Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwarty i ograniczony. $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ to funkcje z $\overline{\Omega}$ w $\mathbb{R}^n$, które rozszerzają się do funkcji klasy C^1 na jakimś otoczenie $\overline{\Omega}$.

<u>Stwierdzenie</u>: Niech $p \in \mathbb{R}^n$ będzie wartością regularną $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ taką, że $p \notin f(\partial\Omega)$. Wówczas $f^{-1}(p)$ jest zbiorem skończonym.

<u>Przypomnienie</u>: p jest <u>wartością krytyczną</u> f, gdy $p \in f(\{x \in \overline{\Omega} : J_f(x) = 0\})$, $p \in f(\overline{\Omega})$ które nie są wartościami krytycznymi, nazywamy <u>wartościami regularnymi</u> f.

<u>Dowód</u>: Załóżmy przeciwnie: że $f^{-1}(p)$ jest zbiorem nieskończonym. Korzystając ze zwartości $\overline{\Omega}$ i S^{n-1} możemy wtedy wybrać ciąg (x_m) punktów Ω taki, że ① $x_m \to x_0 \in \overline{\Omega}$, $\forall_m \; f(x_m) = p$, $\forall_m \; x_m \neq x_0$ (wtedy $f(x_0) = \lim_{m\to\infty} f(x_m) = p \notin f(\partial\Omega)$, więc $\forall_m \; x_m, x_0 \in \Omega$).

② $\frac{x_m - x_0}{|x_m - x_0|} \in S^{n-1}$, $\frac{x_m - x_0}{|x_m - x_0|} \to v \in S^{n-1}$

Ale wtedy $D_v f(x_0) = \lim_{m\to\infty} \frac{f(x_m) - f(x_0)}{|x_m - x_0|} = \frac{p-p}{|x_m - x_0|} = 0$, więc $J_f(x_0) = 0 \Rightarrow p = f(x_0)$ nie jest wartością regularną ↯.

Niech teraz Ω, p i f będą jak w Stwierdzeniu. Definiujemy wtedy stopień lokalny f w p względem Ω jako $\deg(f, \Omega, p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} \operatorname{sgn} J_f(x)$.

Dodatkowo, jeżeli $p \notin f(\overline{\Omega})$, kładziemy $\deg(f, \Omega, p) = 0$.

Stwierdzenie: Niech V będzie składową spójną zbioru $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ i załóżmy, że $p_1, p_2 \in V$ są wartościami regularnymi f. Wówczas

$$\deg(f, \Omega, p_1) = \deg(f, \Omega, p_2).$$

Innymi słowy, stopień jest lokalnie stały na $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. To pozwala nam zdefiniować $\deg(f, \Omega, p)$ dla wszystkich $p \notin f(\partial\Omega)$:

- albo $p \notin f(\overline{\Omega})$, wtedy $\deg(f, \Omega, p) = 0$
- albo $p \in f(\Omega) \setminus f(\partial\Omega)$, wtedy z tw. Sarda w składowej $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ zawierającej p jest ~~punkt~~ wartość regularna q funkcji f; kładziemy $\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega, q)$; ze Stwierdzenia to nie zależy od wyboru q.

Uwaga: Oznaczmy przez $C_f \subset \Omega$ zbiór punktów krytycznych f (tzn. tych x, że $J_f(x) = 0$).

Łatwo można wykazać, że $\deg(f,\Omega,\cdot)$ jest lokalnie stały na składowych $\mathbb{R}^n \setminus (\underbrace{f(\partial\Omega) \cup f(C_f)}_{\text{to jest zbiór zwarty}})$

Jeżeli bowiem p jest wartością regularną f, to, jak wiemy, $f^{-1}(p) = \{x_1, \dots, x_m\}$, a z twierdzenia o funkcji uwikłanej znajdziemy takie spójne otoczenia $\mathcal{U}, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_m$ odp. punktów $p, x_1, \dots, x_m$, że $f|_{\mathcal{U}_k} : \mathcal{U}_k \to \mathcal{U}$ jest dyfeomorfizmem.

