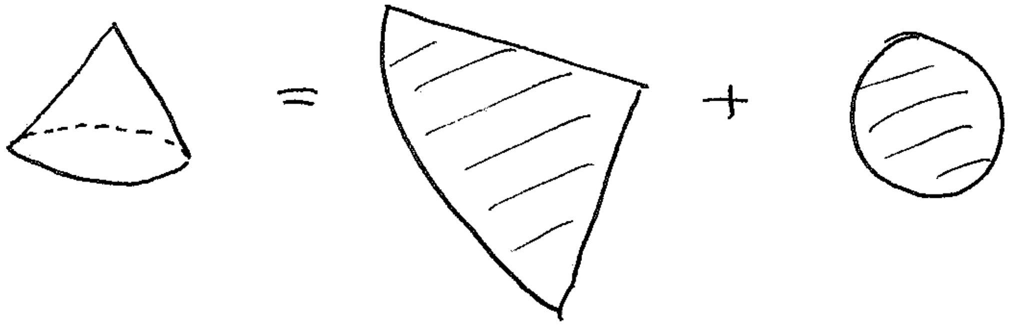
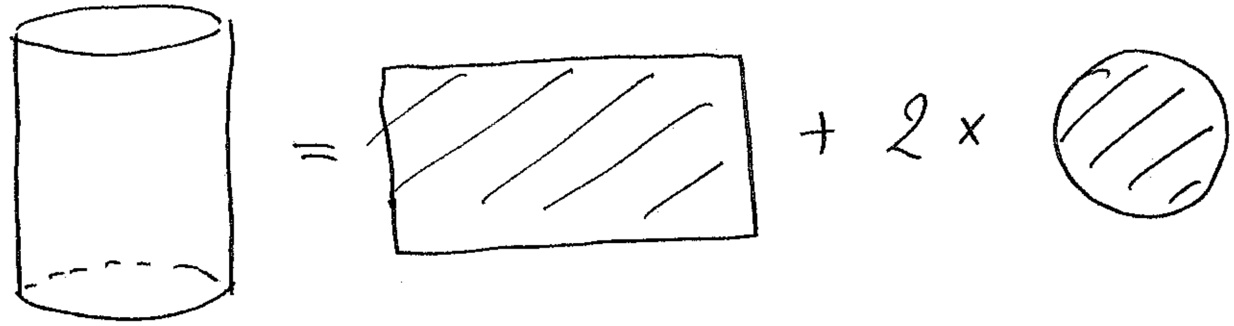
Miara powierzchniowa

Cała teoria miary – i znaczna część geometrii – wzięły się z przyziemnej potrzeby mierzenia pola kapusty czy pszenicy. Oczywiście najprościej, gdy pole jest w miarę płaskie i prostokątne; póki jest płaskie, umiemy sobie poradzić z tym, że ma inny kształt (po to była nam 2-wymiarowa miara Lebesgue'a).

Jak jednak zmierzyć powierzchnię powiatu nowotarskiego? Albo państwa takiego jak Rosja? Przybliżanie ich podzbiorem płaszczyzny prowadzi do bardzo grubych błędów. A jednak w Wikipedii znajdziemy jakieś wielkości tych pól – więc najwyraźniej się da.

Podobny problem napotykamy przy liczeniu pola powierzchni figur przestrzennych. Nie ma problemu, gdy są to wielościany – rozcinamy je wzdłuż niektórych krawędzi i rozpłaszczamy do ich siatki, a tę – jako podzbiór płaszczyzny – umiemy już zmierzyć. Ta sama metoda zadziała w przypadku stożka czy walca:

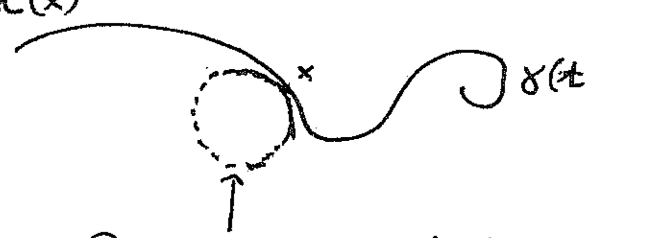




<u>Pomysł</u>: chcemy podzielić figurę na kilka części, z których każdą można <u>izometrycznie</u> przekształcić na podzbiór płaszczyzny.

