g(x)|}{|x-y|^{\frac{n-1}{p}}} dx dy \right)^{\frac{1}{n}}}_{I_1^{1/n}} \underbrace{\left(\int_B \int_B \frac{|g(x)| dx dy}{|x-y|^{n-1/p}} \right)^{\frac{n-1}{n}}}_{I_2^{n-1/n}}$$

Przypomnijmy ćwiczenie sprzed kilku tygodni:

$$\int_\Omega \frac{dx}{|x-y|^{n-\alpha}} \le n\omega_n^{1-\frac{\alpha}{n}} \frac{|\Omega|^{\alpha/n}}{\alpha}$$ dla dow. mierzalnego $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ t.że. $|\Omega| < \infty$

Stąd

$$I_2 = \int_B\int_B \frac{|g(x)|}{|x-y|^{n-1/p}}\,dy\,dx = \int_B |g(x)| \Big(\underbrace{\int_B \frac{dy}{|x-y|^{n-1/p}}\,dy}\Big)\,dx$$

$$= n\omega_n^{1-\frac{1}{np}}\,\omega_n^{1/np}\cdot np$$

$$= n^2 p\,\omega_n$$

Hölder

$$\le n^2 p\,\omega_n \Big(\int_B |g|^q\Big)^{1/q} \cdot \underbrace{\Big(\int_B 1^{\frac{q}{q-1}}\Big)^{\left(1-\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{p}}}_{\omega_n^{1/p}} = n^2 p\,\omega_n^{1+\frac{1}{p}} \|g\|_{L^q(B)}$$

Podobnie szacujemy I_1:

$$I_1 = \int_B\int_B \frac{|\nabla f(y)|^n |g(x)|}{|x-y|^{\frac{n-1}{p}}}\,dx\,dy = \int_B |\nabla f(y)|^n \Big(\int_B \frac{|g(x)|}{|x-y|^{\frac{n-1}{p}}}\,dx\Big)\,dy$$

Hölder $\le$ w wewn. całce

$$\int_B |\nabla f(y)|^n \|g\|_{L^q(B)} \Big(\int_B \frac{dx}{|x-y|^{n-1}}\Big)^{1/p} \le$$

$$\le \|\nabla f\|^n_{L^n(B)} \|g\|_{L^q(B)} \cdot n^{1/p}\omega_n^{1/p}$$

Co razem daje, po uwzględnieniu wszystkiego, co się da w $C(n)$,

$$\int_B |fg| \le C(n)\, p^{\frac{n-1}{n}} \|\nabla f\|_n \|g\|_q$$

i nierówność ta zachodzi dla wszystkich $g \in L^q$.

Stąd $\|f\|_{L^p} = \|f\|_{(L^q)^*} \le C(n)\, p^{\frac{n-1}{n}} \|\nabla f\|_n$

<u>Wniosek</u>: <u>Tw. Trudingera</u>

Istnieje $C = C(n)$ t.ż. dla dowolnej $u \in W^{1,n}(B)$

$$\int_B \left(\exp\left[\left(\frac{|u-u_B|}{C\|\nabla u\|_{L^n(B)}} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right] - 1 \right) \le 1$$

Przestrzeń tych wszystkich $f \in L^1(B)$, dla których istnieje $A>0$ t.ż. $\int_B \left(\exp\left(\left(\frac{|f|}{A} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right) - 1 \right) \le 1 \quad (*)$

nazywamy przestrzenią Orlicza $L^{\Phi}(B)$ związaną z funkcją Orlicza $\Phi(t) = \exp(t^{n/n-1}) - 1$. Na tej przestrzeni

możemy wprowadzić normę $\|\cdot\|_{L^{\Phi}(B)} = \|\cdot\|_{L^1(B)} + A_0$,

gdzie $A_0 = \inf\{A>0 : A \text{ spełnia } (*)\}$,

z tą normą $L^{\Phi}(B)$ jest przestrzenią Banacha, większą niż $L^\infty(B)$, ale zawierającą $\bigcap_{q>1} L^q(B)$.