Wtedy: • na każdym $\mathcal{U}_k$ J_f ma ustalony znak

i stąd • $\forall_{q \in \mathcal{U}}$

$$\underbrace{\sum_{x \in f^{-1}(q)} \operatorname{sgn} J_f(x)}_{\deg(f,\Omega,q)} = \underbrace{\sum_{x \in f^{-1}(p)} \operatorname{sgn} J_f(x)}_{\deg(f,\Omega,p)}.$$

My jednak chcemy więcej: by $\deg(f,\Omega,\cdot)$ był lokalnie stały na składowych $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$.

Potrzebujemy pożytecznego lematu.

<u>Lemat:</u> Niech $g \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, $K = \operatorname{supp} g$ i niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwarty.

Dalej, niech $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ będzie krzywą tż.

$A = \{x + \gamma(t) : x \in K, t \in [0,1]\} \subset \Omega$.

Wówczas istnieje pole wektorowe $v \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tż. $\operatorname{div} v = f(x - v(0)) - f(x - v(1))$.

Szkic dowodu

Krok 1 Załóżmy na początek, że $\gamma(s) = s x_0$ dla pewnego $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Wtedy $v(x) = x_0 \int_0^1 f(x - t x_0)\,dt$ spełnia tezę.

Krok 2 Ustalmy na $[0,1]$ relację: $t \sim s$, gdy istnieje $v \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n)$ t.ż. $\operatorname{div} v(x) = f(x-\gamma(s)) - f(x-\gamma(t))$. Łatwo sprawdzić, że $\sim$ jest relacją równoważności na $[0,1]$. Wykażemy, że klasy abstrakcji tej relacji są otwarte w $[0,1]$, skąd już będzie wynikało, że jest tylko jedna kl. abstrakcji $\Rightarrow 0 \sim 1 \Rightarrow$ teza. Wiemy bowiem, że $[0]_\sim$ jest otwarte w $[0,1]$, ale też $[0]_\sim = [0,1] \setminus \underbrace{(\text{wszystkie pozost. klasy abstrakcji})}_{\text{zbiór otwarty w } [0,1]}$

$\Rightarrow [0]_\sim$ jest domknięte w $[0,1]$, $[0,1]$ jest spójny
$\Rightarrow [0]_\sim = [0,1]$.

Ustalmy $s \in [0,1]$ i niech $x_t = \gamma(t) - \gamma(s)$ dla $t \in [0,1]$
$f_s = f(x - \gamma(s))$, $K_s = \operatorname{supp} f_s$. Wtedy dla ~~dost.~~ t ~~mał~~ dost. bliskich s mamy

$$A_s^t := \{ x + \lambda x_t : x \in K_s, \lambda \in [0,1] \} \subset \Omega$$

(proszę sprawdzić, że $A_s^s = A$, A_s^t jest zbiorem zwartym bliskim $A = A_s^s$, gdy t jest bliskie s).

Wtedy z kroku 1 znajdziemy $v \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n)$

t.ż. $\operatorname{div} v(x) = f_s(x) - f_s(x - x_t) =$

$$= f(x - \gamma(s)) - f(x - \gamma(t)),$$ czyli $t \sim s$,

co dowodzi otwartości $[s]_\sim$.

$\square$.

Stopień lokalny możemy wyznaczać przy pomocy poniższego wzoru – formuły Heinza:

<u>Stwierdzenie</u>: Dla każdego $\varepsilon > 0$ niech $\varphi_\varepsilon \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$,

$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon = 1$, $\operatorname{supp} \varphi_\varepsilon \subset B(0, \varepsilon)$.

