Zadania z EON – zestaw 6.

Zadanie 1 Udowodnij, że suma i różnica Minkowskiego dwóch zbiorów

a) domkniętych jest zbiorem domkniętym, pod warunkiem, że co najmniej jeden z nich jest ograniczony,

b) ograniczonych jest zbiorem ograniczonym.

Zadanie 2 Znajdź sumę $A + B$ oraz różnicę $A - B$ i $B - A$ Minkowskiego zbiorów A i B.

a) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\},\ B = \{(1,0),(-1,0)\} \cup \{(0,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in (-1,1)\}$;
b) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\},\ B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 4\}$;
c) $A = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\},\ B = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{9}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 = 1\}$;
d) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{2|x_1|, |x_2|\} \leq 4\},\ B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1+1)^2 + x_2^2 = 1\}$;
e) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 = 1\},\ B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + x_2 = 0\}$;
f) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2 = 0\},\ B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0, |x_2| \leq 1\}$.

Zadanie 3 Dla danego zbioru domkniętego i wypukłego A znaleźć płaszczyznę podpierającą w punkcie $x \in \partial A$.

a) $x = (2,2) \in A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 8\}$;
b) $x = (2,1) \in A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x_1|, x_2 + 1\} \leq 2\}$;
c) $x = (-1,0) \in A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2 \leq 1\}$;
d) $x = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \in A = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$;
e) $x = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \in A = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 1\}$.

Zadanie 4 Niech A będzie wypukłym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Wykaż, że cone(A) jest najmniejszym stożkiem wypukłym zawierającym zbiór A (w szczególności – że jest stożkiem wypukłym). Wykaż, że jeżeli A jest domknięty i ograniczony, to i cone(A) jest domknięty.

Zadanie 5 Wykaż, że

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \quad : \quad x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0\}.$$

jest najmniejszym stożkiem wypukłym zawierającym punkty $a_1, \ldots, a_m$. Stożek ten nazywamy stożkiem *rozpiętym* przez punkty $a_1, \ldots, a_m$.