Zadanie 3

(i) $f(x,y) = \max\{4x^2+y^2, 5x+3y+3, 3x-4y+6\}$

Niech $f_1(x,y) = 4x^2+y^2$, $f_2(x,y) = 5x+3y+3$, $f_3(x,y) = 3x-4y+6$

Funkcje f_1, f_2 i f_3 są wypukłe, bo ich macierze drugich pochodnych są dodatnio półokreślone:

$D^2f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0$ (wart. własne 8 i 2)

$D^2f_2(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0$ (—— " —— 0)

$D^2f_3(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0$ (—— " —— 0)

Funkcja f jest więc maksimum z funkcji wypukłych, a zatem jest wypukła.

(ii) $A = (-\frac{3}{5}, \frac{3}{5})$, $B = (1,4)$, $C = (-1,2)$, $D = (1,-2)$.

Sprawdźmy, ~~kto~~ jakie wartości przyjmują w A, B, C, D funkcje f_1, f_2 i f_3:

	A	B	C	D
f_1	$9/5$	20	8	8
f_2	$9/5$	20	4	2
f_3	$9/5$	-7	-5	17

W punkcie A f jest równa wspólnej wartości funkcji f_1, f_2, f_3,

w B – f_1 i f_2

w C – f_1

w D – f_3.

Stąd $\partial f(A) = \cancel{\partial f_1(A) + \partial f_2} \operatorname{conv}(\partial f_1(A) \cup \partial f_2(A) \cup \partial f_3(A))$

$\partial f(B) = \operatorname{conv}(\partial f_1(A) \cup \partial f_2(A))$

$\partial f(C) = \partial f_1(C)$

$\partial f(D) = \partial f_3(D)$

Funkcje f_1, f_2, f_3 są różniczkowalne, więc

$\cancel{\partial f_1(A) = \{\nabla f_1(A)\}}$

$\partial f_1(x,y) = \{\nabla f_1(x,y)\} = \{(8x, 2y)\}$

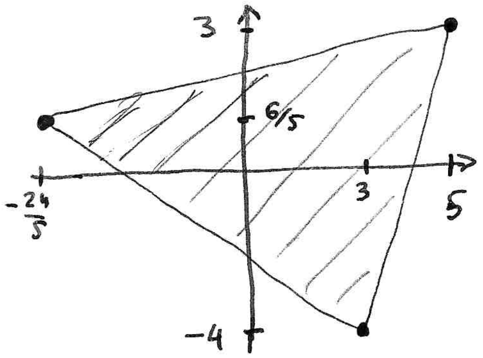
$\partial f_2(x,y) = \{\nabla f_2(x,y)\} = \{(5,3)\}$

$\partial f_3(x,y) = \{\nabla f_3(x,y)\} = \{(3,-4)\}$

I ostatecznie

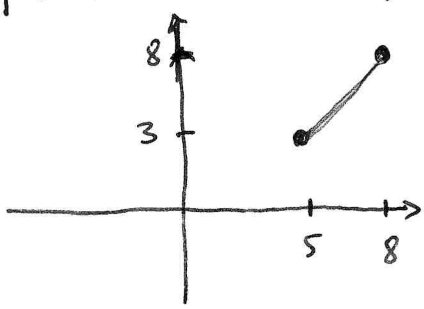
$\partial f(A) = \operatorname{conv}\left(\partial f_1(-\tfrac{3}{5}, \tfrac{3}{5}) \cup \partial f_2(-\tfrac{3}{5}, \tfrac{3}{5}) \cup \partial f_3(-\tfrac{3}{5}, \tfrac{3}{5})\right) =$

$= \operatorname{conv}\left(\{(-\tfrac{24}{5}, \tfrac{6}{5}), (5,3), (3,-4)\}\right)$



ten trójkąt to $\partial f(A)$

$\partial f(B) = \operatorname{conv}(\partial f_1(1,4) \cup \partial f_2(1,4)) = \operatorname{conv}(\{(8,8), (5,3)\})$



ten odcinek to $\partial f(B)$

$\partial f(C) = \partial f_1(C) = \partial f_1(-1,2) = \{(-8,4)\}$ $\quad \partial f(D) = \partial f_3(D) = \{(3,-4)\}$.

A co z podpunktem iii) ?
Pojawił się przez naszą pomyłkę – rachunki są zbyt skomplikowane. Naszkicuję je tutaj.

Kilka rzeczy z tego podpunktu jest łatwych:

- $(0,0) \in \partial f(A)$, a więc w A f przyjmuje <u>minimum globalne</u> równe $9/5$
- Funkcja wypukła, jeżeli ma gdzieś minimum lokalne, to automatycznie jest to minimum globalne. Gdybyśmy wiedzieli, że f jest ściśle wypukła, wiedzielibyśmy też, że A jest jedynym punktem, w którym f osiąga minimum, bo funkcja ściśle wypukła osiąga minimum w co najwyżej jednym punkcie. Ale f nie jest ściśle wypukła.

