

# 1-formy i twierdzenie Greena

Definicja (no, powiedzmy, że to definicja...)

Niech  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  będzie zbiorem otwartym i  
niech  $f_1, \dots, f_n \in C^k(\Omega)$ .

Wyrażenie

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n$$

nazywać będziemy formą różniczkową rzędu 1  
(w skrócie 1-formą) klasy  $C^k$  na  $\Omega$ .  
czyt: jednoforma

Co to w rzeczywistości za obiekt i czym są te  
 $dx_1, \dots, dx_n$  — o tym niebawem, na razie  
przyjmijmy się temu, do czego formy różniczkowe  
wymyślono: chcemy je mieć całkować.

Dokładniej, 1-formy będziemy całkować po krzywych.

Def: Krzywą zorientowaną w  $\mathbb{R}^n$  nazywać  
będziemy różniczkową mnogość wymiaru 1 i klasy  $C^1$  w  $\mathbb{R}^n$ ,  
wraz z wyborem ciągłego, nieznikającego pola  
wektorów stycznych na  $M$ , tj. takiego przekształcenia  
 $t: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , że  $\forall_{p \in M} t(p) \in T_p M$  i  $t(p) \neq 0$ .  
ciągłego

Zdefiniujemy teraz całkę z 1-formy  $\omega = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$  po krzywej zorientowanej  $(M, t)$ .

Na początku niech  $M_1$  będzie kawałkiem krzywej  $M$  opisanym parametryzacją  $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , zgodną z orientacją rozmaitości  $M$ ;

$$\gamma((a, b)) = M_1$$

} ew.  $M_1 = \gamma([a_1, b_1])$   
 $\gamma([a_2, b_2])$   
 itp.

$$\int_{M_1} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \int_a^b f_i(\gamma(t)) \underbrace{\dot{\gamma}_i(t)}_{= "dx_i",} dt$$

bo  $x_i = \gamma_i(t)$

Całkę po całej krzywej  $M$  dostajemy dzieląc ~~na~~  $M$  na wzajemnie kawałki  $M_1, M_2, \dots$ , z których każdy jest opisany pojedynczą parametryzacją, i sumując całki po nich.

W rzeczywistości jeżeli  $M$  jest spójne, to

- albo jest Tuliem



- albo jest krzywą

zamkniętą — i wystarczy z dokładnością do 1 punktu też można ją opisać

i wystarczy jedna parametryzacja

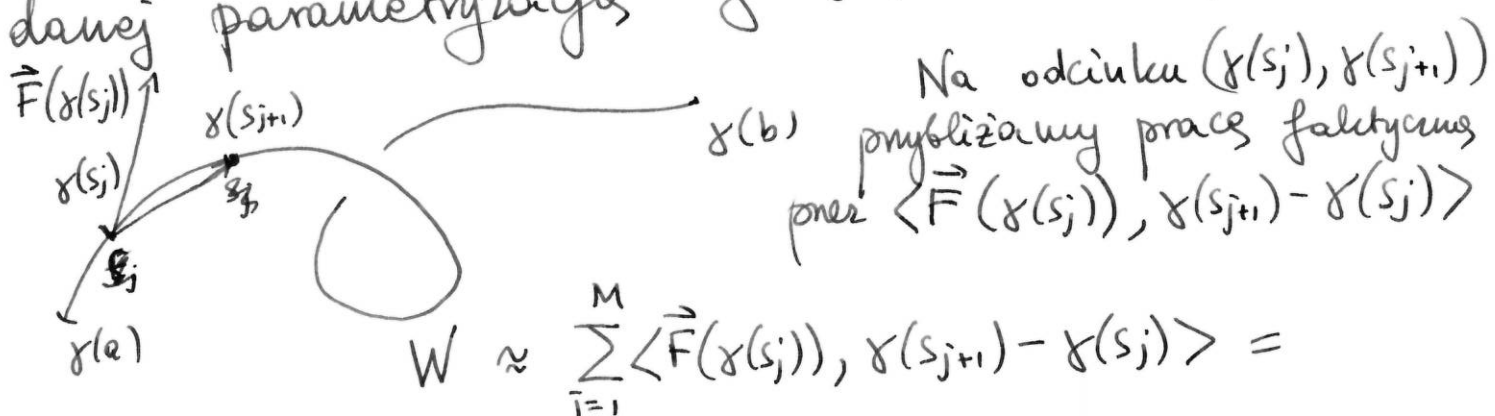
jedną parametryzację. Ten pojedynczy punkt nie ma wpływu na wartość całki (proszę pomyśleć, jak to ściśle uzasadnić; korzystając z  $\boxtimes$ ).

Tak więc aby móc wyznaczyć  $\int_{\gamma}$  wystarczy podzielić  $M$  na składowe spójne  $M_i$ , dla każdej z nich obliczyć  $\int_{M_i}$  korzystając z  $\boxtimes$  i dodając.

Interpretacja fizyczna całki z 1-formy.

Załóżmy, że pewne ciało przesuwamy się, pod wpływem siły  $\vec{F}$ , o wektor  $\vec{s}$ .  
 O ile siła jest stała, a ruch - prostoliniowy, to praca, jaką wykonała siła, równa jest  $\langle \vec{F}, \vec{s} \rangle = \vec{s} \cdot \vec{F}$ . (składowa  $\vec{F}$  równoległa do  $\vec{s}$ ).

A co, jeżeli siła nie jest stała, a poruszamy się po pewnej krzywej  $M$ , danej parametryzacją  $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ?



$$= \sum_{j=1}^M \langle \vec{F}(\gamma(s_j)), \frac{\gamma(s_{j+1}) - \gamma(s_j)}{s_{j+1} - s_j} \rangle \cdot (s_{j+1} - s_j)$$

↓ przy rozdrobnianiu podziału  
 $a = s_0 < s_1 < \dots < s_{M+1} = b$

$$\int_a^b \langle \vec{F}(\gamma(s)), \dot{\gamma}(s) \rangle ds$$

Stąd  $W = \int_a^b \langle F(\gamma(s)), \dot{\gamma}(s) \rangle ds =$

$$= \sum_{i=1}^n \int_a^b f_i(\gamma(s)) \dot{\gamma}_i(s) ds = \int_M \omega$$

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

gdzie  $\omega = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$ .

Stąd  $\int_M \omega$  to praca, jaką wykonuje siła

$\vec{F} = (f_1, \dots, f_n)$  przy "przechnięciu" punktu materialnego wzdłuż  $M$ .

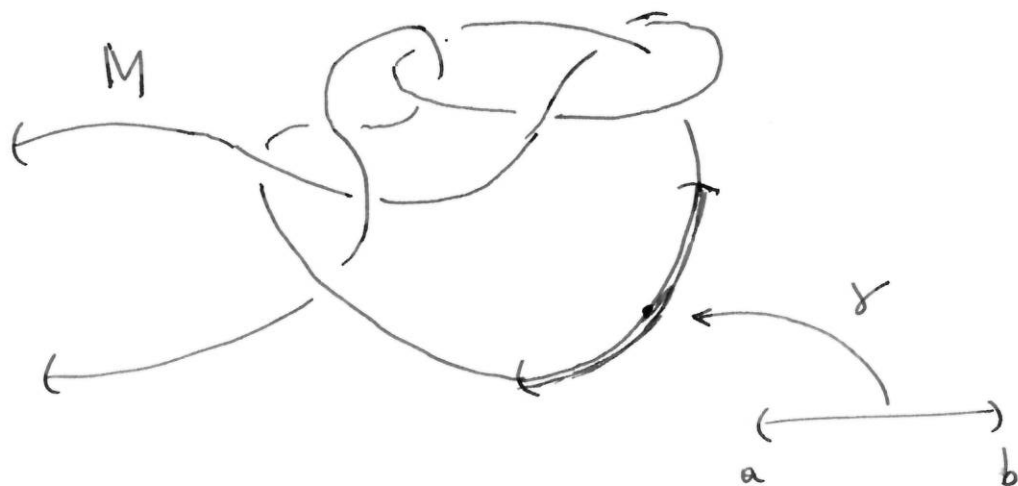
Ulośmódniemy teraz ważne twierdzenie, zwane czasem pierwowzorem Greena (choć, w zależności od krzyżki, narważ toż obdama się kilka różnych, blisko ze sobą związanych wzorów).

Przykład: Niech  $M = \gamma((a, b))$ , gdzie

$\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest parametryzacją.

Wtedy  $\int \pm \langle \dot{\gamma}(s), t(\gamma(s)) \rangle ds$  zadaje orientację na rozmaitości  $M$ .

Niech  $(M, \pm)$  będzie krzywą zorientowaną, i niech  $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  będzie lokalną parametryzacją  $M$ , tj.  $\forall_{s \in (a, b)} \gamma(s) \in M, \dot{\gamma}(s) \neq 0$ .



Albo dla ~~każdego~~  $s \in (a, b)$   $\dot{\gamma}(s)$  i  $t(\gamma(s))$  mają ten sam zwrot (tj.  $\langle \dot{\gamma}(s), t(\gamma(s)) \rangle > 0$ ), albo mają zwrot przeciwny ( $\langle \dot{\gamma}(s), t(\gamma(s)) \rangle < 0$ ); ten iloczyn skalarny nie może być zero (oba wektory mają ten sam kierunek i zaden się nie zeruje).

Jeżeli dla każdego  $s \in (a, b)$   $\dot{\gamma}(s)$  i  $t(\gamma(s))$  mają ten sam zwrot, to mówimy, że parametryzacja  $\gamma$  jest zgodna z orientacją krzywej  $M$ .

George Green (1793-1841) urodził się i zmarł w Sneinton koło Nottingham. Był synem piekara. W wieku 8 lat rozpoczął naukę w najlepszej szkole w Nottingham; naukę skończył ~~wieści~~ ~~z~~ po roku; ~~rents~~ ~~zycia~~ ~~praca~~ w młynie swojego ojca.

Nie jest jasne, kto go uczył matematyki - być może John Toplis, który studiował matematykę w Cambridge, po czym uczył w szkole powszechnej w Nottingham; mieszkali blisko siebie.