<u>Problem</u>: Nie da się tego zrobić z powierzchnią kuli:

Tu krótka dygresja: mając krzywą klasy C^2 na płaszczyźnie możemy w każdym jej punkcie x wyznaczyć jej krzywiznę: $\varkappa(x)$



Konwencja: $-$, gdy okrąg jest po prawej, $+$, gdy po lewej stronie krzywej

O_x - okrąg najlepiej styczny;

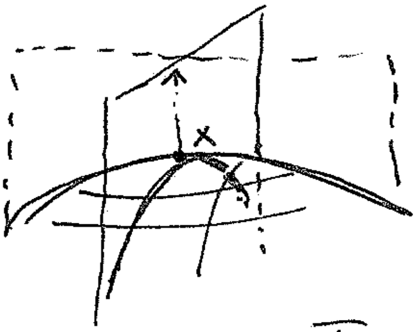
dla punktów t w pobliżu x odległość $d(\gamma(t), O_x) = o(x-t)$

Jeżeli r_x to promień O_x, to $\varkappa(x) = \pm\frac{1}{r_x}$; gdy krzywa w pobliżu x jest ~~płaska~~ bardzo bliska odcinkowi ($r_x = +\infty$), to $\varkappa(x) = 0$.

<u>Zadanie</u>: Mając parametryzację $\gamma \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$

wyrażający $\varkappa(x)$ i r_x w dowolnym $x \in \mathbb{R}$.

Dla powierzchni klasy C^2 w $\mathbb{R}^3$ możemy zrobić coś zbliżonego:



Biorąc punkt x na powierzchni Γ tniemy ją płaszczyznami zawierającymi wektor prostopadły do Γ w x, otrzymując krzywą γ_φ, a w zasadzie – całą rodzinę krzywych γ_φ, zależnych od kąta φ, parametryzującego płaszczyzny cięcia.

Każdej z tych krzywych możemy przypisać krzywiznę $\varkappa_{\varphi}(x)$ w punkcie x; jeżeli Γ jest klasy C^2, to $\varkappa_\varphi(x)$ jest ciągłą funkcją kąta φ, $\varphi \in S^1$, więc przyjmuje wartość minimalną i maksymalną: $\varkappa_{min}(x)$ i $\varkappa_{max}(x)$. Dość niezwykłe jest to, że ~~zawsze płaszczyzny, dla których osiąg~~ jeżeli $\varkappa_{min}$ osiągane jest dla kąta φ, to $\varkappa_{max}$ jest osiągana dla $\varphi + \pi/2$ (płaszczyzny są prostopadłe).

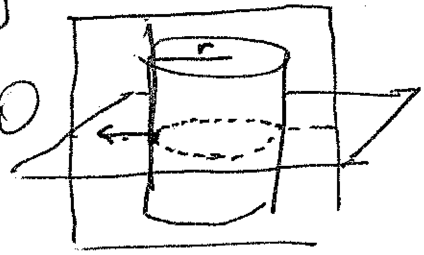
Iloczyn $\varkappa_{min}(x)\varkappa_{max}(x)$ nazywamy krzywizną Gaussa powierzchni Γ w x i oznaczamy $K(x)$.

