• Przeciągnięcie formy

Niech ~~U, V~~ $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ będą otwarte i niech $F = (F_1, \dots, F_n) : V \to \mathcal{U}$.

Definiujemy $F^* : \Omega^k(\mathcal{U}) \xrightarrow{\text{liniowe}} \Omega^k(V)$ dla $k = 0, \dots, n$, na jednomianach:

$$F^*(f\,dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = (f \circ F)\,dF_{i_1} \wedge \dots \wedge dF_{i_k}.$$

Bez trudu sprawdzamy, że gdy $\omega \in \Omega^k(\mathcal{U})$, $x \in V$, $\xi_1, \dots, \xi_k$ są polami wekt. na V, to

$$F^*\omega(x; \xi_1, \dots, \xi_k) = \omega(F(x), DF(x)\xi_1, \dots, DF(x)\xi_k).$$

Własności:

• $$W \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} \mathcal{U},$$ to

$$(f \circ g)^*\omega = g^* f^* \omega \quad \text{dla } \omega \in \Omega^k(\mathcal{U})$$

• jeżeli $\alpha \in \Omega^k(\mathcal{U})$, $\beta \in \Omega^l(\mathcal{U})$, to
$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta$$

• $f^*(d\omega) = d f^*\omega \quad \forall_{\omega \in \Omega(\mathcal{U})}$

wystarczy sprawdzić na jednomianach,

~~jeżeli~~ $\cancel{\omega = h\,dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}}$, ~~to~~ $\cancel{d\omega = dh \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}}$

$\cancel{f^*(d\omega) =}$

- jeżeli ω jest 0-formą, tzn. $\omega = h \in C^\infty(\mathcal{U})$,

to $f^*\omega = h \circ f$

$$f^* d\omega = f^*\left(\cancel{\frac{\partial h}{\partial x_i}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_i}(f(\cdot)) \cdot df_i = \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \circ f\right) \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$$

i widać, że dowód to po prostu wzór na różniczkowanie złożenia.

- niech $\omega \in \Omega^k(\mathcal{U})$ będzie jednomianem,

$\omega = h\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$, wtedy

$$f^*(d\omega) = f^*(dh \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) =$$

$$= f^* dh \wedge f^* dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge f^* dx_{i_k} = d(h \circ f) \wedge df_{i_1} \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge df_{i_k} =$$

$$= d(h \circ f \wedge df_{i_1} \wedge \ldots \wedge df_{i_k}) = d(f^*\omega).$$

Orientacja rozmaitości

Jak pamiętamy z GALu, orientacja przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ to (jedna z dwóch) klasa równoważności baz tej przestrzeni względem relacji zgodnego zorientowania: dwie bazy $\mathbb{R}^n$ są w tej relacji, gdy macierz przejścia między nimi ma dodatni wyznacznik. Dla ustalenia uwagi klasę równoważności zawierającą bazę standardową $\{e_1, \dots, e_n\}$ (w tej kolejności!) nazywamy orientacją dodatnią, a drugą klasę orientacją ujemną.

Chcemy przenieść to pojęcie na ustaloną k-wymiarową rozmaitość $S \subset \mathbb{R}^n$ klasy C^1.

W każdym $p \in S$ mamy przestrzeń styczną $T_pS \simeq \mathbb{R}^k$, tak więc każdemu punktowi p możemy przypisać jedną z dwóch możliwych orientacji przestrzeni stycznej w tym punkcie. Oznaczając to przypisanie $p \longmapsto \tau(p)$ otrzymujemy na S <u>pole orientacji</u>.

Gdy $\psi : \mathcal{U} \to S$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$, jest lokalną parametryzacją rozmaitości S, to, jak pamiętamy, $\forall_{x \in \mathcal{U}}$ wektory $\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_k}$ tworzą bazę przestrzeni $T_{\psi(x)} S$. Mówimy, że parametryzacja ψ jest <u>zgodna z polem orientacji</u> τ, gdy $\forall_{x \in \mathcal{U}}$ baza $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_k}(x) \right)$ jest zgodna z orientacją (lub, poprawniej, wyznacza orientację) $\tau(\psi(x))$. Pole orientacji τ nazywamy <u>orientacją</u> rozmaitości S, gdy istnieje taki atlas rozmaitości S (tzn. układ map $(\varphi_i; V_i)$ pokrywających S), że związane z nim parametryzacje $\varphi_i^{-1} : \varphi_i(V_i) \to S$ są zgodne z τ. Parę (S, τ) nazywamy <u>rozmaitością orientowaną</u>, rozmaitość na której istnieje (co najmniej jedna) orientacja τ nazywamy <u>rozm. orientowalną</u>.