Green uczył się młc w zasadzie sam, cytując Transactions of the Royal Society of London, mając na głowie młyn, starych rolników i siedzących dzieci. W 1828 roku opublikował własnym sumptem "An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism" - dzieło fundamentalne dla teorii elektromagnetyzmu; po raz pierwszy pojawia się w nim m.in. pojęcie potencjału. W przyszłości zetknął się też Państwo z tw.

Funkcja Greena - fundamentalnym narzędziem w równaniach różniczkowych cząstkowych.

W wieku 40 lat ~~rozpoczął~~ ~~sta~~ Zachęcony pozytywnym odbiorem tej pracy i kilku następujących w wieku

40 lat porucił młyn i rozpoczął studia matematyczne w Cambridge, które ukończył w 1837 roku; przez kolejne ~~roku~~ ~~was~~ ~~porozstat~~ w 2 lata pracował na Uniwersytecie w Cambridge (Caius College), ale w 1840 r.

Zbiór otwarty i spójny  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  nazywamy  
obszarem w  $\mathbb{R}^n$ .

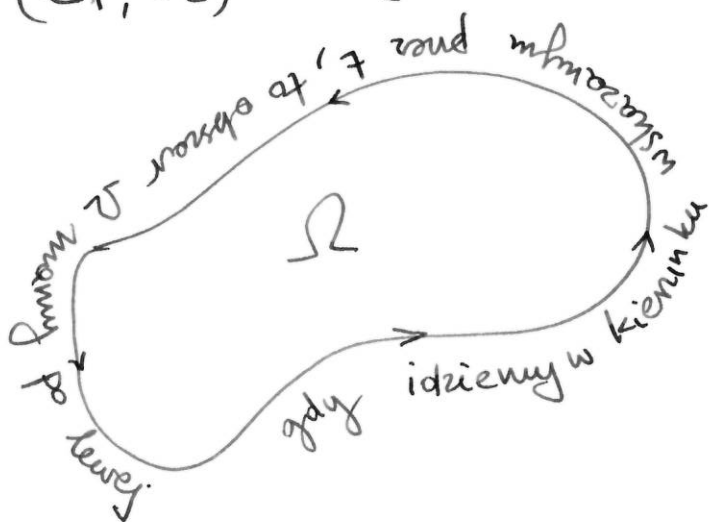
Mówimy, że obszar  $\Omega$  ma brzeg klasy  $C^k$ ,  
 jeżeli  $\partial\Omega$  jest rozmaitsią klasy  $C^k$ .

Niech teraz  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  będzie obszarem z brzegiem  
 klasy  $C^1$ . Mówimy, że brzeg ten ma naturalną

orientację, jeżeli  $\forall p \in \partial\Omega$  para  $(t(p), n(p))$ ,  
 gdzie  $t(p)$  jest wektorem stycznym do  $\partial\Omega$  w  $p$ ,  
 wyznaczającym orientację  $\partial\Omega$

$n(p)$  to wektor prostopadły do  $t(p)$ ,  
 skierowany do wnętrza  $\Omega$ ,

wyznacza tę samą orientację  $\mathbb{R}^2$  co baza  
 $(e_1, e_2)$  (a więc np  $\det(t(p), n(p)) > 0$ ).



← naturalna  
 orientacja  
 brzegu.

Dzisiejszy wykład zaczniemy od udowodnienia dwóch bardzo przydatnych lematów, przydatnych się w wielu dziedzinach analizy, a będących wnioskiem z udowodnionych już własności jedynki aproksymatywnej.

Lemat 1 (o istnieniu funkcji wycinającej)

Niech  $K \subset \mathbb{R}^n$  będzie zbiorem zwartym,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  otwartym i założymy, że  $K \subset \Omega$ . Wówczas istnieje funkcja  $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  taka, że  $\eta \equiv 1$  na  $K$  (a nawet na pewnym otoczeniu  $K$ ) i  $\eta \equiv 0$  poza  $\Omega$ ,  $0 \leq \eta \leq 1$ . ( $\eta$  nazywamy funkcją wycinającą)

Dowód: Ustalmy  $\varepsilon > 0$  takie, że  $\varepsilon < \frac{1}{5} \text{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$  i przyjmijmy  $K_{2\varepsilon} = \{x+y : x \in K, y \in B(0, 2\varepsilon)\} = K + B(0, 2\varepsilon)$   
 $= \{z \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(z, K) < 2\varepsilon\}$

To, jak łatwo sprawdzić, jest zbiór otwarty zawarty w  $\Omega$  i zawierający  $K$ .

Niech teraz  $(\varphi_\varepsilon)_\varepsilon$  będzie jedynką aproksymatywną.

Wykażemy, że  $\eta = \chi_{K_{2\varepsilon}} * \varphi_\varepsilon$  jest sukkawą funkcją wycinającą.

Gładkość  $\eta$  wynika wprost z własnością splotu i gładkością  $\varphi_\varepsilon$ .



To, że  $0 \leq \eta \leq 1$ , też wynika z definicji:

$$(*) \quad \eta(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{K_{2\varepsilon}}(y) \varphi_\varepsilon(x-y) d\lambda_n(y) \geq 0$$

(bo to całka z funkcji nieujemnej)

$$\begin{aligned} i \quad \eta(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{K_{2\varepsilon}}(y) \varphi_\varepsilon(x-y) d\lambda_n(y) \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y) d\lambda_n(y) = 1. \end{aligned}$$

Niech teraz  $x \in K_\varepsilon = K + B(0, \varepsilon) \supset K$ .

Jeżeli  $\varphi_\varepsilon(x-y) \neq 0$ , to  $\|x-y\| < \varepsilon$  (bo  $\text{supp } \varphi_\varepsilon \subset B(0, \varepsilon)$ )

$$\Downarrow \\ y \in K_\varepsilon + B(0, \varepsilon) = K_{2\varepsilon}$$

Stąd  $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{K_{2\varepsilon}}(y) \varphi_\varepsilon(x-y) d\lambda_n(y) =$

$$= \int_{\{\varphi_\varepsilon(x-y) \neq 0\}} \chi_{K_{2\varepsilon}}(y) \varphi_\varepsilon(x-y) d\lambda_n(y) = \int_{\{\varphi_\varepsilon(x-y) \neq 0\}} \varphi_\varepsilon(x-y) d\lambda_n(y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y) d\lambda_n(y) = 1$$

Jeżeli natomiast  $x \notin U$ , to  $\text{dist}(x, K_{2\varepsilon}) > 3\varepsilon$ .

Jeżeli więc  $\|x-y\| < \varepsilon$ , to  $\text{dist}(y, K_{2\varepsilon}) > 2\varepsilon > 0$ , więc  $\chi_{K_{2\varepsilon}}(y) = 0$ , a jeżeli  $\|x-y\| \geq \varepsilon$ , to drugi czynnik

funkcji podcałkowej w definicji  $\eta$  (patrz \*), czyli  $\varphi_\varepsilon(x-y)$ , jest równy zero.

Stąd  $\eta(x) = 0$ . (zauważmy, że w nieczyistości

$\eta \equiv 0$  poza  $K_{3\varepsilon} = K + B(0, 3\varepsilon)$ );  $\square$

~~i dodatkowo niemy,  $K_{3\varepsilon} \cap K = \emptyset$~~

Lemat 2 (Gładki rozkład jednostki).

Niech  $U_1, \dots, U_N$  będzie pokryciem zbioru zwarteo  $K \subset \mathbb{R}^n$  (tj  $U_1, \dots, U_N \subset \mathbb{R}^n$  są otwarte i  $K \subset \bigcup_{i=1}^N U_i$ ).

Istnieją wówczas funkcje  $\zeta_i \in C_0^\infty(U_i)$ ,  $i=1, \dots, N$ ,

takie, że  $\zeta_i \geq 0$  oraz  $\zeta_1 + \dots + \zeta_N \equiv 1$

na pewnym zbiorze otwartym  $W \subset \mathbb{R}^n$  takim,

że  $K \subset W \subset \bigcup_{i=1}^N U_i$

(rozkładamy funkcje stałe równe 1 na  $K$  na sumę funkcji gładkich, których nośniki zawarte są w zadanych zbiorach  $U_i$ )

Dowód:

Niech  $\lambda > 0$  będzie liczbą Lebesgue'a pokrycia  $\{U_i\}$ , tj taka liczba, że  $\forall x \in K \exists_{i \in \{1, \dots, N\}} B(x, \lambda) \subset U_i$ .  
Ustalmy  $0 < \varepsilon < \lambda/3$ .

Niech teraz  $K_i = \{x \in K : \text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus U_i) \geq \varepsilon\}$

Zbiory  $K_i$  są zwarte (jako domknięte podzbiory zwartego  $K$ ). Co więcej,  $K \subset \bigcup_{i=1}^N K_i$ ,

bo jeżeli  $x \in K$ , to  $\exists_i B(x, 3\varepsilon) \subset B(x, \lambda) \subset U_i$ , więc  $\text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus U_i) \geq 3\varepsilon \Rightarrow x \in K_i$ .

Oczywiście też  $K_i \subset U_i$ , a nawet

$V_i = K_i + B(0, \varepsilon) \subset U_i$ , bo jeżeli  $z \in V_i$ , to

$\exists_{\substack{x \in K_i \\ y \in B(0, \varepsilon)}} z = x + y$ , więc  $\text{dist}(z, \mathbb{R}^n \setminus U_i) \geq \underbrace{\text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus U_i)}_{\geq 3\varepsilon} - \underbrace{\|y\|}_{< \varepsilon} > 0 \Rightarrow z \in U_i$ .

Stąd w szczególności  $V_i \subset U_i$  i  $\overline{V_i}$  są zwarte.

Podobnie  $K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_N = K \subset V_1 \cup \dots \cup V_N = V$   
zwarte otwarty.