<u>Twierdzenie</u> (theorema egregium – twierdzenie szacowne Gaussa, 1827)

K jest niezmiennikiem lokalnych izometrii

Wnioski:

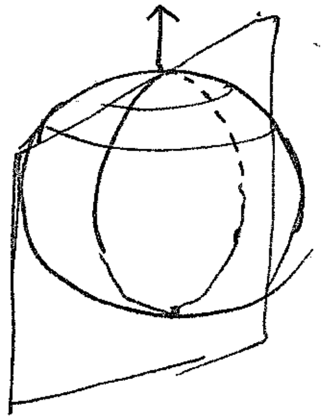
Krzywizna Gaussa (powierzchni bocznej) walca jest 0



$\varkappa_{min} = 0$, $\varkappa_{max} = \frac{1}{r}$

$K = 0 \cdot \frac{1}{r}$

Za to krzywizna ~~p~~ sfery o promieniu r jest $K = \frac{1}{r^2}$:



krojenie sfery daje zawsze koło wielkie

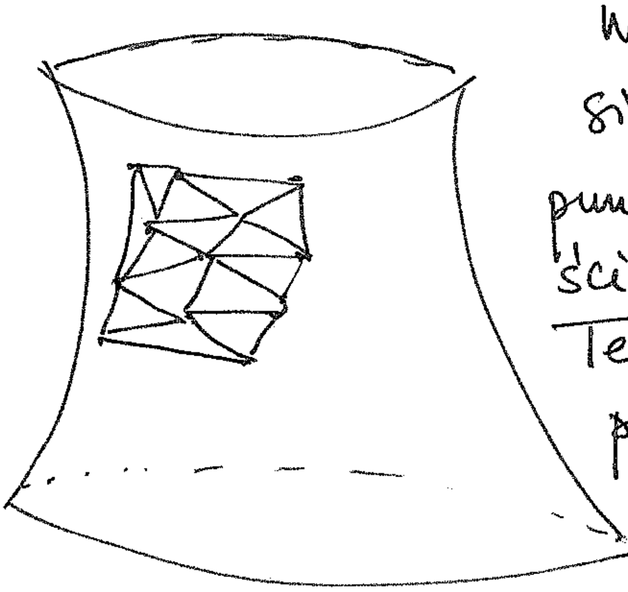
Dlatego powierzchnię walca można odwzorować na płaszczyznę (a dokładniej - jej podzbiór) z zachowaniem odległości, a powierzchni sfery nie - i to żadnego jej otwartego kawałka!

Więcej o tym (w szczególności - dowody) - na wykładzie z geometrii różniczkowej.

No to jak mierzyć pole powierzchni w $\mathbb{R}^3$?

Gdy chcieliśmy obliczyć długość krzywej $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, zdefiniowaliśmy $l(\gamma)$ jako ~~$\sup_V \sum$~~ supremum długości łamanych wpisanych w γ; szczęśliwie okazało się, że gdy średnica podziału związanego z łamaną dążyła do zera, długość łamanych dążyła do $l(\gamma)$.

To sugeruje pomysł na mierzenie pola powierzchni:



S

TRIANGULACJA

Wybieramy na S gęstą sieć N punktów, łączymy punkty, tworząc wielościan, którego ścianami są trójkąty.

Ten wielościan W przybliża powierzchnię S.

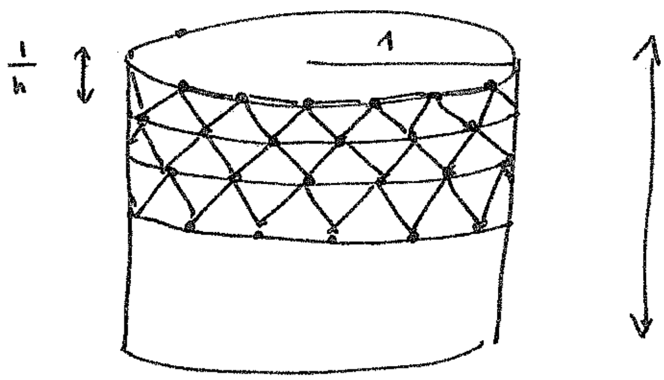
Niech $\delta(W) =$ ~~sup~~ max długości krawędzi W.

Czy $P(S) = \sup P(W)$? $\lim_{\delta(W)\to 0} P(W)$?

Takiej definicji pola ~~wzgina~~ uczono studentów jeszcze ok. 1870-1880 roku (np. Hermite), dopóki jednocześnie H. Schwartz i G. Peano nie zauważyli, że jest ona błędna.