<u>Uwagi</u>:

- dowolny płat jest orientowalny (bo mając jego parametryzację $\psi : \mathcal{U} \to S$ możemy przyjąć za $\tau(\psi(x))$ orientację wyznaczoną przez bazę $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_k}(x) \right)$.

- każda rozmaitość orientowalna ma co najmniej 2 orientacje
  bo mając daną orientację τ na S możemy zdefiniować pole orientacji $-\tau$, które każdemu $p \in S$ przypisuje w T_pS orientację przeciwną do $\tau(p)$.
  Zadanko: Mając dany atlas zgodny z τ wskazać atlas zgodny z $-\tau$.
- dla rozmaitości 1-wymiarowych definiowaliśmy klasy C^1 orientację jako nieznikające, ciągłe pole wektorów stycznych.

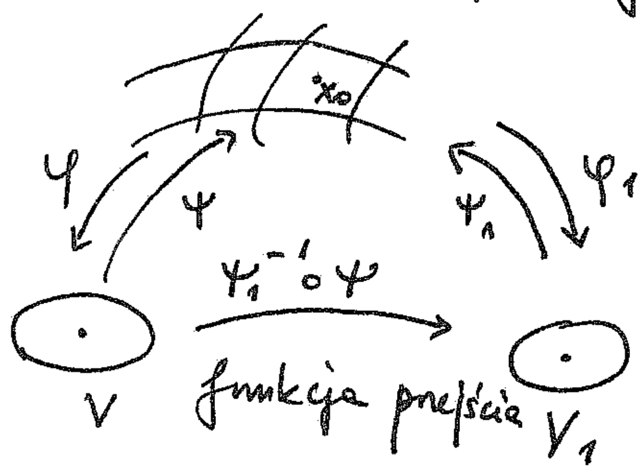
Zadanie: Wykazać, że te dwie definicje są równoważne: mając dane takie pole $v: S \to TS$, $v(p) \in T_pS \setminus \{0\}$ możemy wyznaczyć orientację τ, mając dane τ znajdziemy pole v.

Zadanie (trochę poważniejsze): każda 1-wymiarowa rozmaitość jest orientowalna (wskazówka: każda spójna rozmaitość 1-wymiarowa jest homeomorficzna z prostą lub z okręgiem)

- każda rozmaitość spójna ma co najwyżej dwie orientacje (a więc każda spójna rozmaitość orientowalna ma dokładnie dwie orientacje).

Niech bowiem τ, τ_1 będą dwiema różnymi orientacjami rozmaitości spójnej S. Rozważmy $A = \{x \in S : \tau(s) = \tau_1(s)\}$

Jeżeli $A \neq \emptyset$, i $x_0 \in A$, to w otoczeniu x_0 mamy mapę φ i parametryzację $\psi = \varphi^{-1}$; zgodną z orientacją τ oraz mapę φ_1 i parametryzację $\psi_1 = \varphi_1^{-1}$ zgodną z orientacją τ_1.



Oznaczając $g = \psi_1^{-1} \circ \psi$ mamy $\psi = \psi_1 \circ g$ i wiemy, że g jest dyfeomorfizmem;

$$D\psi(y) = D\psi_1(g(y)) \cdot Dg(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \psi(y) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y) \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i}(g(y))$$

w punkcie $y = \varphi(x_0)$ macierz $\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y)\right)$ przejścia od bazy $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(y)\right)_{j=1,\dots,k}$ do bazy $\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_j}(y)\right)_{j=1,\dots,k}$ ma wyznacznik > 0, bo $\tau(y) = \tau(y_1)$

więc w pewnym otoczeniu $\varphi(x_0)$ też

$\Rightarrow \tau = \tau_1$ w pewnym otoczeniu $x_0 \Rightarrow A$ jest otwarty w S.

Tak samo dowodzimy, że $A_1 = \{x \in S : \tau(x) = -\tau_1(x)\}$ jest otwarty, oczywiście $A \cup A_1 = S$, więc jeden z tych zbiorów musi być pusty, ze spójności S.

- jeżeli na k-wymiarowej rozmaitości $S \subset \mathbb{R}^n$ mamy $(n-k)$ ciągłych pól wektorowych $v_1, \dots, v_{n-k}$ takich, że $\operatorname{span}(T_pS, v_1(p), \dots, v_{n-k}(p)) = \mathbb{R}^n$ we wszystkich $p \in S$, to S jest orientowalna

Dowód:

możemy dla każdego $p \in S$ wybrać w T_pS taką orientację $\tau(p)$, by dodatnio zorientowana baza $w_1, \dots, w_k$ przestrzeni T_pS uzupełniona wektorami $v_1, \dots, v_{n-k}$ dała dodatnio zorientowaną bazę $\mathbb{R}^n$.