~~Stąd~~ Z lematu o funkcjach nycinających

istnieją:  $\eta \in C_0^\infty(V)$ ,  $0 \leq \eta \leq 1$ ,  $\eta \equiv 1$  na  $\mathbb{K}$   
 pewnym  $W$  otwartym  
  $K \subset W \subset V$

oraz  $\varphi_i \in C_0^\infty(U_i)$ ,  $0 \leq \varphi_i \leq 1$ ,

$\varphi_i \equiv 1$  na  $G_i$  otwartym,  $\mathbb{K}_i \overline{V_i} \subset G_i \subset U_i$

No i biernomy

$$\zeta_i(x) = \begin{cases} \frac{\varphi_i(x)}{\sum_{j=1}^N \varphi_j(x)} \cdot \eta(x) & x \in V \\ 0 & x \notin V \end{cases}$$

Zauważmy, że  $\sum_{j=1}^N \varphi_j > 0$  dla  $x \in V$ , więc  
w powyższej definicji nie dzielimy przez zero;  
 $\zeta_i$  jest też gładka, bo  $\eta$  jest równa zero  
w pobliżu brzegu  $V$  (ma nośnik zwartej, zwartej  
w  $V$ );  $\zeta_i \geq 0$  i  $\sum_{i=1}^N \zeta_i = \eta \equiv 1$  na  $W \supset K$ .

□.

## Twierdzenie (Greena)

Niech  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  będzie obszarem ograniczonym z brzegiem klasy  $C^1$ , zorientowanym naturalnie.

Niech  $U \supset \bar{\Omega}$  będzie otwartym podzbiorem  $\mathbb{R}^2$  i niech  $f, g \in C^1(U)$ .

Wówczas

$$\int_{\partial\Omega} g dy = \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x} d\lambda_2$$

$$- \int_{\partial\Omega} f dx = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} d\lambda_2$$

(co często zapisuje się jako  $\int_{\partial\Omega} (f dx + g dy) = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\lambda_2$ )

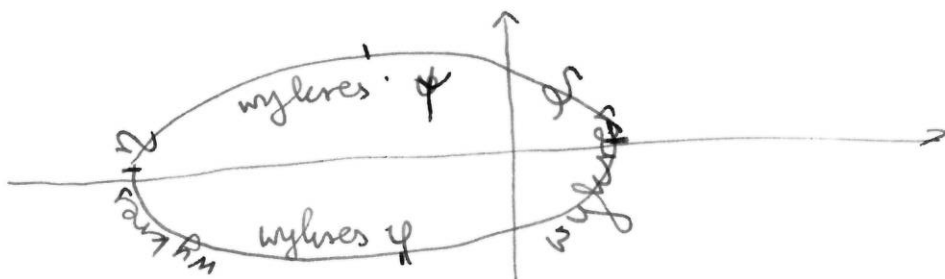
## Dowód

Zaczniemy od szczególnej sytuacji: gdy obszar jest z każdej strony ograniczony wykresem

funkcji: istnieją funkcje  $\varphi, \psi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$   
oraz  $\eta, \zeta: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$

takie, że

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (a, b), \varphi(x) < y < \psi(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in (c, d), \eta(y) < x < \zeta(y)\}. \end{aligned}$$



Mamy wtedy

$$\int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x} d\lambda_2 \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_c^d \left( \int_{\eta(y)}^{\xi(y)} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) dx \right) dy =$$

$$= \int_c^d (g(\xi(y), y) - g(\eta(y), y)) dy \quad \triangle$$

Zauważmy, że  $\partial\Omega$  możemy rozłożyć na wylines  $\xi$  i wylines  $\eta$ .

Ten pierwszy jest sparametryzowany przez  $\gamma_+ : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma_+(y) = (\xi(y), y)$

i, jak łatwo sprawdzić, jest to parametryzacja zgodna z naturalną parametryzacją  $\partial\Omega$ .

$$\text{Stąd} \quad \int_c^d g(\xi(y), y) dy = \int g dy \quad \odot$$

$$\stackrel{\text{wylines } \xi \parallel}{=} \int_c^d g(\gamma(y)) \underbrace{\gamma_2'(y)}_{=1} dy$$

Analogicznie druga część  $\partial\Omega$ , czyli wylines  $\eta$ , jest sparametryzowana przez  $\gamma_- : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma_-(y) = (\eta(y), y)$ , ale tym razem  $\delta$  wyznacza orientację przeciwną do naturalnej orientacji  $\partial\mathbb{R}$ , stąd

$$\int_c^d g(\eta(y), y) dy = - \int g dy \quad \otimes$$

wylines  $\eta$ .

Odejmując  $\otimes$  od  $\odot$  otrzymujemy

$$\int_{\partial\Omega} g dy = \int_{\text{wykres } \zeta} g dy + \int_{\text{wykres } \eta} g dy = \int_c (g(\zeta(y), y) - g(\eta(y), y)) dy$$

co w połączeniu z  $\Delta$  daje pierwszą część tezy.

Drugą otrzymujemy rozważając  $f$  w miejsce  $g$  i dzieląc  $\partial\Omega$  na wykresy  $\varphi$  i  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} d\lambda_2 &= \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy \right) dx = \\ &= \int_a^b f(x, \psi(x)) dx - \int_a^b f(x, \varphi(x)) dx = \end{aligned}$$



teraz wykres  $\varphi$  jest sparametryzowany  $(x \mapsto (x, \varphi(x)))$  w sposób naturalny,

a wykres  $\psi$  - przeciwnie. Dlatego przez  $(x \mapsto x, \psi(x))$

$$\rightarrow = - \int_{\text{wykres } \psi} f dx - \int_{\text{wykres } \varphi} f dx = - \int_{\partial\Omega} f dx.$$

Przypadek ogólny wymaga więcej rozważań  
jedności.

Pokrywamy  $\overline{\Omega}$  prostokątami: dla każdego  $p \in \overline{\Omega}$   
wybieramy prostokąt  $Q_p$  środku w  $p$  i bokach  
równoległych do osi współrzędnych taki, by

• jeżeli  $p \in \Omega$ , to  $Q_p \subset \Omega$

• jeżeli  $p \in \partial\Omega$ , to  $Q_p = (a, b) \times (c, d) \subset U$  jest

taki, by  $Q_p \cap \partial\Omega$  było wykresem funkcji

zmienniej  $x$  lub zmienniej  $y$ : istnieje  $\varphi: (a, b) \rightarrow (c, d)$

taka, że  $Q_p \cap \partial\Omega = \{(x, \varphi(x)) : x \in (a, b)\}$

lub  $\varphi: (c, d) \rightarrow (a, b) : Q_p \cap \partial\Omega = \{(\varphi(y), y) : y \in (c, d)\}$

Zbiór  $\overline{\Omega}$  jest zwarty, więc z pokrycia  $\{Q_p\}_{p \in \overline{\Omega}}$   
możemy wybrać pokrycie skończone  $Q_1, \dots, Q_N$

Możemy założyć, że  $Q_1, \dots, Q_k$  mają niepustą część  
wspólną z  $\partial\Omega$ , zaś  $Q_{k+1}, \dots, Q_N$  są w całości  
zawarte w  $\Omega$ .

Niech teraz  $\{\psi_\ell\}_{\ell=1}^N$  będzie rozkładem jedności  
wpisanym w pokrycie  $\{Q_1, \dots, Q_N\}$ , tzn dla  $\ell=1, \dots, N$   
 $\psi_\ell \in C_0^\infty(Q_\ell)$ ,  $\psi_\ell$  są nieujemne i  $\sum_{\ell=1}^N \psi_\ell \equiv 1$  na  
pełnym otoczeniu  $\overline{\Omega}$ .



Mamy wówczas

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} d\lambda_2 = \int_{\Omega} \left( \sum_{l=1}^N \psi_l \right) \frac{\partial f}{\partial y} d\lambda_2 = \sum_{l=1}^N \int_{\Omega} \psi_l \frac{\partial f}{\partial y} d\lambda_2$$

$$= \sum_{l=1}^N \int_{\Omega \cap Q_l} \psi_l \frac{\partial f}{\partial y} d\lambda_2 = \sum_{l=1}^N \int_{\Omega \cap Q_l} \left( \frac{\partial (f \cdot \psi_l)}{\partial y} - f \frac{\partial \psi_l}{\partial y} \right) d\lambda_2 =$$

$$= \sum_{l=1}^N \int_{\Omega \cap Q_l} \frac{\partial F_l}{\partial y} d\lambda_2 - \underbrace{\sum_{l=1}^N \int_{\Omega \cap Q_l} f \frac{\partial \psi_l}{\partial y} d\lambda_2}_{=0} =$$

$F_l = f \cdot \psi_l$

$$= \int_{\Omega} f \frac{\partial}{\partial y} \left( \underbrace{\sum_{l=1}^N \psi_l}_{=1} \right) d\lambda_2 = 0$$

$$= \sum_{l=1}^N \int_{\Omega \cap Q_l} \frac{\partial F_l}{\partial y} d\lambda_2 = 0$$

Teraz przyjrzmy się  $\int_{\Omega \cap Q_l} \frac{\partial F_l}{\partial y} d\lambda_2$  dla różnych

przypadków:

Przypadek 1 :  $l > k$ , czyli  $Q_l \subset \Omega$ .

$$Q_l = (a, b) \times (c, d)$$

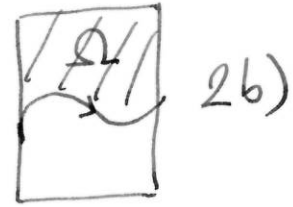
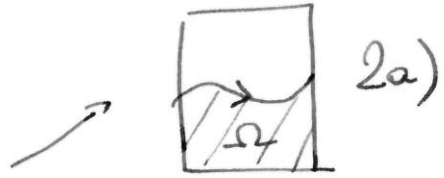
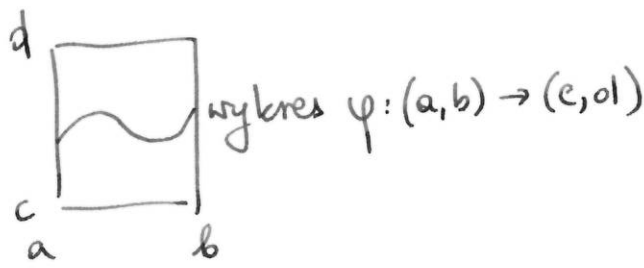
$$\text{Wtedy } \int_{\Omega \cap Q_l} \frac{\partial F_l}{\partial y} d\lambda_2 = \int_a^b \left( \int_c^d \frac{\partial F_l}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b (F_l(x, d) - F_l(x, c)) dx$$

$\uparrow$  to jest równe 0,  
 bo  $\text{supp } F_l \subset Q_l$

$$= 0.$$

## Przypadek 2

$\partial\Omega \cap Q_x$  jest wykresem funkcji zmiennej  $x$ :



$$2a) \int_{Q_x \cap \Omega} \frac{\partial F_x}{\partial y} d\lambda_2 = \int_a^b \int_c^{\varphi(x)} \frac{\partial F_x}{\partial y} dy dx = \int_a^b (F_x(x, \varphi(x)) - \underbrace{F_x(x, c)}_0) dx$$

$$= \int_a^b F_x(x, \varphi(x)) dx =$$

$\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (t, \varphi(t))$  jest parametryzacją  $\partial\Omega$ , niezgodną z naturalną parametryzacją  $\partial\Omega$ ;  $\gamma'_1(x) = 1$ .

