Zadania z EON – zestaw 1.

Zadanie 1 Wyznacz $f'_{\vec{v}}(x_o)$, gdzie

a) $f(x) = \sin(x_1^2 + 2x_2)$, $x_o = (0,0)$, $\vec{v} = (1,1)$;

b) $f(x) = x_1^3 - 2x_1x_2^2 + x_1 - x_2 - 2$, $x_o = (0,1)$, $\vec{v} = (1,2)$;

c) $f(x) = \langle (1,2,1)\,,\, x\rangle$, $x_o = (0,1,0)$, $\vec{v} = (0,-1,1)$.

Zadanie 2 Dana jest funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

a) Zbadaj ciągłość funkcji f w punkcie $x = 0$.

b) Znajdź pochodną kierunkową w punkcie $x = 0$ i w kierunkach $v^1 = (1,0)^T$ oraz $v^2 = (0,1)^T$.

c) Czy istnieje w punkcie $x = 0$ pochodna w kierunku $v = (v_1, v_2)^T$ takim, że $v_1v_2 \neq 0$?

d) Czy w punkcie $x = 0$ funkcja f jest różniczkowalna?

Zadanie 3 Wyznacz w dowolnym punkcie $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ gradient i macierz Hessa funkcji $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ określonych wzorami

$$\textbf{a)}\ f(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{b)}\ f(x) = x^T \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} x.$$

Zadanie 4 Znajdź wszystkie punkty krytyczne funkcji f

a) $f(x,y) = 5x^2 + y^2 - 4xy - 2x + 3$,

b) $f(x,y) = x^3 - y^2 - 4xy - 3x$,

c) $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - 4xy - x^4 - y^4$,

d) $f(x,y) = 3x^2 - y^3 + 12xy - 36y$,

Zadanie 5 Wyznacz w dowolnym punkcie $x \in \mathbb{R}^n$ gradient i macierz Hessa funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ określonych wzorami

$$\textbf{a)}\ f(x) = b^T x, \qquad \textbf{b)}\ f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^{2k},$$

$$\textbf{c)}\ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x, \qquad \textbf{d)}\ f(x) = \frac{1}{2} a^T x x^T b.$$

gdzie A jest dowolną macierzą o wymiarach $n \times n$, $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Zadanie 6 Dla funkcji z zadania 5 oblicz pochodne w kierunku v, jeśli

a) $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$;

b) $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.