Wniosek: ① poziomice regularne (tzn. rozmaitości postaci $S=\{x\in\mathbb{R}^n : F(x)=0\}$, gdzie $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n-k}$, $\operatorname{rank} DF = n-k$ we wszystkich punktach S), są orientowalne: $v_i = \nabla F_i$, $i=1,\dots,n-k$ są poszukiwanymi polami wektorowymi.

② jeżeli $S\subset\mathbb{R}^n$ jest podrozmaitością kowymiaru 1 i na S istnieje nieznikające, ciągłe pole normalne (tzn. $n(p)\perp T_pS$ $\forall_p$) to S jest orientowalna.

to pole

Zadanko: jest też odwrotnie: każda orientacja S zadaje na S pole wektorów normalnych jednostkowych.

Zadanie:

Rozmaitość $\varphi((-1,1)\times\mathbb{R})$, gdzie
$$\varphi(x,t)=\left(\left(1+x\cos\tfrac{t}{2}\right)\cos t,\ \left(1+x\cos\tfrac{t}{2}\right)\sin t,\ x\sin\tfrac{t}{2}\right)$$
to wstęga Möbiusa

- sprawdzić, że to rzeczywiście jest rozmaitość
- starannie wykazać jej nieorientowalność.

Całkowanie formy różniczkowej po rozmaitości

- Gdy $U \subset \mathbb{R}^m$ jest otwarty i $\omega \in \Omega^m(U)$, to $\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ dla pewnej $f \in C^\infty(U)$, przyjmujemy $\int_U \omega := \int_U f \, d\lambda_m$

<u>Uwaga:</u> to może nie mieć sensu: funkcja f, choć gładka, może nie być całkowalna na zbiorze U (a więc forma ω może nie być całkowalna). Dlatego też będziemy dalej rozważać formy o nośniku zwartym – wtedy nie ma tej trudności.

- niech $S \subset \mathbb{R}^n$ będzie zorientowaną rozmaitością wym. k, ~~i niech~~ [illegible] $U \subset \mathbb{R}^n$ otwarty niech będzie taki, że $S \cap U$ jest dziedziną jednej mapy $\varphi : S \cap U \to V \subset \mathbb{R}^k$ (czyli jest płatem) i niech $\omega \in \Omega^k(U)$ ma nośnik zwarty.

~~Wówczas~~ Załóżmy dodatkowo, że parametryzacja $\psi = \varphi^{-1} : V \to S \cap U$ jest zgodna z orientacją S. Wówczas definiujemy

$$\int_S \omega = \int_V \psi^*\omega$$

($\psi^*\omega$ jest k-formą o nośniku zwartym na V)

<u>Uwaga</u>: wartość $\int_S \omega$ nie zależy od wyboru parametryzacji ψ; jeżeli dwie parametryzacje $\psi_1 : V_1 \to S \cap \mathcal{U}$ i $\psi_2 : V_2 \to S \cap \mathcal{U}$ są zgodne z orientacją, to mamy funkcję przejścia $\Phi : V_1 \to V_2$, $\Phi = \psi_2^{-1} \circ \psi_1$, która jest dyfeomorfizmem <u>o dodatnim jakobianie</u> (dlaczego?)

dla $\omega = \cancel{h\,dx_1 \wedge \ldots \wedge} dx$

więc $\int_S \omega = \int_{V_2} \psi_2^* \omega =$

ale jeżeli $\psi_2^* \omega = h\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$, to

moduł niepotrzebny, bo $\det D\Phi > 0$

$$= \int_{V_2} h\, d\lambda_k = \int_{V_1} h \circ \Phi \cdot |\det D\Phi|\, d\lambda_k$$

$$= \int_{V_1} \cancel{h \circ \Phi} \; \Phi^*(h\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k) =$$

$$= \int_{V_1} \psi_1^* (\psi_2^{-1})^* (\psi_2^* \omega) = \int_{V_1} \psi_1^* (\psi_2 \circ \psi_2^{-1})^* \omega =$$

$$= \int_{V_1} \psi_1^* \omega .$$

- dla dowolnej rozmaitości $S \subset \mathbb{R}^n$ zorientowanej i formy ω określonej na pewnym otoczeniu S definiujemy $\int_S \omega$ poprzez rozkład jedynki: pokrywamy S zbiorami $\mathcal{U}_\alpha$ tż. $S \cap \mathcal{U}_\alpha$ jest płatem, oraz $\overline{\mathcal{U}_\alpha}$ zwarty, wybieramy $\underbrace{\text{podpokrycie}}_{}$ przeliczalne lokalnie skończone $\{\mathcal{U}_\beta\}$, wpisujemy w nie rozkład jedynki φ_β, wtedy dla dowolnego $A \subset S$ mierzalnego (względem miary powierzchniowej) definiujemy