Gdyby istniał punkt $(x_0, y_0) \neq A$ taki, że f przyjmuje w nim minimum, to musielibyśmy mieć

1) $f(x_0, y_0) = 9/5$
2) $(0,0) \in \partial f(x_0, y_0)$.

~~Jak~~ Wiemy, jak wyznaczyć ∂f:
Gdyby (x_0, y_0) było punktem w którym jedna z funkcji f_1, f_2, f_3 była większa od dwóch pozostałych, to:

① gdyby to była f_1, to z warunku

$(0,0) \in \partial f(x_0,y_0) = \{(8x_0, 2y_0)\}$

mamy $(x_0,y_0)=(0,0)$, ale wtedy $f_1(x_0,y_0) \neq 9/5$

② gdyby to była f_2, to niemożliwy do spełnienia byłby warunek 2), bo w punktach, w których f_2 jest większa od f_1 i f_3 mamy

$\partial f = \partial f_2 = \{(5,3)\} \not\ni (0,0)$.

③. Tak samo, gdyby to była f_3.

Gdyby (x_0,y_0) było punktem, w którym dwie funkcje są równe i większe od trzeciej, to mamy 3 możliwości:

① $f_1(x_0,y_0) = f_2(x_0,y_0) = 9/5 > f_3(x_0,y_0)$

② $f_1(x_0,y_0) = f_3(x_0,y_0) = 9/5 > f_2(x_0,y_0)$

③ $f_1(x_0,y_0) < f_2(x_0,y_0) = f_3(x_0,y_0) = 9/5$.

① Układ równań $\begin{cases} f_1(x_0,y_0) = 9/5 \\ f_2(x_0,y_0) = 9/5 \end{cases}$ ma 2 rozwiązania (trzeba rozwiązać równanie kwadratowe)

$(x_0,y_0) = A$ i $(x_0,y_0) = \left(\frac{123}{305}, -\frac{327}{305}\right)$

Pierwsze rozwiązanie nas nie interesuje (szukamy $(x_0,y_0) \neq A$), w drugim $f_3(x_0,y_0) = \frac{3507}{305} \approx 11{,}5$ i nie jest spełniony warunek ten

② Układ równań $\begin{cases} f_1(x_0,y_0) = 9/5 \\ f_3(x_0,y_0) = 9/5 \end{cases}$ ma 2 rozwiązania

$(x_0,y_0) = A$ i $(x_0,y_0) = \left(\frac{93}{365}, \frac{453}{365}\right)$, ale $f_2\left(\frac{93}{365}, \frac{453}{365}\right) = \frac{2919}{365} \approx 8$ nie spełnia nierówności

(3) Układ równań $\begin{cases} f_2(x_0,y_0) = 9/5 \\ f_3(x_0,y_0) = 9/5 \end{cases}$ ma tylko jedno rozwiązanie: $(x_0,y_0) = A$.

Pozostaje ostatnia możliwość: że (x_0,y_0) jest punktem, w którym wszystkie 3 ~~prosd~~ funkcje są równe $9/5$, ale jedynym rozwiązaniem układu $\begin{cases} f_1(x_0,y_0) = 9/5 \\ f_2(x_0,y_0) = 9/5 \\ f_3(x_0,y_0) = 9/5 \end{cases}$ jest $(x_0,y_0) = A$

(już układ drugiego i trzeciego równ. nie ma więcej rozwiązań).

Stąd jedynym ~~minimum~~ argmin funkcji f jest punkt A.

Zadanie 4

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+2y^2\le 1,\ |2y|-x\le 0\}$$

Oznaczmy $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+2y^2-1\le 0\}$

$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |2y|-x\le 0\}$

Oczywiście $A=B\cap C$

Teraz przyjrzyjmy się warunkowi ze zbioru C:

$$|2y|-x\le 0 \iff |2y|\le x \iff 2y\le x \ \wedge\ -2y\le x$$

$$\cancel{\begin{cases}2y\le x\\ -2y\le x\end{cases}}$$

A więc $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2y\le x,\ -2y\le x\}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2y-x\le 0,\ -2y-x\le 0\}$

Niech $C_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2y-x\le 0\}$

$C_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -2y-x\le 0\}$

Oczywiście $C=C_1\cap C_2$, więc $A=B\cap C_1\cap C_2$

Zbiór B jest wypukły, bo $f_B(x,y)=x^2+2y^2-1$ jest funkcją wypukłą: $D^2 f_B(x,y)=\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}>0$