Wtedy dla każdego $p \notin f(\partial\Omega) \cup f(C_f)$ istnieje $\varepsilon(p) > 0$ t.ż.

$$d(f, \Omega, p) = \int_\Omega \varphi_\varepsilon(f(x) - p) J_f(x)\, dx$$

<u>Dowód</u>: Niech $\mathcal{U}, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_m$ będą jak w Uwadze i niech $\varepsilon(p)$ będzie takie, że $B(x_i, \varepsilon(p)) \subset \mathcal{U}_i$, $B(p, \varepsilon(p)) \subset \mathcal{U}$. Wtedy, dla $0 < \varepsilon < \varepsilon(p)$

$$\int_\Omega \varphi_\varepsilon(f(x) - p) J_f(x)\, dx = \int_{|f(x)-p| < \varepsilon} \varphi_\varepsilon(f(x) - p) |J_f(x)| \operatorname{sgn} J_f(x)\, dx$$

$$= \sum_{i=1}^m \int_{\mathcal{U}_i} \varphi_\varepsilon(f(x) - p) |J_f(x)| \cdot \underbrace{\operatorname{sgn} J_f(x_i)}_{\text{bo } \operatorname{sgn} J_f \text{ stałe na } \mathcal{U}_i}\, dx$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \operatorname{sgn} J_f(x_i) \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y - p)\, dy}_{=1} = \deg(f, \Omega, p).$$

<u>Zadanie:</u> Uzasadnić, że wzór działa też gdy $p \notin f(\overline{\Omega})$.

<u>Szkic dowodu</u>, że $\deg(f, \Omega, \cdot)$ jest stały na składowych spójnych $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$:

Niech p_1, p_2 należą do tej samej składowej, wtedy istnieje krzywa $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ t. że $\gamma(0) = p_1$, $\gamma(1) = p_2$. Niech teraz

$$\varepsilon_0 < \min\left(\varepsilon(p_1), \varepsilon(p_2), \operatorname{dist}(\gamma([0,1]), \partial\Omega)\right),$$

$$\forall_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)}\ \varphi_\varepsilon \in C^1_c(\mathbb{R}^n) \text{ t. że } \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon = 0, \ \underbrace{\operatorname{supp} \varphi_\varepsilon}_{\text{ozn. } K_\varepsilon} \subset B(0, \varepsilon)$$

i niech $A = \{x + \gamma(s) : x \in K_{\varepsilon_0}, s \in [0,1]\}$.

Wtedy $A \subset \Omega$, więc istnieje $v \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n)$ t. że

$$\operatorname{div} v = \varphi_{\varepsilon_0}(x - p_1) - \varphi_{\varepsilon_0}(x - p_2).$$

Biorąc $u_i(x) = \sum_{j=1}^{n} v_j(f(x)) \nabla f^{\#}_{ij}(x)$, gdzie $\nabla f^{\#}$ to macierz dołączona do ∇f, tzn. $(\nabla f^{\#})^T \nabla f = \mathrm{id}_{n \times n} \det \nabla f$

$$= J_f \cdot \mathrm{id}_{n \times n}$$

dostajemy z wzoru na różniczkowanie złożenia

$$\operatorname{div} u(x) = \operatorname{div} v\,(f(x))\cdot J_f(x) =$$

$$= \left(\varphi_{\varepsilon_0}(f(x)-p_1) - \varphi_{\varepsilon_0}(f(x)-p_2)\right) J_f(x), \quad \text{więc}$$

$$d(f,\Omega,p_1) - d(f,\Omega,p_2) \overset{\text{wzór Heinza}}{=}$$

$$= \int_\Omega (\varphi_{\varepsilon_0}(f(x)-p_1) - \varphi_{\varepsilon_0}(f(x)-p_2)) J_f(x)\,dx =$$

$$= \int_\Omega \operatorname{div} v(f(x)) J_f(x)\,dx = \int_\Omega \operatorname{div} u(x)\,dx$$

$\|$ wzór Greena

$$\int_{\partial\Omega} \langle u, \vec{n} \rangle\, d\sigma = 0$$

bo $\operatorname{supp} u \subset \Omega$.

$\square$.