Stąd

$$\rightarrow = - \int_{Q_x \cap \partial\Omega} F_x dx$$

2b) prawie tak samo:

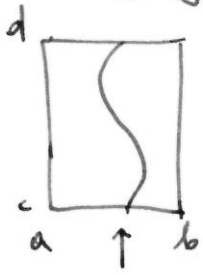
$$\int_{Q_x \cap \Omega} \frac{\partial F_x}{\partial y} d\lambda_2 = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^d \frac{\partial F_x}{\partial y} dy dx = \int_a^b (F_x(x, d) - \underbrace{F_x(x, \varphi(x))}_0) dx$$

$$= - \int_a^b F_x(x, \varphi(x)) dx = - \int_{Q_x \cap \partial\Omega} F_x dx.$$

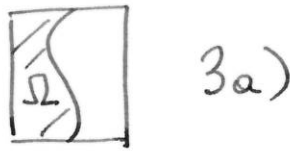
tym razem ~~orientacja~~ parametryzacja  $\partial\Omega \cap Q_x$  jest zgodna z naturalną ~~para~~ orientacją  $\partial\Omega$ .

Przypadek 3  $\partial\Omega \cap Q_c$  jest wykresem funkcji

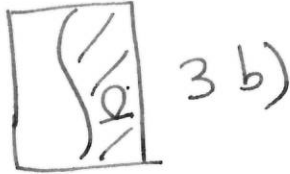
zmienniej  $y$ :



wykreś  $\varphi: (c,d) \rightarrow (a,b)$



3a)



3b)

Funkcja  $F_c$  jest zdefiniowana na macie tylko na  $U$ , ale ma nośnik zwarty, zawarty w  $Q_c$  - możemy więc przedłużyć ją (kładąc  $F_c \equiv 0$  poza  $U$ ) do funkcji na  $\mathbb{R}^2$ .

$$3a) \int_{\Omega \cap Q_c} \frac{\partial F_c}{\partial y} d\lambda_2 = \int_c^d \int_a^b \frac{\partial F_c}{\partial y} dx dy = \int_c^d \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_c}{\partial y} dx dy$$

$$= \int_c^d \int_{-\infty}^0 \frac{\partial F_c}{\partial y} (t + \varphi(y), y) dt dy = \square$$

zamiana zmiennych

$$x = t + \varphi(y)$$

$$dx = dt$$

Niech  $\Phi(t, y) = F_c(t + \varphi(y), y)$ . Mamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial y}(t, y) &= \frac{\partial F_c}{\partial x}(t + \varphi(y), y) \cdot \varphi'(y) + \frac{\partial F_c}{\partial y}(t + \varphi(y), y) \\ &= \frac{\partial F}{\partial y} = F_c(t + \varphi(c), c) \\ &= F(t, d) = F_c(t + \varphi(d), d) \end{aligned}$$

Co więcej,  $\Phi(t + \varphi(c), c)$  i  $\Phi(t + \varphi(d), d) = 0$  dla wszystkich  $t \in \mathbb{R}$ . Stąd

$$\int_c^d \frac{\partial \Phi}{\partial y}(t, y) dy = 0 \Rightarrow \int_c^d \int_{-\infty}^0 \frac{\partial \Phi}{\partial y}(t, y) dt dy = \int_{-\infty}^0 \int_c^d \frac{\partial \Phi}{\partial y}(t, y) dy dt = 0$$

$$\begin{aligned}
 i \quad \square &= \int_c^d \int_{-\infty}^0 \left( -\frac{\partial F_x}{\partial x}(t+\varphi(y), y) \varphi'(y) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(t, y) \right) dt dy \\
 &= \int_c^d \varphi'(y) \int_{-\infty}^0 -\frac{\partial F_x}{\partial x}(t+\varphi(y), y) dt dy = \\
 &= - \int_c^d \varphi'(y) \int_{-\infty}^{\varphi(y)} \frac{\partial F_x}{\partial x}(x, y) dx dy = - \int_c^d \varphi'(y) (F_x(\varphi(y), y) - 0) dy \\
 &= - \int_c^d F_x(\varphi(y), y) \cdot \varphi'(y) dy =
 \end{aligned}$$

$\gamma$   
 $(c, d)$   $\rightarrow (\varphi(y), y)$  parametryzuje  $\partial\Omega \cap Q_x$  zgodnie z naturalną orientacją  $\partial\Omega$ ;  
 $\gamma_1'(y) = \varphi'(y)$

$$\rightarrow = - \int_{Q_x \cap \partial\Omega} F_x dx$$

Przypadek 3b) podobnie; zostawiam go Państwu.

$$\begin{aligned}
 \otimes &= \sum_{l=1}^k \int_{Q_l \cap \partial\Omega} \frac{\partial F_l}{\partial y} d\lambda_2 = - \sum_{l=1}^k \int_{Q_l \cap \partial\Omega} F_l dx = \\
 &= - \sum_{l=1}^k \int_{Q_l \cap \partial\Omega} f \cdot \psi_l dx = - \int_{\partial\Omega} f \cdot \sum_{l=1}^k \psi_l dx = - \int_{\partial\Omega} f dx.
 \end{aligned}$$

Drugi wór w tw. Greena dowodzi się tak samo, różnica w znaku bierze się stąd, że zamiana  $x \leftrightarrow y$  (cykli symetria wzgl.  $x=y$ ) odwraca orientację  $\mathbb{R}^2$ .

□

# Krótka rekapitulacja o formach

Niech  $U \subset \mathbb{R}^n$  będzie zbiorem otwartym.

Stąd  $k$ -forma różniczkowa na  $U$  to funkcja

$$U \xrightarrow{\omega} \text{formy } k\text{-liniowe na } \mathbb{R}^n = \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$$

↑  
tzn. przekształcenia  
antysymetryczne

więc  $\forall x \in U$  mamy  $\omega(x) : (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$   
 $k$ -liniowe, antysymetryczne.

Mozemy zatem napisać też, że

$$\omega : U \times (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \mapsto \omega(x; \underbrace{\xi_1, \dots, \xi_k}_{\substack{\text{liniowe we wszystkich} \\ \text{pozostałych}}}})$$

↑  
 $C^\infty$  w pierwszej  
zmiennej

i antysymetryczne  
w tych  $k$  zmiennych

## Przykłady na $\mathbb{R}^3$

1-formy są postaci  $\omega = f(x) dx + g(y) dy + h(z) dz$

$$\omega = f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz$$

Jeżeli  $v(x, y, z) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$   
jest polem wektorowym na  $\mathbb{R}^3$ , to

$$\begin{aligned} \omega((x, y, z); v(x, y, z)) &= f(x, y, z) v_1(x, y, z) + g(x, y, z) v_2(x, y, z) + \\ &\quad + h(x, y, z) v_3(x, y, z) = \\ &= \langle (f, g, h), (v_1, v_2, v_3) \rangle \end{aligned}$$

## 2-formy w postaci

$$\omega = f(x,y,z) dx \wedge dy + g(x,y,z) dx \wedge dz + h(x,y,z) dy \wedge dz$$

2-forma działa na parę pól wektorowych;

$$\text{niech } \xi = \xi(x,y,z) = (\xi_1(x,y,z), \xi_2(x,y,z), \xi_3(x,y,z))$$

$$\zeta = \dots = (\zeta_1(x,y,z), \zeta_2(x,y,z), \zeta_3(x,y,z))$$

$$\begin{aligned} \omega((x,y,z); \xi, \zeta) &= f(x,y,z) (dx(\xi) dy(\zeta) - dx(\zeta) dy(\xi)) \\ &\quad + g(x,y,z) (dx(\xi) dz(\zeta) - dx(\zeta) dz(\xi)) \\ &\quad + h(x,y,z) (dy(\xi) dz(\zeta) - dy(\zeta) dz(\xi)) \\ &= f(\xi_1 \zeta_2 - \zeta_1 \xi_2) + g(\xi_1 \zeta_3 - \zeta_1 \xi_3) \\ &\quad + h(\xi_2 \zeta_3 - \zeta_2 \xi_3) \end{aligned}$$

## 3-formy w postaci

$$\omega = f(x,y,z) dx \wedge dy \wedge dz$$

działa na trójki pól wektorowych

$$\omega((x,y,z), \xi, \zeta, \chi) = f \det(\xi, \zeta, \chi) =$$

$$= f(x,y,z) \cdot \begin{vmatrix} \xi_1 & \zeta_1 & \chi_1 \\ \xi_2 & \zeta_2 & \chi_2 \\ \xi_3 & \zeta_3 & \chi_3 \end{vmatrix}$$

## Tw. Greena i jego konsekwencje

Przypomnienie: Niech  $M \subset \mathbb{R}^n$  będzie krzywą zorientowaną, skończonej długości,  $M \subset U \subset \mathbb{R}^n$  i niech  $U$  otwarty

$\gamma: (a, b) \rightarrow M$  będzie jej parametryzacją, zgodną z orientacją  $M$ . Wtedy jeżeli  $\omega = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$  jest formą kl.  $C^1$  na  $U$ , to

$$\int_M \omega = \int_a^b \sum_{j=1}^n f_j(\gamma(t)) \gamma_j'(t) dt$$

## Tw. (Greena)

Niech  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  będzie obszarem ograniczonym z brzegiem klasy  $C^1$ ;  $\bar{\Omega} \subset U \subset \mathbb{R}^2$  i niech  $f, g \in C^1(U)$ . Założymy też, że  $\partial\Omega$  ma naturalną orientację. Wówczas

para: wektor styczny do  $\partial\Omega$ , wektor prostopadły, wskazujący do środka jest dodatnio zorientowana baza  $\mathbb{R}^2$ .