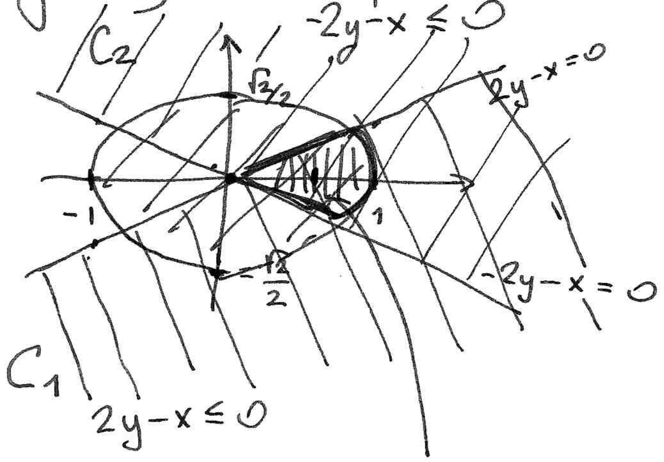
Zbiór C_1 jest wypukły, bo $f_{C_1}(x,y)=2y-x$ jest funkcją liniową, a więc wypukłą (zresztą $D^2 f_{C_1}(x,y)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ge 0$).

Z tego samego powodu wypukły jest C_2.

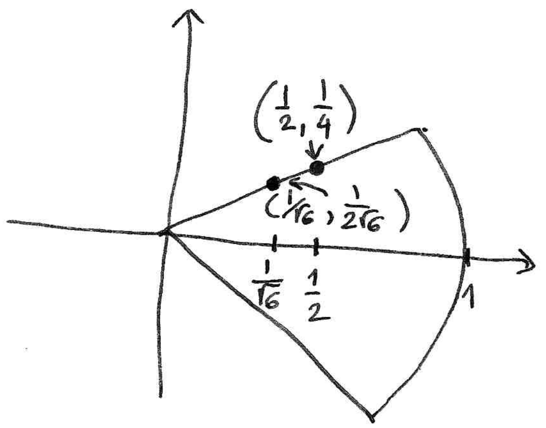
Ostatecznie A jest wypukły jako część wspólna trzech zbiorów wypukłych.

Możemy go też naszkicować:

$B = \{x^2 + 2y^2 \leq 1\}$ to pełna elipsa



to jest A



$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2 + 2y^2 - 1}_{g_1(x,y)} \leq 0$$
$$g_2(x,y) = 2y - x \leq 0$$
$$g_3(x,y) = -2y - x \leq 0\}$$

Które więzy są aktywne w $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$?

$$g_1(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{4} + 2 \cdot \tfrac{1}{16} - 1 < 0 \quad \text{nieakt.}$$
$$g_2(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}) = 2 \cdot \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} = 0 \quad \text{aktywny}$$
$$g_3(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}) = -2 \cdot \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} < 0 \quad \text{nieaktywny.}$$

Stąd $T_A(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = \{v \in \mathbb{R}^2 : \langle \nabla g_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}), v \rangle \leq 0\}$

$\nabla g_2(x,y) = (-1, 2)$, więc

$$= \{v \in \mathbb{R}^2 : \langle (-1,2), (v_1, v_2) \rangle \leq 0\}$$
$$= \{v \in \mathbb{R}^2 : -v_1 + 2v_2 \leq 0\}$$

Czy brzeg $T_A(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, czyli $\{v \in \mathbb{R}^2 : -v_1 + 2v_2 = 0\}$ należy do $F_A(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$? tak – widać to na rysunku.

Jest tak zresztą zawsze, gdy jedyne aktywne więzy są afiniczne (brzeg A jest w okolicy $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ płaski).

Stąd $F_A(\frac{1}{2},\frac{1}{4}) = \{v \in \mathbb{R}^2 : -v_1 + 2v_2 \leq 0\}$.

Teraz T_A i N_A w $(\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{6}}, \frac{1}{2\sqrt{6}})$.

Które więzy są w $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{2\sqrt{6}})$ aktywne?

$g_1(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{2\sqrt{6}}) = \frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{4\cdot 6} - 1 < 0$ nieakt.

$g_2(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{2\sqrt{6}}) = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = 0$ akt.

$g_3(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{2\sqrt{6}}) = -2\frac{1}{2\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} < 0$ nieakt.

Stąd $N_A(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{2\sqrt{6}}) = \{\lambda\cdot\nabla g_2(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{2\sqrt{6}}) : \lambda \geq 0\} =$

$= \{(-\lambda, 2\lambda) : \lambda \geq 0\}$

$T_A(\frac{1}{6}, \frac{1}{2\sqrt{6}}) = \{v \in \mathbb{R}^2 : \langle \nabla g_2(\frac{1}{6}, \frac{1}{2\sqrt{6}}), v\rangle \leq 0\}$

$= \{v \in \mathbb{R}^2 : \langle(-1,2), (v_1, v_2)\rangle \leq 0\} =$

$= \{v \in \mathbb{R}^2 : -v_1 + 2v_2 \leq 0\}$.