Twierdzenie: Niech $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $p \notin \varphi(\partial\Omega)$.
Wówczas istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że jeżeli $\psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ i $\|\varphi - \psi\|_{C^1(\Omega)} < \varepsilon$, to $\deg(\varphi, \Omega, p) = \deg(\psi, \Omega, p)$.
(w szczególności $p \notin \psi(\partial\Omega)$).

Szkic dowodu: Przypadek $p \notin \varphi(\overline{\Omega})$ jest łatwy, załóżmy, że $p \in \varphi(\Omega) \setminus \varphi(\partial\Omega)$.

- Przypomnijmy, że $\|\varphi - \psi\|_{C^1(\overline{\Omega})} = \sup_{\overline{\Omega}} |\varphi - \psi| + \sup_{\overline{\Omega}} \|D\varphi - D\psi\|$.
Stąd jeżeli $\|\varphi - \psi\|_{C^1(\overline{\Omega})} < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(p, \varphi(\partial\Omega))$, to dla $z \in \partial\Omega$
$$|p - \psi(z)| = |p - \varphi(z) + \varphi(z) - \psi(z)| \geq$$
$$\geq |p - \varphi(z)| - |\varphi(z) - \psi(z)| > \frac{1}{2}|p - \varphi(z)| > 0$$
bo $p \notin \varphi(\partial\Omega)$
czyli $p \notin \psi(\partial\Omega)$ dla ψ dost. bliskich φ.

- Niech teraz q będzie punktem regularnym φ leżącym bardzo blisko p, wtedy q jest w tej samej składowej $\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial\Omega)$ co p i podobnie w tej samej składowej $\mathbb{R}^n \setminus \psi(\partial\Omega)$, zatem $\deg(\varphi, \Omega, p) = \deg(\varphi, \Omega, q)$ i tak samo $\deg(\psi, \Omega, p) = \deg(\psi, \Omega, q)$.
Wystarczy wykazać więc że $\deg(\varphi, \Omega, q) = \deg(\psi, \Omega, q)$.

- $\varphi^{-1}(q) = \{a_1, \dots, a_m\}$ i mamy $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1,\dots,m}$, $\mathcal{U}_i \subset \Omega$ i $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ takie, że $\varphi|_{\mathcal{U}_i} : \mathcal{U}_i \to \mathcal{U}$ jest dyfeomorfizmem, $\forall_{i=1,\dots,m}$ $J_\varphi(a_i) \neq 0$. Jeżeli teraz ψ jest bliskie φ w normie C^1, to dla $i = 1, \dots, m$ $\operatorname{sgn} J_\varphi(a_i) = \operatorname{sgn} J_\psi(a_i)$ (w szczególności $J_\psi(a_i) \neq 0$) $\Rightarrow \deg(\psi, \Omega, q) = \deg(\varphi, \Omega, q)$.

$\square$.

~~Wniosek~~: ~~Ad~~ Twierdzenie:

Niech $H:\bar{\Omega}\times[0,1]\to\mathbb{R}^n$ będzie homotopią klasy C^1 ~~między~~ $\varphi(\cdot)=H(\cdot,0):\bar{\Omega}\to\mathbb{R}^n$ a $\psi(\cdot)=H(\cdot,1)$

Def: $H:\bar{\Omega}\times[0,1]\to\mathbb{R}^n$ nazywamy C^1-homotopią między $\varphi(\cdot)=H(\cdot,0)$ a $\psi(\cdot)=H(\cdot,1)$, gdy

a) $\forall_{t\in[0,1]}\ H(\cdot,t)\in C^1(\bar{\Omega},\mathbb{R}^n)$ ~~Jeżeli~~

b) $\lim\limits_{t\to s}\|H(\cdot,t)-H(\cdot,s)\|_{C^1(\bar{\Omega})}=0$

~~a)~~ Niech $\varphi,\psi\in C^1(\bar{\Omega},\mathbb{R}^n)$, $p\in\mathbb{R}^n$.
Tw. Jeżeli istnieje $H:\bar{\Omega}\times[0,1]\to\mathbb{R}^n$ jest C^1-homotopią między $\varphi(\cdot)=H(\cdot,0)$ a $\psi(\cdot)=H(\cdot,1)$, $\varphi,\psi\in C^1(\bar{\Omega},\mathbb{R}^n)$, ~~to deg(φ, Ω, p~~ taką, że $p\notin H(\partial\Omega\times[0,1])$, to ~~deg~~$(\varphi,\Omega,p)$