Dowód tw. Trudingera

Wypiszmy nier. Trudingera-Mosera z $p = k\cdot\frac{n}{n-1}$:

$$\|u-u_B\|_{k\cdot\frac{n}{n-1}} \le C(n)\left(k\,\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\|\nabla u\|_n$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\int_B |u-u_B|^{\frac{n}{n-1}}\right)^k \le \left(k\cdot\frac{n}{n-1}\right)^k \left[C(n)\|\nabla u\|_n\right]^{k\cdot\frac{n}{n-1}}$$

Mamy

$$\int_B\left(\exp\left(\left|\frac{|u-u_B|}{A}\right|^{n/n-1}\right)-1\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_B\left|\frac{u-u_B}{A}\right|^{k\cdot\frac{n}{n-1}}$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[k\cdot\frac{n}{n-1}\left(C(n)\,\frac{\|\nabla u\|_n}{A}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right]^k = (*)$$

chcemy wykazać, że dla $A = \tilde{C}(n)\,\|\nabla u\|_{L^n(B)}$ z odpowiednio dobraną stałą $\tilde{C}(n)$ to jest ≤ 1.

Dwa proste zadanka z Analizy 1:

- szereg $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^k}{3^k k!}$ jest zbieżny (kryt. d'Alemberta)

  Oznaczmy jego sumę przez S

- $$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{3S}\right)^k\cdot\frac{1}{k!} \le \frac{1}{S}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^k}{3^k k!} \cancel{<1} = 1$$

Jeżeli więc w (*) dobierzemy A tak, by

$$\frac{n}{n-1}\left(C(n)\frac{\|\nabla u\|_n}{A}\right)^{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{3S}, \text{ tzn}$$

$$A = \frac{C(n)}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}}(3S)^{\frac{n-1}{n}}}\|\nabla u\|_n = \tilde{C}(n)\|\nabla u\|_n,$$

to mamy gwarancję, że

$$\int_B \left(\exp\left(\frac{|u-u_B|}{A}\right)^{\frac{n}{n-1}} - 1\right) \le (*) \le 1.$$

□.

Jest jeszcze jedna ważna przestrzeń funkcji, leżąca między $\bigcap_{q\geq 1} L^q$ a L^∞ i zawierająca $W^{1,n}$ – to przestrzeń funkcji BMO (bounded mean oscillation). Tu tylko informacyjnie definicja i trochę własności.

<u>Def:</u> Mówimy, że funkcja $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ma ograniczone średnie wahanie ($\in BMO(\mathbb{R}^n)$), gdy istnieje stała $A \geq 0$ tż dla każdej kuli $B \subset \mathbb{R}^n$

$$⨍_B |u-u_B| \le A.$$

Najlepszą taką stałą A nazywamy półnormą BMO funkcji u i oznaczamy $[u]_{BMO}$;

oczywiście $[u]_{BMO} = 0 \iff u = \text{const}$.

Tak samo możemy zdefiniować $BMO(\Omega)$ dla dowolnego obszaru $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, używając kul $B \subset \Omega$; możemy też w miejsce kul używać kostek o krawędziach równoległych do osi.

Bez trudu sprawdzamy, że $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneq BMO(\mathbb{R}^n)$:

$u \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \fint_B |u - u_B| \leq 2\|u\|_\infty \Rightarrow [u]_{BMO} \leq 2\|u\|_\infty$.

i tak samo dla lokalnych wersji tych przestrzeni;

warto też zrobić

<u>Zadanie:</u> $u(x) = \max(-\log|x|, 0)$ należy do $BMO(\mathbb{R}^n)$, choć nie jest ograniczona.

i jeszcze jedno ważne w zastosowaniach <u>zadanie:</u>

Przypiszmy każdej kuli B w $\mathbb{R}^n$ stałą c_B i zdefiniujmy

$$\widetilde{BMO}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) : \exists_A \, \forall_B \fint_B |u - c_B| < A \right\}$$

Wówczas $\widetilde{BMO}(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n)$.

<u>Twierdzenie:</u>

$$W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n)$$

$$W^{1,n}(\Omega) \subset BMO(\Omega).$$

<u>Dowód</u> to w zasadzie tylko nier. Poincaré dla kul: niech $B = B(x, r) \subset \Omega$.

Mamy wówczas

$$\fint_B |u-u_B| \overset{\text{n. Poincaré}}{\le} C(n)\, r \fint_B |\nabla u| \overset{\text{n. Höldera}}{\le} C(n)\, r \left(\fint_B |\nabla u|^n\right)^{1/n}$$

$$\le C(n)\left(\int_B |\nabla u|^n\right)^{1/n} \le C(n)\, \|\nabla u\|_n \quad \square .$$

W rzeczywistości wykazaliśmy tu więcej:

że $\fint_B |u-u_B| \le C(n)\, \|\nabla u\|_{L^n(B)}$

i gdy zmniejszamy promień kuli $B = B(x,r)$ do zera, prawa strona nierówności dąży do zera, z absolutnej ciągłości całki $\int |\nabla u|^n$.