$\int_{\partial\Omega}$

$$\int_{\partial\Omega} g dy = \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x} dx \quad \text{ oraz } \quad \int_{\partial\Omega} f dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} dx$$

Pytanie: Kiedy pole wektorowe  $(f, g)$  klasy  $C^1$  na  $U \subset \mathbb{R}^2$  jest gradientem pewnej funkcji  $h \in C^2(U)$ , tj.  $f = \frac{\partial h}{\partial x}$ ,  $g = \frac{\partial h}{\partial y}$ ?

Oczywiście mamy lemat Schwarz'a:

jeżeli  $h \in C^2$ ,  $f = \frac{\partial h}{\partial x}$ ,  $g = \frac{\partial h}{\partial y}$ ,

$$\text{to } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Czy warunkiem  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ , oczywiście konieczny, jest również dostateczny?

Stwierdzenie: Jeżeli istnieje  $h \in C^2(U)$  taka, że  $(f, g) = \nabla h$ , to dla każdej kłowej zamkniętej  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ , która jest ławałkami  $C^1$ ,

$$\int_{\gamma} (f dx + g dy) = 0.$$

Dowód:  $\int$  Niech  $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  będzie parametryzacją kłowej  $\gamma$ ;  $\gamma(a) = \gamma(b) \in \mathbb{R}^2 \setminus U$ .

$$\int_{\gamma} (f dx + g dy) = \int_a^b (f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_1'(t) + g(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_2'(t)) dt$$

$$= \int_a^b \left( \frac{\partial h}{\partial x}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_1'(t) + \frac{\partial h}{\partial y}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_2'(t) \right) dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} (h(\gamma_1(t), \gamma_2(t))) dt = h(\gamma_1(b), \gamma_2(b)) - h(\gamma_1(a), \gamma_2(a)) = 0$$

□

Gdybyśmy wiedzieli, że  $\gamma$  jest brzegiem pewnej  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , moglibyśmy skorzystać z tw. Greena:

$$\int_{\gamma} (f dx + g dy) = \int_{\partial \Omega} \left( \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy \right) = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} \right) d\lambda_2 = 0$$



Niech jednak  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$f(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad g(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Proszę sprawdzić, że  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$  we wszystkich punktach  $U$ ,

ale biorąc za  $\gamma$  okrąg jednostkowy

$$\gamma: (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

maemy

$$\int_{\gamma} (f dx + g dy) = \int_0^{2\pi} \left( -\frac{\sin t}{\sin^2 t + \cos^2 t} \cdot (-\sin t) + \frac{\cos t}{\sin^2 t + \cos^2 t} \cdot \cos t \right) dt$$

$\begin{matrix} \text{f}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) & \gamma_1'(t) \\ \text{g}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) & \gamma_2'(t) \end{matrix}$

$$= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0,$$

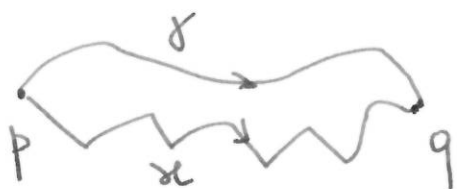
nie  $(f, g)$  nie<sup>o</sup> jest gradientem żadnej  $h$ ,  
choć spełnia warunki  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ .

## Twierdzenie

Niech  $U \subset \mathbb{R}^2$  będzie obszarem. Jeżeli  $f, g \in C^1(U)$  i dla każdej kłuywej zamkniętej  $\gamma$  całkowani klasy  $C^1$  zachodzi  $\int_{\gamma} (f dx + g dy) = 0$ , to istnieje funkcja  $h$  klasy  $C^2(U)$  taka, że  $(f, g) = \nabla h$ .

## Szkic dowodu

Ustalmy  $p \in U$ . Dla dowolnego  $q \in U$  istnieje kłuywa  $\gamma$  klas.  $C^1$  (np. Tamana) łącząca punkty  $p$  i  $q$  i leżąca w  $U$  (obszar to zbiór otw. spójny).



jeżeli mamy dwie takie kinywe, to kinywa  $\gamma - \alpha$  (najpierw  $\gamma$ , potem  $\alpha$  do tyłu) jest kinywą zamkniętą, stąd

$$0 = \int_{\gamma - \alpha} (f dx + g dy) = \int_{\gamma} (f dx + g dy) - \int_{\alpha} (f dx + g dy)$$

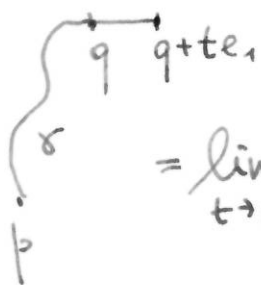
Stąd wartość całki

$\int_{\gamma} (f dx + g dy)$  jest taka sama dla wszystkich

kinywek  $\gamma$  łączących  $p$  i  $q$ .

Postawmy  $h(q) = \int_{\gamma} (f dx + g dy)$ . Wtedy

$$\frac{\partial h}{\partial x}(q) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(q + te_1) - h(q)}{t} =$$



$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[ \int_{\gamma + [q, q+te_1]} (f dx + g dy) - \int_{\gamma} (f dx + g dy) \right] =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{[q, q+te_1]} (f dx + g dy) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t f(x+s, y) ds = f(x, y) = f(q).$$

przyjmujemy  $q = (x, y)$

$$\text{i tak samo } \frac{\partial h}{\partial y}(q) = g(q).$$

□

Kluczowe, choć nietrywialne pojęcie z topologii algebraicznej:

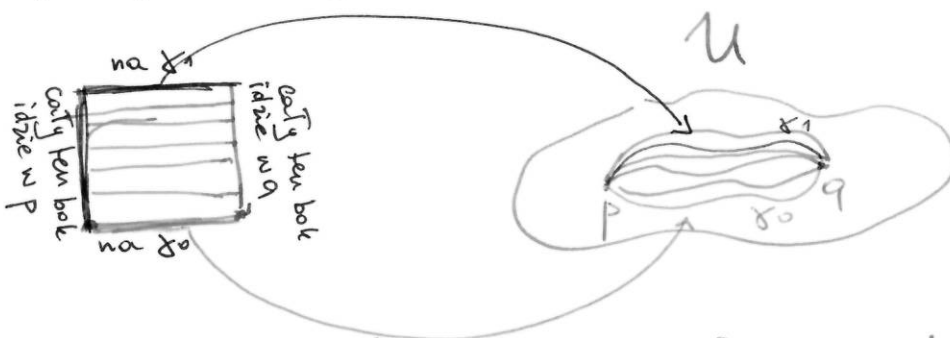
Mówimy, że dwie linywe

$\gamma_i : [0,1] \rightarrow U \quad i=0,1$   
 $\gamma_i(0)=p \quad \gamma_i(1)=q$   
 są homotopijne, gdy istnieje

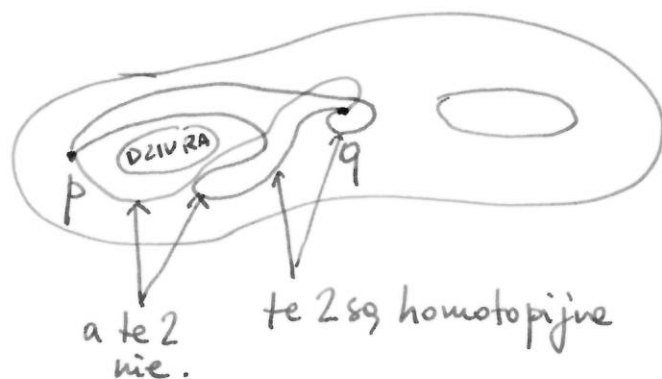
$H : [0,1]^2 \rightarrow U$  ciągła taka, że

1)  $H(t,0) = p$ ,  $H(t,1) = q$  dla wszystkich  $t \in [0,1]$

2)  $H(0,s) = \gamma_0(s)$ ,  $H(1,s) = \gamma_1(s)$



nieznacznie tylko upraszczając - dwie drogi są homotopijne, gdy możemy, nie ruszając końców, jedną z nich zdeformować w sposób ciągły do drugiej



Twierdzenie Niech  $\Omega$  będzie obszarem  
jednostajnym, tzn. takim, że dowolne 2 krzywe  
o wspólnych końcach są homotopijne  
(poglądowo - zbiór otwarty bez dziur:  
cała  $\mathbb{R}^2$ , półprzeczyna,  
względnie wielokąt wypukłego,  
kula otwarta,



każdy dyfemorficzny obraz kuli otwartej) i  
i niech  $f, g \in C^1(\Omega)$  spełniają

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{dla wszystkich na } \Omega.$$

Wtedy istnieje  $h \in C^2(\Omega)$  tż  $\frac{\partial h}{\partial x} = f, \frac{\partial h}{\partial y} = g.$

Szkie dowodu w skrypcie Stredziekiego;

$h$  konstruuje się tak samo, jak w poprzednim  
przypadku, trzeba tylko wykazać, że z  
założeń wynika, że całka

$$\int_{\gamma} f dx + g dy \quad \text{gdzie } \gamma(0) = p, \gamma(1) = q$$

nie zależy od wyboru łamyrej  $\gamma$  (a tylko od jej  
końców).

Wróćmy do  $k$ -form. Co możemy z nimi robić?