Tw. Niech $\varphi,\psi\in C^1(\bar{\Omega},\mathbb{R}^n)$, $p\in\mathbb{R}^n$. Jeżeli istnieje C^1-homotopia $H:\bar{\Omega}\times[0,1]\to\mathbb{R}^n$ między φ a ψ taka, że $p\notin H(\partial\Omega\times[0,1])$, to $\deg(\varphi,\Omega,p)=\deg(\psi,\Omega,p)$.

~~Szkic dowodu~~ Dowód.

Niech $h(t)=\deg(H(\cdot,t),\Omega,p)$. Wtedy z popr. twierdzenia i warunku b) h jest ~~lokalnie stałe, $h:[0,1]\to$~~ ciągłe (a nawet lok. stałe), $h:[0,1]\to\mathbb{Z}\Rightarrow h=\text{const}$. $\square$

Wniosek: Jeżeli $\varphi, \cancel{\psi} \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $p \notin \varphi(\partial\Omega)$, to $\forall \psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ t.ż. $\|\varphi - \psi\|_{C(\overline{\Omega})} < \operatorname{dist}(p, \varphi(\partial\Omega))$ mamy $\deg(\varphi, \Omega, p) = \deg(\psi, \Omega, p)$.

Dowód: Niech $H(\cdot, t) = (1-t)\varphi(\cdot) + t\psi(\cdot)$. H jest C^1-homotopią między φ a ψ, jeżeli więc wykażemy, że $p \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$, to koniec. Załóżmy przeciwnie, że dla pewnego $s \in [0,1]$ $p \in H(\partial\Omega \times \{s\})$, a więc $\exists_{x \in \partial\Omega}$ t.ż. $p = (1-t)\varphi(x) + t\psi(x)$. Wtedy $\operatorname{dist}(p, \partial\Omega) < |p - \varphi(x)|$

$= t|\psi(x) - \varphi(x)| \leq \|\varphi - \psi\|_{C(\overline{\Omega})}$ ↯.

Ten wniosek pozwala nam zdefiniować stopień dla przekształceń, które są tylko ciągłe na $\overline{\Omega}$, a nie C^1:

Def Niech $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, $p \notin \varphi(\partial\Omega)$. Wówczas $\deg(\varphi, \Omega, p) = \deg(\psi, \Omega, p)$, gdzie ψ jest dowolnym p-niem $\in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ t.ż. $\|\varphi - \psi\|_{C(\overline{\Omega})} < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(p, \partial\Omega)$ (*)

Ta def. nie zależy od wyboru ψ, bo jeżeli $\psi_1, \psi_2 \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ spełniają (*), to 1) $p \notin \psi_1(\partial\Omega)$, 2) $\|\psi_1 - \psi_2\|_{C(\overline{\Omega})} < \operatorname{dist}(p, \psi_1(\partial\Omega))$

Twierdzenie o składaniu

Niech $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ niech będzie otwarty t.ż. $\varphi(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{U}$, $V = \mathcal{U} \setminus \varphi(\partial\Omega)$, $\psi \in C(\overline{\mathcal{U}}, \mathbb{R}^n)$. Niech $V_1, V_2, \dots$ to składowe spójne V i niech $p \notin \psi\circ\varphi(\partial\Omega) \cup \psi(\partial\mathcal{U})$.