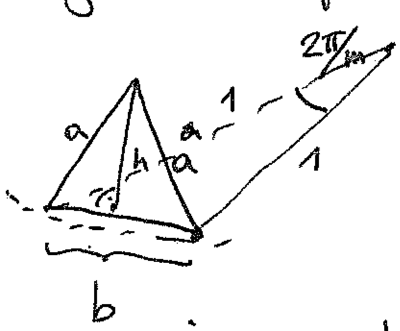
Chińska latarnia Hermanna Schwarza

Wykonajmy pewną szczególną triangulację $W_{n,m}$ powierzchni bocznej S walca



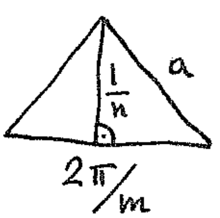
Dzielimy tworzącą na n części, uzyskując $n+1$ okręgów. Na każdym z nich zaznaczamy m punktów w równych odstępach; na sąsiednich okręgach punkty są przesunięte o $\frac{\pi}{m}$. W ten sposób dostajemy triangulację powierzchni S.

Aby znaleźć pole trójkąta P_Δ tej triangulacji, musimy rozwiązać kilka prostych zadanek z geometrii płaskiej:



$\Rightarrow b = 2\sin\frac{\pi}{m}$

Po rozwinięciu pow. bocznej



więc $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2 = a^2 \Rightarrow \left(\sin\frac{\pi}{m}\right)^2 + h^2 = a^2$

ale też $\left(\frac{\pi}{m}\right)^2 + \frac{1}{n^2} = a^2 \Rightarrow h^2 = \frac{1}{n^2} + \left(\frac{\pi}{m}\right)^2 - \sin^2\frac{\pi}{m}$

i ostatecznie $P_\Delta = \sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{1}{n^2} + \left(\frac{\pi}{m}\right)^2 - \sin^2\frac{\pi}{m}}$, więc

$$P_{n,m} = 2nm\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{1}{n^2} + \left(\frac{\pi}{m}\right)^2 - \sin^2\frac{\pi}{m}}$$

Dla $n = m$

$$P_{m,m} = 2m^2 \sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{\pi^2+1}{m^2} - \sin^2\frac{\pi}{m}} = 2\frac{\sin\frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}}\cdot\pi\sqrt{\pi^2+1-\left(\frac{\sin\frac{\pi}{m}}{\pi/m}\right)^2\pi^2}$$

$\longrightarrow 2\pi$ i to jest spodziewany wynik

Weźmy jednak $n = m^2$, wtedy $\sin^2 t = t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^5)$, więc

$$P_{m^2,m} = 2m^3 \sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{1}{m^4}+\frac{\pi^2}{m^2}-\sin^2\frac{\pi}{m}} = 2\frac{\sin\frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}}\pi\cdot\sqrt{1+\cancel{\frac{\pi^2}{m^2}}-\cancel{\frac{\pi^2}{m^2}}+\frac{\pi^4}{3m^4}+\dots+o\left(\frac{1}{m^5}\right)}$$

$$\cdot\sqrt{1+\frac{\pi^4}{3}+o\left(\frac{1}{m}\right)} \longrightarrow 2\pi\sqrt{1+\frac{\pi^4}{3}}$$

i to już nie jest dobry wynik.

A dla $n = m^3$

$$P_{m^3,m} = 2m^4\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{1}{m^6}+\frac{\pi^2}{m^2}-\sin^2\frac{\pi}{m}} =$$