Podprzestrzeń przestrzeni BMO złożoną z tych funkcji, dla których średnia oscylacja jest nie tylko ograniczona, ale dąży wraz z promieniem kuli do zera nazywamy przestrzenią VMO (vanishing mean oscillation). Łatwo sprawdzić, że VMO(Ω) zawiera wszystkie funkcje ciągłe (oraz, jak widzimy, $W^{1,n}(\Omega)$), a np. dla $n>2$ ~~nie zawiera funkcji $W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$~~

$$VMO(\mathbb{R}^n) \not\ni (-\log|x|)_+ .$$

Facts on BMO functions

1. John, Nirenberg:

There exist $c_1(n)$, $c_2(n)$ such that for any ~~ball~~ $u \in BMO(\Omega)$ and for any ball $B \subset \Omega$

$$|\{x \in B : |u(x) - u_B| > t\}| \leq c_1 \exp\left(\frac{-c_2 t}{\|u\|_{BMO}}\right)|B|$$

Corollary: $u \in BMO(\Omega) \Rightarrow u \in L^p_{loc}(\Omega)$

2. The pre-dual space to $BMO(\mathbb{R}^n)$ is well ~~u~~understood:

The real Hardy space $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ has numerous equivalent (Fefferman, Stein) definitions

1. ~~$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ f is in $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$~~

~~Fix~~ Fix $\cancel{\varphi \in C_0^\infty(B}$, $\varphi \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$
$\varphi \in C_0^\infty(B(0,1))$

and form a standard mollifyier:
$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$.

$\cancel{\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)}$

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \sup_{\varepsilon > 0} |f * \varphi_\varepsilon| \in L^1\}$$

2. A function $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ is an <u>atom</u>

if (1) $\underset{\text{ball } B \subset \mathbb{R}^n}{\exists}$ $\operatorname{supp} a \subset B$

(2) $|a(x)| \le \dfrac{1}{|B|}$ a.e.

(3) $\int_B a = \int_{\mathbb{R}^n} a = 0$.

$f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) \iff f \overset{\text{a.e.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$, with a_k - atoms

$\cancel{\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| < \infty}$

and $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

3. Define Riesz transforms

$R_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$

$R_j f(x) = \text{p.v.}\ \cancel{\int f(y)(y_i - x_i)} \ \cancel{f * \frac{y_i - x_i}{|y-x|^{n+1}}}$

$f * \dfrac{x_i}{|x|^{n+1}}$

(or, equivalently, $(R_j f)^\wedge(\xi) = i \dfrac{\xi_i}{|\xi|} \hat{f}$)

Then $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) \iff f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ & $R_j f \in L^1$ for $j = 1, \dots, n$.

$(VMO(\mathbb{R}^n))^* = \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$

$(\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n))^* = BMO(\mathbb{R}^n)$ Fefferman

Coifman, Lions, Meyer, Semmes $\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

Suppose $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $E \in L^q(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in BMO(\mathbb{R}^n)$

and $\int_{\mathbb{R}^n} E \cdot \nabla \xi = 0$ for any $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

(div $E = 0$).

Then

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle E, \nabla u \rangle \xi \le C(n,p) \|E\|_{L^q} \|\nabla u\|_{L^p} \|\xi\|_{BMO}$$

This is stronger than (known earlier)

Wente's inequality : let E, u as above and suppose $u \in W^{1,n}$, then

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle E, \nabla u \rangle \xi \le C(n,p) \|E\|_{L^q} \|\nabla u\|_{L^p} \|\nabla \xi\|_{L^n}$$

~~Meyer, Rivière~~ Optimal

Gagliardo-Nirenberg inequalities

Meyer, Rivière : $\quad B$ or Ω, smooth bdd domain

$$\|\nabla f\|^2_{L^4(B)} \le C \cdot \|f\|_{BMO(B)} \|f\|_{W^{2,2}(B)}$$

Strzelecki $\quad f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, $p>1$, $1 \le m < k$

~~$\|D^m f\|_{L^q} \le C$~~

$$\|D^m f\|_{L^{\frac{kp}{m}}} \le C(n) \|f\|_{BMO}^{1-\frac{m}{k}} \|D^k f\|_{L^p}^{\frac{m}{k}}$$