• mamy iloczyn zewnętrzny

Jeżeli  $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n \setminus U)$ ,  $\eta \in \Omega^l(U)$ ,

to  $\omega \wedge \eta$  jest  $k+l$ -formą różniczkową; znak permutacji

$$(\omega \wedge \eta)(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k+l}) = \sum_{\sigma \in \Sigma_{k+l}} \text{sgn } \sigma \cdot \omega(\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \dots, \xi_{\sigma(k)}) \cdot \eta(\xi_{\sigma(k+1)}, \dots, \xi_{\sigma(k+l)})$$

permutacje  $k+l$  elementów

myślę, że paskudnie, ale w praktyce łatwiej:

Niech  $\omega = f dx + g dy + h dz + k dw$  1-forma w  $\mathbb{R}^4$

$\eta = a dx \wedge dy + b dx \wedge dz + c dz \wedge dw$  2-forma w  $\mathbb{R}^4$

$$\omega \wedge \eta = (f dx + g dy + h dz + k dw) \wedge (a dx \wedge dy + b dx \wedge dz + c dz \wedge dw)$$

$$= a f \underbrace{dx \wedge dx \wedge dy}_{=0} + b f \underbrace{dx \wedge dx \wedge dz}_{=0} + c f \underbrace{dx \wedge dz \wedge dw}$$

$$+ a g \underbrace{dy \wedge dx \wedge dy}_{=0} + b g \underbrace{dy \wedge dx \wedge dz} + c g \underbrace{dy \wedge dz \wedge dw}$$

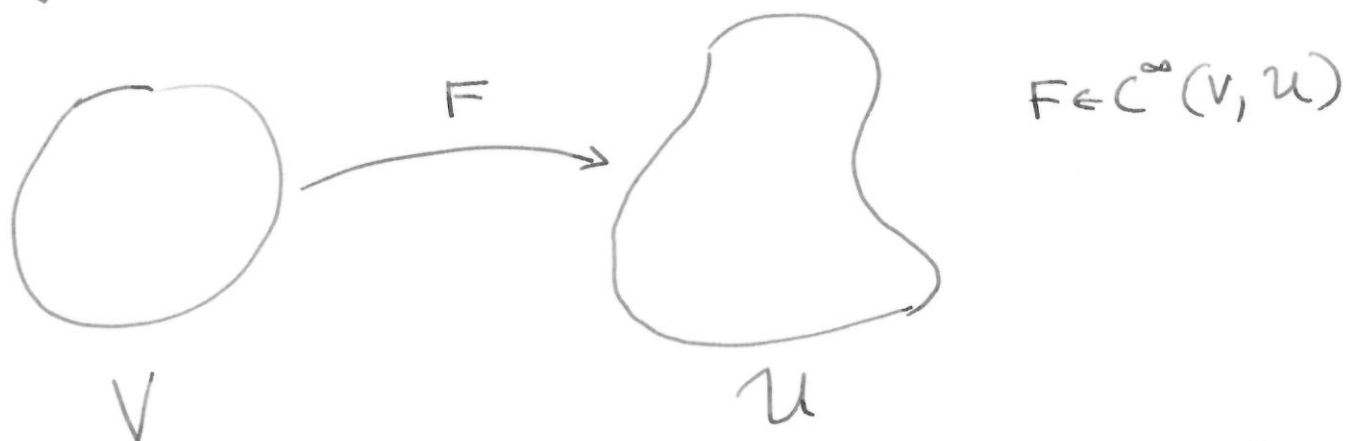
$$+ a h \underbrace{dz \wedge dx \wedge dy} + b h \underbrace{dz \wedge dx \wedge dz}_{=0} + c h \underbrace{dz \wedge dz \wedge dw}_{=0}$$

$$+ a k \underbrace{dw \wedge dx \wedge dy} + b k \underbrace{dw \wedge dx \wedge dz} + c k \underbrace{dw \wedge dz \wedge dw}_{=0} =$$

$$= (c f + b k) dx \wedge dz \wedge dw + (-b g + a h) dx \wedge dy \wedge dz$$

$$+ c g dy \wedge dz \wedge dw + a k dx \wedge dy \wedge dw$$

Mamy precyzyjnie formę, które jest uogólnieniem złożenia funkcji



Jeżeli mamy  $f \in C^{k, \infty}(U)$ , to przy pomocy  $F$

możemy dostać funkcję  $g \in C^\infty(V)$ :

$$g = f \circ F$$

funkcja  $g$  jest "precyzyjnie"  $f$  na zbiorze  $V$

Jeżeli mamy  $\omega \in \Omega^k(U)$ , to definiujemy

$$\eta = F^* \omega \in \Omega^k(V)$$

precyzyzacja  $\omega$  za pomocą  $F$

$$F^* \omega(x; \xi_1, \dots, \xi_k) =$$

$$= \omega(F(x); DF(x)\xi_1, \dots, DF(x)\xi_k)$$

Precyzyzacja jest liniowa, łatwo też można sprawdzić następujące własności:

# Twierdzenie

Niech 
$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{G} & V & \xrightarrow{F} & W \\ \hat{\mathbb{R}}^n & & \hat{\mathbb{R}}^m & & \hat{\mathbb{R}}^p \end{array}$$

(1) Jeżeli  $\omega \in \Omega^k(W)$ , to  $G^* F^* \omega = \underbrace{(F \circ G)^* \omega}_{\Omega^k(U)}$

(2) Jeżeli  $\alpha \in \Omega^k(W)$ ,  $\beta \in \Omega^l(W)$ ,  
to  $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^* \alpha \wedge F^* \beta \in \Omega^{k+l}(V)$

(3) przejdźmy do współrzędnych:

niech  $(x_1, \dots, x_p) \in W$

$(y_1, \dots, y_m) \in V$

$\omega = \sum f_J dx_J$

$J \in \mathcal{J}_k(p)$

$\{(j_1, \dots, j_k) : 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq p\}$

$dx_J = dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$

Wtedy

$$F^* \omega = \sum_{I \in \mathcal{J}_k(m)} f_J \circ F \cdot \det \left( \frac{\partial F_j}{\partial x_I} \right) dx_I$$

jeżeli  $J = j_1, \dots, j_k$   
 $I = i_1, \dots, i_k$

to  $\frac{\partial F_j}{\partial x_I}$  to macierz  $\left( \frac{\partial F_\mu}{\partial x_\nu} \right)_{\substack{\mu \in \{j_1, \dots, j_k\} \\ \nu \in \{i_1, \dots, i_k\}}}$

W praktyce:

$$\text{Niech } V = (0, \infty)^2 = \mathbb{R}_+^2 = W$$

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} u, v \\ x+y, y^2 \end{pmatrix}$$

$$F \in C^\infty(V, W)$$

$$\omega \in \Omega^2(W)$$

$$\omega = x dx \wedge dy$$

$$(x, y) \in W$$

$$(u, v) \in V$$

$$\text{to } F^* \omega(u, v) = (u, v) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\Leftrightarrow x = u+v \quad y = v^2$$

$$\begin{aligned} F^* \omega &= (u+v) d(u+v) \wedge d(v^2) = \\ &= (u+v) (du + dv) \wedge 2v dv = \\ &= 2v(u+v) du \wedge dv \end{aligned}$$

a formalnie?

$$J = (1, 2)$$

$$f_{(1,2)} = x$$

$$(f_{(1,2)} \circ F)(u, v) = \text{pienra wspólna z } (u+v, v^2) = u+v$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$I = (1, 2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$J_F = \det DF = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2v \end{pmatrix} = 2v$$

$$\eta = \sin x dx + \cos x dy, \text{ to}$$

$$\begin{aligned} F^* \eta &= \sin(u+v) d(u+v) + \cos(u+v) d(v^2) = \\ &= \sin(u+v) du + (\sin(u+v) + 2v \cos(u+v)) dv \end{aligned}$$



No i mamy różniczkę zewnętrzna

$$d: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U) \quad U \subset \mathbb{R}^n$$

$$d\omega(x; \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k) \stackrel{(*)}{=} \sum_{i=0}^k \sum_{j=1}^n (-1)^i \xi_i^j \frac{\partial}{\partial x_j} \omega(x; \xi_0, \dots, \xi_k)$$

$\uparrow$   
bez  $\xi_i$

Przykład: Niech  $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned} \omega &= f dx + g dy \\ \text{Wtedy } d\omega &= \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial y} dy \wedge dy = \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

A ta sama forma, ale na  $\mathbb{R}^3$ ?

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial z} dz \wedge dx \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial g}{\partial y} dy \wedge dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz \wedge dy \\ &= \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \frac{\partial f}{\partial z} dx \wedge dz - \frac{\partial g}{\partial z} dy \wedge dz \end{aligned}$$

Różniczkę zewnętrzną jest liniowa; jeżeli zdefiniujemy

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

różniczkę  
funkcji  
 $f \in C^\infty(U)$

$$\text{to } \underline{d(f dx_j) = df \wedge dx_j}$$

proszę sprawdzić, że to zgodne z wzorem (\*)

## Inne ważne własności różniczki zewnętrznej

(1) Jeżeli  $\omega$  jest formą o stałych współczynnikach (np.  $\omega = dx_j$ ), to  $d\omega = 0$

(wprost z definicji) (albo z poprzedniego wzoru:  $d(dx_j) = d(1 \cdot dx_j) = d1 \wedge dx_j = 0 \wedge dx_j = 0$ ).

(2) Niech  $\alpha \in \Omega^k(U)$ ,  $\beta \in \Omega^l(U)$ . Wtedy

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta \quad \text{wzór Leibniza}$$

można sprawdzić wprost z definicji, mada.

(3) Dla dowolnej formy  $\omega$  mamy  $d(dw) = 0$  } a więc  $d \circ d \equiv 0$ .