Wówczas

1) $p \notin \psi(\partial V_i)$ dla $i = 1, 2, \dots$

2) tylko dla sk. wielu i $\deg(\psi, V_i, p) \neq 0$

3) $\deg(\psi\circ\varphi, \Omega, p) = \sum_i \deg(\psi, V_i, p)\deg(\varphi, \Omega, q_i)$

gdzie $q_i \in V_i$, $i = 1, 2, \dots$

Szkic dowodu

1) Łatwo wykazać, że $\partial V_i \subset \partial\mathcal{U} \cup \varphi(\partial\Omega)$, skąd od razu wynika 1).
Jeżeli bowiem $q \in \partial V_i$ i $q \notin \partial\mathcal{U} \cup \varphi(\partial\Omega)$, to $q \in \mathcal{U}$ (bo $q \in \varphi(\overline{\Omega})$), $q \notin \varphi(\partial\Omega)$
$\Rightarrow q \in V_j$ dla pewnego j, ale wtedy $q \notin \partial V_i$ dla żadnego i, bo V_i są otwarte i rozłączne.

2) Przybliżamy ψ funkcją $f \in C^1(\overline{\mathcal{U}}, \mathbb{R}^n)$ t.ż. $\|f - \psi\|_{C(\overline{\mathcal{U}})} < \mathrm{dist}(p, \psi(\partial\mathcal{U}))$ i znajdujemy q – wartość regularną f bardzo blisko p.

Wtedy $\deg(f, V_i, q) = \deg(\psi, V_i, q)$, ale $f^{-1}(q) = \{z_1, \dots, z_m\}$, punkty z_i należą do najwyżej m różnych V_i — i tylko dla tych i $\deg(f, V_i, q)$ ma szansę być różny od zera.

3) ten punkt udowodnię tylko dla $\varphi, \psi \in C^1$ i przy założeniu, że p jest punktem regularnym ψ. Przypadek ogólny dowodzi się przybliżając pracowicie kolejno ψ i φ funkcjami $\tilde{\psi}, \tilde{\varphi}$ klasy C^1 i p punktem $\tilde{p}$ regularnym dla $\tilde{\psi}$. Technicznie mozolne, ale nic szczególnie trudnego.

Dobieramy punkty $q_i \in V_i$ tak, by były punktami regularnymi φ.

Wtedy

$$\deg(\psi \circ \varphi, \Omega, p) = \sum_{\substack{x \in \Omega \\ \psi\circ\varphi(x) = p}} \operatorname{sgn} J_{\psi\circ\varphi}(x) =$$

$$= \sum_{\substack{x \in \Omega \\ \psi\circ\varphi(x) = p}} \operatorname{sgn} J_\psi(\varphi(x)) \cdot \operatorname{sgn} J_\varphi(x)$$

$$= \sum_{\substack{y \in V \\ \psi(y) = p}} \sum_{\substack{x \in \Omega \\ \varphi(x) = y}} \operatorname{sgn} J_\psi(y) \operatorname{sgn} J_\varphi(x) =$$

$$= \sum_{\substack{y \in V \\ \psi(y)=p}} \operatorname{sgn} J_\psi(y) \deg(\varphi, \Omega, y) =$$

mogę zastąpić y przez q_i

$$= \sum_i \sum_{\substack{y \in V_i \\ \psi(y)=p}} \operatorname{sgn} J_\psi(y) \deg(\varphi, \Omega, q_i)$$

$$= \sum_i \deg(\psi, V_i, p) \deg(\varphi, \Omega, q_i) \quad \square$$

Wniosek

Tw. Jordana: Jeżeli $K \subset \mathbb{R}^n$ jest homeomorficzne ze sferą $\mathbb{S}^{n-1}$, to $\mathbb{R}^n \setminus K$ (ozn. K^c) ma 2 składowe spójne — jedną nieograniczoną, drugą ograniczoną.

Dowód

Krok 1. Zadanie: Wykazać, że K^c ma co najwyżej jedną składową nieograniczoną.