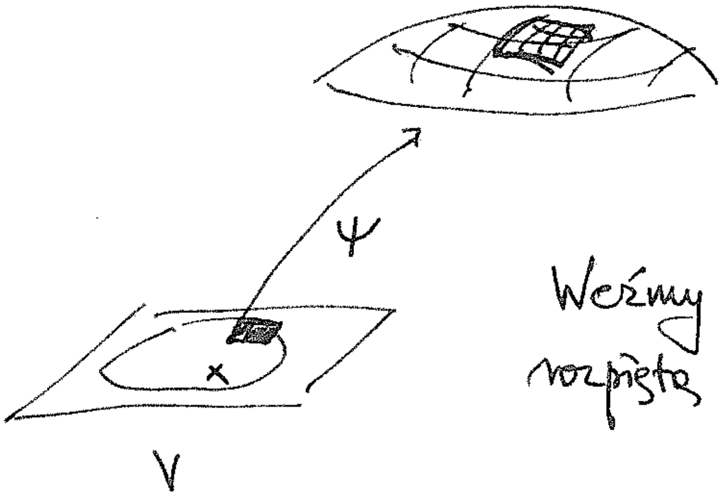
$$= 2\frac{\sin\pi/m}{\pi/m}\cdot\pi\sqrt{1+m^6\left(\frac{\pi^2}{m^2}-\frac{\pi^2}{m^2}+\frac{\pi^4}{3m^4}+o\left(\frac{1}{m^5}\right)\right)} =$$

$$= 2\frac{\sin\pi/m}{\pi/m}\cdot\pi\sqrt{1+m^2\frac{\pi^4}{3}+o(m)} \longrightarrow +\infty$$

A więc trzeba inaczej.

Pomysł:

Powierzchnia (czy też ogólniej – rozmaitość gładka wym. k w $\mathbb{R}^n$) ma lokalnie opis parametryczny



Weźmy w V ~~małą~~ małą kostkę εQ k-wym. rozpiętą przez wektory $\varepsilon e_1, \dots, \varepsilon e_k$

Obrazem tej kostki jest jakiś mały kawałek powierzchni – łatka.

O ile wyjściowa kostka jest dost. mała, Ψ jest dobrze na niej przybliżane przez swoje rozw. Taylora stopnia 1: $\Psi(y) \simeq \underbrace{\Psi(x) + D\Psi(x)(y-x)}_{\text{wzgl. } y \text{ to jest p-nie afiniczne.}}$

Obrazem kostki εQ w tym p-niu afinicznym jest równoległościan zaczepiony w $\Psi(x)$, o krawędziach $\varepsilon D\Psi(x)e_1, \dots, \varepsilon D\Psi(x)e_k$. Jaka jest jego ($k$-wymiarowa) objętość?

Tu trzeba przypomnieć trochę GALu.

Jaka jest objętość n-wym. równoległościanu rozpiętego przez wektory $v_1, \dots, v_n$? $Vol(v_1, \dots, v_n)$

Dla (pozornego) utrudnienia rozważmy objętość ze znakiem: $+$, gdy $v_1, \dots, v_n$ są ~~lin. niezal.~~ bazą zorient. dodatnio, $-$, gdy ujemnie (gdy nie są lin. niezależne, nie mamy problemu, objętość jest zero).

Łatwo sprawdzamy, że $Vol(v_1, \dots, v_n)$ zmienia znak, gdy zamienimy 2 argumenty i że jest liniowa wzgl. każdego z argumentów (dlaczego?), jest więc formą n-liniową. Dodatkowo, $Vol(e_1, \dots, e_n) = 1$. Przestrzeń n-form ~~z~~ na $\mathbb{R}^n$ (tzn. przekszt. n-liniowych antysymetrycznych w $\mathbb{R}$) jest 1-wymiarowa, bo ~~wartość~~ n-forma jest jednozn. wyznaczona przez swoją wartość na $(e_1, \dots, e_n)$, a my znamy n-formę, która na $(e_1, \dots, e_n)$ przyjmuje 1 — to wyznacznik.

Stąd $Vol(v_1, \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_n)$

i objętość (bez znaku) to $|\det(v_1, \dots, v_n)|$

Gdy chcemy obliczyć objętość k-wym. równoległościanu w $\mathbb{R}^n$, rozpiętego przez wektory ~~e_1~~.. $(v_1, \dots, v_k)$, jest ciut trudniej, ale mamy wyznacznik Grama.

<u>Def:</u> Macierz Grama układu wektorów $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ to macierz $G(v_1, \ldots, v_m) \in M^{m \times m}$ o wyrazach $G_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$

Wyznacznik tej macierzy (też często oznaczany $G(v_1, \ldots, v_m)$ lub $\mathrm{Gram}(v_1, \ldots, v_m)$) to wyznacznik Grama tego układu.