$$\int_A \omega = \sum_\beta \int_{S \cap \mathcal{U}_\beta} \varphi_\beta \omega .$$

to oczywiście znacznie się upraszcza, gdy A lub S jest zwarty lub gdy ω ma nośnik zwarty – wszystkie sumy są wtedy skończone i dodatkowo mamy gwarancję całkowalności ω na A.

Aby wypowiedzieć tw. Stokesa potrzebujemy jeszcze jednej definicji:

Niech ~~...~~ S będzie k-wymiarową podrozm. $\mathbb{R}^n$ i niech $A \subset S$ będzie zwarty. Punkt $x \in \underset{S \leftarrow \text{brzeg wzgl. } S}{\partial_S A} = cl_S A \setminus int_S A$ nazywamy <u>punktem regularnym brzegu</u> A, gdy w otoczeniu x $\partial_S A$ jest $(k-1)$-wymiarową podrozm. $\mathbb{R}^n$; wszystkie punkty regularne brzegu oznaczamy ~~...~~ $\partial^r A$ (brzeg regularny A). Dla przykładu, gdy $A = [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n = S$, to $\partial^r A$ to wnętrza ~~ścian~~ $(n-1)$-wymiarowych ścian kostki.

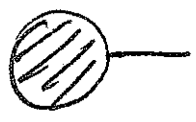
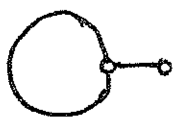
$\partial A \setminus \partial^r A$ nazywać będziemy <u>brzegiem osobliwym</u> A i oznaczać $\partial^s A$.

Podzbiór $A \subset S$ nazywamy <u>regularnym</u>, gdy

- A jest zwarty

oraz

- $\partial^r A \subset \overline{int_S A}$

<u>Przykład</u>:  , to $\partial^r A =$ 

$\overline{int_S A} =$ 

więc A nie jest regularny.

Gdy $A \subset S$ jest zwarty, to oczywiście
$\partial^r A$ jest otwarty w ∂A, więc $\partial^s A$ jest zwarty,
zwarty.

a $\partial^r A$, o ile jest niepusty, jest $(k-1)$-wym. podrozmaitością $\mathbb{R}^n$.

Jeżeli S jest rozmaitością zorientowaną, z orientacją τ, to dla każdego $x \in \partial^r A$ wybieramy wektor $n(x)$ taki, że

- $n(x) \in T_S(x)$, $|n(x)| = 1$
- $n(x) \perp T_{\partial^r A}(x)$
- $n(x)$ wskazuje „na zewnątrz" A, tzn.

$\exists_{\varepsilon > 0}$ ~~$\exists_{\varepsilon>0}$~~ tz. istnieje krzywa $\gamma : [0, \varepsilon] \to S$
$\gamma(0) = x$, $\gamma(t) \notin A$ dla $t \in (0, \varepsilon)$
oraz $\gamma'(0) = n(x)$.

<u>Zadanie:</u> wykazać istnienie takiego ciągłego $n(x)$

i ustalamy orientację σ rozmaitości $\partial^r A$ tak, by baza $v_1(x), \dots, v_{k-1}(x) \in T_x \partial^r A$ była zorientowana zgodnie z σ wtw. gdy baza przestrz. $T_x S$
$n(x), v_1, \dots, v_{k-1}$ jest zorientowana zgodnie z orient. τ.

Tę orient. nazywamy dziedziczoną

Twierdzenie Stokesa

Niech $S \subset \mathbb{R}^n$ będzie k-wymiarową podrozm. zorientowaną, $A \subset S$ niech będzie jej podzbiorem regularnym, i niech ω będzie $(k-1)$-formą różniczkową ~~na $\mathbb{R}$ klasy C^1 taką, że~~ na pewnym otoczeniu U zbioru A w $\mathbb{R}^n$, taką, że

- $d\omega$ jest ciągła na U
- ω jest całkowalna na $\partial^r A$.

Załóżmy dodatkowo, że $\partial^s A$ jest $(k-1)$-wym. miary Hausdorffa zero.

Wówczas

$$\int_A d\omega = \int_{\partial^r A} \omega$$

gdzie ~~∂A~~ na $\partial^r A$ przyjmujemy orientację dziedziczoną z orientacji S.