Sprawdźmy to najpierw dla 0-formy,

czyli dla  $\omega = f \in C^\infty(U)$ . Wtedy

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

$$d(df) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_j \wedge dx_1 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_j \wedge dx_2 + \dots \\ \dots + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_j \wedge dx_n = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_j \wedge dx_k =$$

w tej sumie występuje zarówno  $dx_1 \wedge dx_3$ , jak i  $dx_3 \wedge dx_1 = -dx_1 \wedge dx_3$

$$= \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k \leq n}}^n \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \right) dx_j \wedge dx_k = 0.$$

$$1 \leq j < k \leq n$$

= 0  
z tw. Schwarzera

Ogólnie:

$$\text{Niech } \omega = \sum f_J dx_J$$

wtedy

$$d\omega = \sum d(f_J dx_J) = \sum (df_J \wedge dx_J)$$

$$d(d\omega) = d\left(\sum df_J \wedge dx_J\right) =$$

$$= \sum d(df_J \wedge dx_J) = \underbrace{d(df_J)}_{=0} \wedge dx_J -$$
$$- df_J \wedge \underbrace{d(dx_J)}_{=0} = 0.$$

(4) niech  $F: \underset{\mathbb{R}^m}{V} \rightarrow \underset{\mathbb{R}^n}{W}$  klasy  $C^\infty$ ,  $V, W$  otwarte,  
to  $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$

Jeżeli  $\omega$  jest 0-forma,  $\omega = f \in C^\infty(W)$ ,

$$\text{to } d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i}(y) dy_i$$

$$y_i = F_i(x), \text{ więc } F^*d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i}(F(x)) dF_i(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i}(F(x)) \cdot \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} dx_j =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_i}(F(x)) \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) dx_j.$$

$F^*\omega = f \circ F$ , więc

$$d(F^*\omega)_x = \sum_{j=1}^m \frac{\partial (f \circ F)}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i}(F(x)) \cdot \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) dx_j.$$

Stąd dla 0-formy zachodzi

$$\boxtimes F^* d\omega = d(F^*\omega).$$

Teraz przyjmijmy się formie  $\overset{\omega}{dy_J} = dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}$

$$F^*\omega = F^*(dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}) = F^*dy_{i_1} \wedge F^*dy_{i_2} \wedge \dots \wedge F^*dy_{i_k} =$$

$$= \underbrace{dF^*(y_{i_1})}_{\parallel} \wedge \underbrace{dF^*(y_{i_2})}_{\parallel} \wedge \dots \wedge \underbrace{dF^*(y_{i_k})}_{\parallel} =$$

$$\cdot \boxtimes \underbrace{dF_{i_1} \wedge \dots \wedge dF_{i_k}}_{dF_J}$$

$$= dF_{i_1} \wedge \dots \wedge dF_{i_k} = d(F_{i_1} dF_{i_2} \wedge \dots \wedge dF_{i_k})$$

$$\text{więc } dF^*\omega = d(d(F_{i_1} dF_{i_2} \wedge \dots \wedge dF_{i_k})) \stackrel{\otimes}{=} 0.$$

Ostatecznie, dla ogólnej k-formy  $\omega = \sum_J f_J dy_J$

$$\text{mamy } d\omega = \sum_J df_J \wedge dy_J$$

$$F^*d\omega = \sum_J F^*df_J \wedge F^*dy_J = \sum_J d(f_J \circ F) \wedge \underbrace{dF_{i_1} \wedge \dots \wedge dF_{i_k}}_{\substack{dF_J \\ J=(i_1, \dots, i_k)}}$$

$$F^*\omega = \sum_J (f_J \circ F) dF_J$$

$$dF^*\omega = \sum_J (d(f_J \circ F) \wedge dF_J + f_J \circ F \underbrace{d(dF_{i_1} \wedge \dots \wedge dF_{i_k})}_{\parallel = \otimes})$$

$$= \sum_J d(f_J \circ F) \wedge dF_J.$$

## Terminologia

Formy różniczkowe  $\omega \in \Omega^k(U)$   
nazywamy zamkniętymi, gdy  $d\omega = 0$ ,  
a forma  $\omega \in \Omega^k(U)$  jest dokładna,  
gdy istnieje forma  $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$ , taka, że  
 $\omega = d\eta$ .

Każda forma dokładna jest zamknięta.

Każda  $n$ -forma  $\omega \in \Omega^n(U)$ , gdzie  $U$   
jest otwartym podzbiorem  $\mathbb{R}^n$ , jest  
zamknięta.  $\left\{ \begin{array}{l} \text{jedynym } (n+1)\text{-liniowym przekształceniem} \\ \text{antysymetrycznym na } \mathbb{R}^n \text{ jest } p\text{-nie zerowe.} \end{array} \right.$

Zadanie Wskazać, że forma  $\omega$  jest dokładna.  
Dlaczego?

$$-\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$$

jest zamknięta, ale nie jest dokładna.

## Formy różniczkowe w $\mathbb{R}^3$

Przyjmijmy się bliżej formom różniczkowym na  $\mathbb{R}^3$ .  
Oczywiście jak zawsze 0-formy  $\Omega^0(\mathbb{R}^3)$  utożsamiamy z funkcjami gładkimi  $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ . Podobnie, każdemu polu wektorowemu  $v \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  możemy przypisać 1-formę  $v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz$ .  
- i odwrotnie, każdej 1-formie odpowiada  $\overset{''}{I_1(v)}$  pewne pole wektorowe.

2-formy są postaci  $f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy$ ,  
niezależnie ~~niez~~ każdemu polu wektorowemu  $v \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  możemy też przypisać (maksymalnie jednoznacznie) 2-formę

$$(v_1, v_2, v_3) \xrightarrow{I_2} v_1 dy \wedge dz + v_2 dz \wedge dx + v_3 dx \wedge dy$$

3-formy są postaci  $f dx \wedge dy \wedge dz$ , możemy je więc utożsamiać z funkcjami gładkimi

$$C^\infty(\mathbb{R}^3) \ni f \xrightarrow{I_3} f dx \wedge dy \wedge dz \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$$

Mamy zatem przekształcenia odwracalne  $I_0, I_1, I_2, I_3!$

$$\begin{array}{ccc}
 C^\infty(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{I_0} & \Omega^0(\mathbb{R}^3) \\
 & & \downarrow d \\
 C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) & \xrightarrow{I_1} & \Omega^1(\mathbb{R}^3) \\
 & & \downarrow d \\
 C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) & \xrightarrow{I_2} & \Omega^2(\mathbb{R}^3) \\
 & & \downarrow d \\
 C^\infty(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{I_3} & \Omega^3(\mathbb{R}^3)
 \end{array}$$

$\swarrow$  a tu  
 $\swarrow$  mamy  
 $\swarrow$  różniczkę  
 zewnętrzną.

Co dostaniemy, startując z  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  i wędrując po diagramie?

$$\begin{array}{ccc}
 C^\infty(\mathbb{R}^3) \ni f & \xrightarrow{I_0} & I_0(f) \in \Omega^0(\mathbb{R}^3) \\
 & & \downarrow d \\
 \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) & \xrightarrow{I_1^{-1}} & \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = df \in \Omega^1(\mathbb{R}^3) \\
 \parallel & & \\
 \nabla f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) & & 
 \end{array}$$

Stąd możemy diagram uzupełnić

$$\begin{array}{ccc}
 C^\infty(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\approx} & \Omega^0(\mathbb{R}^3) \\
 \downarrow \nabla & & \downarrow d \\
 C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) & \xrightarrow{I_1} & \Omega^1(\mathbb{R}^3)
 \end{array}$$

A biorąc  $v \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  i licząc

$$I_2^{-1} dI_1(v)?$$

$$I_1(v) = v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz$$

$$dI_1(v) = dv_1 \wedge dx + dv_2 \wedge dy + dv_3 \wedge dz =$$

$$= \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} dx + \frac{\partial v_1}{\partial y} dy + \frac{\partial v_1}{\partial z} dz \right) \wedge dx +$$

$$+ \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} dx + \frac{\partial v_2}{\partial y} dy + \frac{\partial v_2}{\partial z} dz \right) \wedge dy +$$

$$+ \left( \frac{\partial v_3}{\partial x} dx + \frac{\partial v_3}{\partial y} dy + \frac{\partial v_3}{\partial z} dz \right) \wedge dz =$$

$$= \left( -\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial y} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) dz \wedge dx$$

$$+ \left( -\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) dx \wedge dy$$

więc  $I_2^{-1} dI_1(v) = \left( \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)$

To pole wektorowe nazywa się ~~rotacją~~ rotacją pola  $v$  i oznacza  $\text{rot } v$  lub  $\uparrow$  dawniej wirowość (częściej)  $\text{curl } v$ .

Traktując operator  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  jako wektor możemy napisać  $\text{rot } v = \nabla \times v$   $\uparrow$  i być wektorowy



Kolejne złożenia stratek to

$$C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \ni v \xrightarrow{I_2} I_2(v) \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$$

$$C^\infty(\mathbb{R}^3) \ni I_3^{-1}(dI_2(v)) \xrightarrow{I_3^{-1}} dI_2(v) \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$$

$$I_3^{-1}(dI_2(v)) = ?$$

$$I_2(v) = v_1 dy \wedge dz + v_2 dz \wedge dx + v_3 dx \wedge dy$$

$$dI_2(v) = \frac{\partial v_1}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial v_2}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial v_3}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy = \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) \cdot dx \wedge dy \wedge dz$$

$$\text{więc } I_3^{-1}(dI_2(v)) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

$=: \operatorname{div} v$   
dywergencja pola  $v$   
(źródłowość)

Ponownie traktując  $\nabla$  jako wektor  
możemy napisać

$$\operatorname{div} v = \langle \nabla, v \rangle$$

Ostatecznie diagram wygląda tak

$$\begin{array}{ccc}
 C^\infty(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{I_0} & \Omega^0(\mathbb{R}^3) \\
 \downarrow \nabla & & \downarrow d \\
 C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) & \xrightarrow{I_1} & \Omega^1(\mathbb{R}^3) \\
 \nabla \times \cdot \downarrow \neq \text{rot} & & \downarrow d \\
 C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) & \xrightarrow{I_2} & \Omega^2(\mathbb{R}^3) \\
 \langle \nabla, \cdot \rangle \downarrow \text{div} & & \downarrow d \\
 C^\infty(\mathbb{R}) & \xrightarrow{I_3} & \Omega^3(\mathbb{R}^3)
 \end{array}$$

Wiemy, że  $d \circ d = 0$ , skąd  $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$\text{rot}(\text{grad } f) = 0$$

$$\text{i } \forall v \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \quad \text{div}(\text{rot } v) = 0.$$

Natomiast  $\text{div grad } f$  nie musi być zero;

$$\text{div grad } f = \text{div} \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

nazywamy Laplasjanem (operatorem Laplace'a) funkcji  $f$  i ozn.  $\Delta f$ .

Laplasjan pojawia się w bardzo wielu zastosowaniach fizycznych, w rachunku prawdopodobieństwa, statystyce etc.

Proszę się z nim zaprzyjaźnić.

# Zadania

Różniczka zewnętrzna to niejedyna operacja, jaką możemy wykonać na ~~pot.~~ formach różniczkowych.