Nietrudno zauważyć, że gdy T jest macierzą, której kolumnami są wektory $v_1, \ldots, v_m$, to macierz Grama tych wektorów to

$$G(v_1, \ldots, v_m) = T^T T$$

a wyznacznik Grama to

$$\mathrm{Gram}(v_1, \ldots, v_m) = \det T^T T$$

; jeżeli $m = n$, to macierz T jest kwadratowa, $\det T = \det T^T$ i $\mathrm{Gram}(v_1, \ldots, v_n) = (\det T)^2$.

<u>Stwierdzenie</u>: $|\mathrm{Gram}(v_1, \ldots, v_m)|$ to m-wymiarowa miara Lebesgue'a m-wymiarowego równoległościanu rozpiętego w $\mathbb{R}^n$ przez wektory $v_1, \ldots, v_m$.

Wyznacznik Grama

Jørgen Pedersen Gram (1850–1916)
duński matematyk i aktuariusz,
wkład w analityczną teorię liczb
i statystykę matematyczną.

Niech $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$.

Macierzą Grama wektorów $v_1, \ldots, v_m$ nazywamy macierz $\underset{M^{m\times m}}{\underset{\cap}{G(v_1,\ldots,v_m)}}$ o wyrazach $G_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$.

Wyznacznikiem Grama tego układu wektorów nazywamy $\det G(v_1, \ldots, v_m)$, ozn. $\mathrm{Gram}(v_1, \ldots, v_m)$ lub, dla zmylenia przeciwnika, również $G(v_1, \ldots, v_m)$

Kluczowa własność: $\mathrm{Gram}(v_1, \ldots, v_m)$ to kwadrat objętości (tj m-wym. miary Lebesgue'a) równoległościanu rozpiętego przez wektory $v_1, \ldots, v_m$.

Dowód (tylko w przypadku $m=n$, proszę zastanowić się, jak to przerobić na $m<n$).

Rozważmy przekształcenie liniowe $T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ takie, że $Te_i = v_i$.

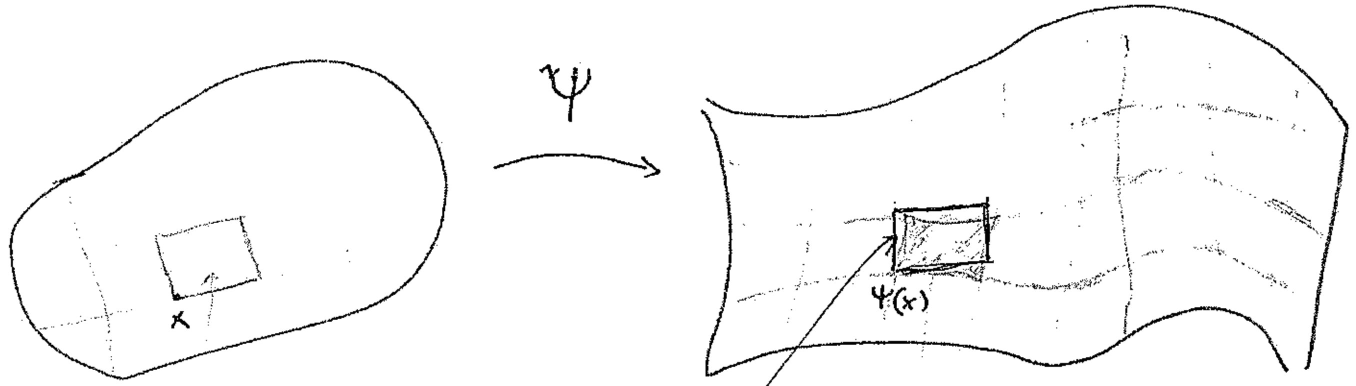
Wtedy oczywiście macierz T ma postać $(v_1, \ldots, v_n)$,
$G(v_1, \ldots, v_n) = T^T \cdot T$, $\mathrm{Gram}(v_1, \ldots, v_n) = \det(T^T \cdot T) =$
$= (\det T)^2$.