Oznaczmy tę składową przez U_0.

Niech $\{U_i\}_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ i \le k}}$, gdzie $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, będą ograniczonymi składowymi K^c.

Chcemy wykazać, że $k = 1$.

Niech $h: \mathbb{S}^{n-1} \to K$ będzie homeomorfizmem i niech $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie przedłużeniem (z tw. Tietzego) h na całe $\mathbb{R}^n$; analogicznie niech ψ będzie przedłużeniem $h^{-1}: K \to \mathbb{S}^{n-1}$ na $\mathbb{R}^n$. Niech $\mathbb{S}^{n-1} = \partial B$, gdzie $B = B(0,1)$.

Krok 2

Obserwacja:

$\deg(\varphi, B, q_0) = 0$, bo $\varphi(B) \subset \varphi(\overline{B}) \leftarrow$ zbiór zwarty,

$\uparrow$

to nie zależy od wyboru $q_0 \in U_0$, a my możemy wziąć q_0 poza $\varphi(\overline{B})$.

Analogicznie $\deg(\psi, U_0, z) = 0$ dla $z \notin \overline{B}$.

Krok 3

Mamy $\varphi \circ \psi|_{\partial B} = id_{\partial B}$ na ∂B, więc

$$1 = \deg(id, B, 0) = \deg(\varphi \circ \psi, B, 0) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \deg(\psi, U_i, 0) \deg(\varphi, B, q_i)$$

$\leftarrow$ tu brak $i=0$, dzięki Obserwacji

ale analogicznie, dla $i = 1, 2, \dots, i \le k$

$$1 = \deg(id, U_i, q_i) = \deg(\psi \circ \varphi, U_i, q_i) =$$

$$= \deg(\varphi, B, q_i) \deg(\psi, U_i, 0)$$

skąd

$$1 = 1 \cdot k \Rightarrow k = 1$$

$\square$.

Zadanie:

Powtarzając rozumowanie z tw. Jordana wykazać, że gdy $h : \overline{B} \to \mathbb{R}^n$ jest homeomorfizmem między $\overline{B}$ a $h(\overline{B})$, to $\mathbb{R}^n \setminus h(\overline{B})$ ma dokładnie jedną składową spójną (czyli jest spójne) – nieograniczoną.

Wniosek: Tw Brouwera o niezmienniczości obszaru.

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ będzie ciągłe i różnowart. Wówczas $\varphi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym.

Szkic dowodu

$\Omega = \bigcup_{p \in \Omega} B(p, r_p)$, więc wystarczy wykazać tw.

$0 < r_p$ tż. $\overline{B}(p, r_p) \subset \Omega$

dla $B = B(p, r_p)$

Skoro φ jest ciągłe i różnowartościowe, to $\varphi|_{\overline{B}}$ i $\varphi|_{\partial B}$ są homeomorfizmami (na obraz).

$\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial B)$ ma dwie składowe, jedną ograniczoną ($\mathcal{U}_1$)

i drugą nieograniczoną ($\mathcal{U}_0$);

$\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\overline{B}) \subset \mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial B)$ ma jedną, nieograniczoną składową $\Rightarrow$

$\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\overline{B}) \subset \mathcal{U}_0$.

Stąd $\mathcal{U}_1 \cup \varphi(\partial B) = \cancel{\mathcal{U}_0}\, \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{U}_0 \subset \varphi(B) \cup \varphi(\partial B)$

ale φ jest różnowartościowe,

więc $\mathcal{U}_1 \subset \varphi(B)$ $(*)$

Z drugiej strony $\varphi(B)$ jest spójny i ograniczony, $\varphi(B) \subset \mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial B)$

$\Rightarrow \varphi(B) \subset \mathcal{U}_1$ lub $\varphi(B) \subset \mathcal{U}_0$

co wraz z $(*)$ ~~do~~ i tym, że $\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1 = \emptyset$

daje $\varphi(B) = \mathcal{U}_1$

$\square$.