Proszę zidentyfikować przekształcenia:

$$1. C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \times C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \ni (v, w)$$

$$\downarrow I_1 \times I_1$$

$$\Omega^2(\mathbb{R}^3) \ni I_1(v) \wedge I_1(w) \xleftrightarrow{\wedge} (I_1 v, I_1 w) \in \Omega^1(\mathbb{R}^3) \times \Omega^1(\mathbb{R}^3)$$

$$\downarrow I_2^{-1}$$

$$\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$$

$$I_2^{-1}(I_1(v) \wedge I_1(w)) \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$$

co to jest za pole wektorowe?

$$2. C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \times C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \ni (v, w) \xrightarrow{I_1 \times I_2} (I_1 v, I_2 w) \in \Omega^1 \times \Omega^2$$

$$\downarrow \wedge$$

$$C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \ni I_3^{-1}(I_1 v \wedge I_2 w) \in \Omega^3$$

co to za funkcja?

3.  $v, w$  jak poprzednio;

$$I_1(w^* I_1(v)) \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$$

co to za pole?

$$I_2^{-1}(w^* I_2(v)) \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$$

—————  $\wedge$  ————— ?

## Orientacja wzajemności

Przypomnijmy na początek, że na barach przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  możemy wprowadzić relację równoważności: mówimy, że dwie bary  $\xi_1, \dots, \xi_n$  i  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  zadają tę samą orientację, jeżeli macierz permutacji identycznościowego zapisanego w tych barach (czyli macierz przejścia z jednej bary do drugiej) ma dodatni wyznacznik.

Ta relacja ma 2 klasy abstrakcji, wybór orientacji  $\mathbb{R}^n$  to wybór jednej z tych klas. ~~Mówimy, że~~

Bara  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  należy do klasy, którą nazywamy orientacją dodatnią (i bara jest dodatnio zorientowana),  $(e_2, e_1, e_3, \dots, e_n)$  jest ujemnie zorientowana.

Chcemy teraz przenieść te pojęcia na wzajemności. Po co?

Będzie to potrzebne do całkowania form różniczkowych, tak jak do całkowania 1-formy potrzebowaliśmy pojęcia krzywej zorientowanej (by ustalić znak całki).

Niech teraz  $M$  będzie  $m$ -wymiarową, niezdegenerowaną,  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Jak wiemy,  $M$  jest „posklejana” z kawałków sparametryzowanych zbiorami otwartymi w  $\mathbb{R}^m$ :

istnieje pokrycie  $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$  zbioru  $M$  zbiorami otwartymi  $U_\alpha \subset \mathbb{R}^m$  takimi, że dla każdego  $\alpha \in A$  mamy:

$V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$  zbiór otwarty

$\Psi_\alpha : V_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  t.j.  $\Psi_\alpha(V_\alpha) = M \cap U_\alpha$

parametryzacja

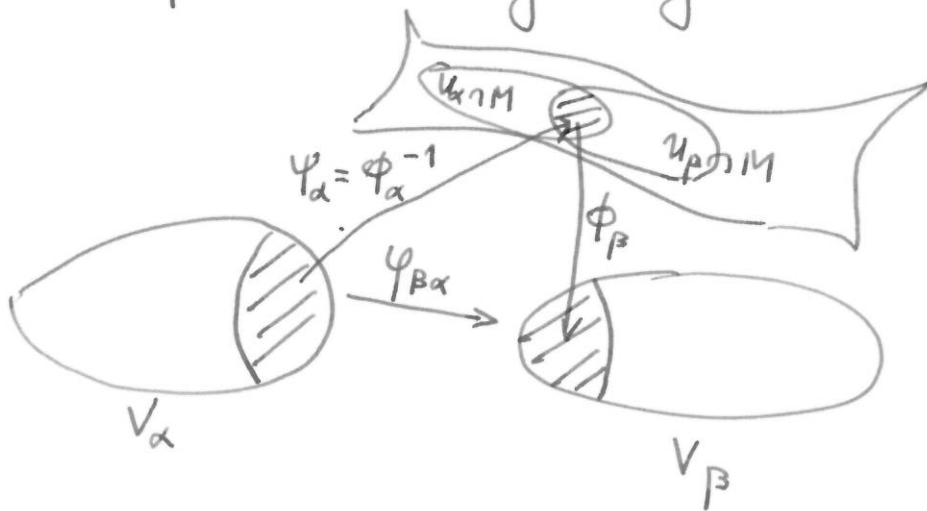
$D\Psi_\alpha$  ma rząd maks. ( $= m$ ) na  $V_\alpha$

$\Phi_\alpha = (\Psi_\alpha)^{-1} : M \cap U_\alpha \rightarrow V_\alpha$  homeomorfizm mapy.

Udowodniłeś już też lemat o funkcjach przejścia:

$$\varphi_{\beta\alpha} = \phi_{\beta} \circ \phi_{\alpha}^{-1} : \phi_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta} \cap M) \rightarrow V_{\beta}$$

$= \psi_{\beta}^{-1} \circ \psi_{\alpha}$  jest gładkim dyfeomorfizmem



Rodzinę  $(\phi_{\alpha})_{\alpha \in A}$  map rozmaitości  $M$   
 (których dziedziny pokrywają całą  $M$ )  
 nazywamy atlasem rozmaitości  $M$ .

Mówimy, że atlas ten jest zorientowany,  
 gdy dla wszystkich  $\alpha, \beta \in A$  takich, że

$U_{\alpha} \cap U_{\beta} \cap M \neq \emptyset$  pr. funkcja przejścia  $\varphi_{\beta\alpha}$   
 jest dyfeomorfizmem, którego jacobian  
 jest we wszystkich punktach jej dziedziny  
 dodatni.

Jeżeli jacobian przekształcenia

$$F: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

jest dodatni w punkcie  $x \in U$ ,

to przekształcenie  $DF(x)$  zachowuje orientację

$\mathbb{R}^n$ : przekształcenie bardzo dodatnio zorientowane  
na bardzo dodatnio zorientowane.

Stąd o dyfeomorfizmie  $\varphi$ , którego jacobian  
w każdym punkcie dziedzin jest dodatni,  
mówimy, że zachowuje on orientację.

Gdy jacobian dyfeomorfizmu jest wszędzie  
ujemny, to dyfeomorfizm odwraca orientację.

Zadanie: Niech  $U \subset \mathbb{R}^n$  będzie otwartym  
i spójnym (tzn.  $U$  jest obszarem) i niech

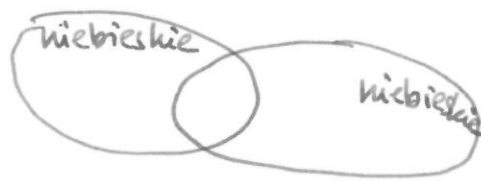
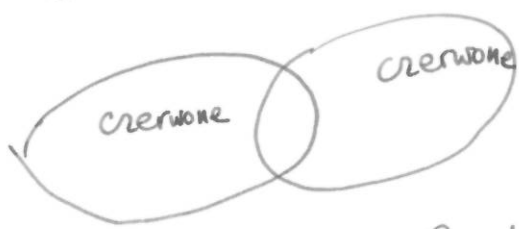
$F: U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  będzie dyfeomorfizmem.

Wówczas  $F$  albo zachowuje, albo odwraca  
orientację.

Podać przykład dyfeomorfizmu  $G: W_1 \rightarrow W_2$ ,  
gdzie  $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^n$  to zbiory otwarte, który ani nie zachowuje,  
ani nie odwraca orientacji.

Intuicja: Sklejamy  $M$  z Tatchek wyciętych z  $\mathbb{R}^m$ .

Każda Tatcha ma 2 strony: czerwoną (wierzch) i niebieską (spód). Atlas  $(\Phi_\alpha)_{\alpha \in A}$  jest ~~dobrze~~ zorientowany, gdy Tatche są posklejane zgodnie z kolorami

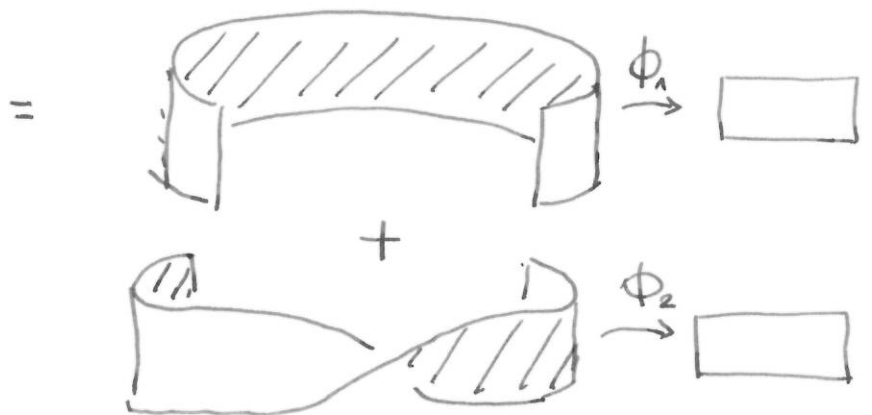


a nie



Rzeczność  $M$  jest orientowalna, gdy ma atlas zorientowany.

Przykład: Wstęga Möbiusa



taki atlas nie jest zorientowany.



Okazuje się, że wstęga Möbiusa nie jest orientowalna (jest to treść zadań 7.46 i 7.47 w skrypcie prof. Stroleckiego)

Zachodzi natomiast niebanalne

Twierdzenie: Jeżeli rozmaitość  $M$  jest bieżniem obszaru w  $\mathbb{R}^n$ , to jest ona orientowalna.

Na koniec krótki uwaga terminologiczna:

Rozmaitość jest orientowalna, gdy istnieje na niej atlas zorientowany.

Rozmaitość jest zorientowana, gdy wybiereamy na niej taki atlas. Jeżeli jest spójna i orientowalna, to mamy 2 klasy abstrakcji takich atlasów - mówimy, że dwa atlasy są zorientowane zgodne, gdy ich suma jest dalej atlasem zorientowanym; każda taka klasa abstrakcji

odpowiada wyborowi orientacji rozmaitości. Rozmaitości niespójne i orientowalne mogą mieć więcej klas abstrakcji tej relacji.