Z drugiej strony równoległościan rozpięty przez $v_1, \dots, v_n$ to $T(Q)$, gdzie $Q = [0,1]^n$.

Stąd $\lambda_n(T(Q)) = |\det T| \cdot \lambda_n(Q) = |\det T|$.

$\square$.

Niech teraz $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie k-wymiarową rozmaitością zanurzoną klasy C^1. Wtedy M jest „pozszywana" z kawałków – płatów, dla których mamy parametryzację:



$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$

zbiór otwarty

$\Psi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ parametryzacja: homeomorfizm $\mathcal{U}$ na $\Psi(\mathcal{U})$, $D\Psi(x)$ ma dla $x \in \mathcal{U}$ rząd maksymalny (tzn. k).

(mała kostka w $\mathbb{R}^k$)
mały kwadracik K o bokach równoległych do osi współrzędnych

$\Psi(x) + D\Psi(K - x)$

$\Psi(K)$

Im mniejszy jest kwadracik K, tym lepiej równoległościan $\Psi(x) + D\Psi(x)(K - x)$ przybliża $\Psi(K)$.

Macierz przekształcenia afinicznego

$T(y)=\Psi(x)+D\Psi(x)(y-x)$ to po prostu $D\Psi(x)$,

więc $\lambda_k(T(K)) = |\det T|\,\lambda_k(K) =$

$= \mathrm{Gram}\,(D\Psi(x)e_1, D\Psi(x)e_2, \dots, D\Psi(x)e_k)\,\lambda_k(K).$

$= \sqrt{\det(D\Psi(x)^T D\Psi(x))}\;\lambda_k(K).$

Jeżeli teraz $A \subset U$ jest zbiorem mierzalnym, to <u>miarę powierzchniową</u> zbioru $\Psi(A)\subset M$ definiujemy jako

$$\sigma_k(\Psi(A)) = \int_A \sqrt{\det(D\Psi(x)^T D\Psi(x))}\, d\lambda_m(x).$$

W ten sposób definiujemy miarę na M – tylko czy definicja ta nie zależy od wyboru parametryzacji? od sposobu podzielenia $\Sigma \subset M$ między dziedziny map (tzw. płaty)?

Na pytania te odpowiemy za chwilę, na razie obliczmy objętość trójwymiarowej sfery jednostkowej

$$S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x\| = 1\}$$

Wystarczy oczywiście wyznaczyć objętość „półsfery północnej" $N = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1, \ x_4 > 0\}$, objętość całej sfery S^3 to dwukrotność objętości N.

N jest płatem: jeżeli przez $\mathbb{B}^3$ oznaczymy kulę jednostkową w $\mathbb{R}^3$, to

$\{ \mathbb{B}^3 = \{z \in \mathbb{R}^3 : \|z\| < 1\}$

$$\Psi : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{R}^4$$

$$\Psi(z_1, z_2, z_3) = \left(z_1, z_2, z_3, \sqrt{1 - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)}\right)$$

przekształca $\mathbb{B}^3$ w N, mamy też

$$d\Psi(z) = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{z_1}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \end{matrix}}_{= v_1} \quad \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{z_2}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \end{matrix}}_{= v_2} \quad \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{z_3}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \end{matrix}}_{= v_3} \right)$$

widać, że $d\Psi(z)$ ma rząd 3, czyli maksymalny.

$$d\Psi(z)^T d\Psi(z) = G(v_1, v_2, v_3) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{z_1^2}{1-\|z\|^2} & \frac{z_1 z_2}{1-\|z\|^2} & \frac{z_1 z_3}{1-\|z\|^2} \\ \frac{z_1 z_2}{1-\|z\|^2} & 1 + \frac{z_2}{1-\|z\|^2} & \frac{z_2 z_3}{1-\|z\|^2} \\ \frac{z_1 z_3}{1-\|z\|^2} & \frac{z_2 z_3}{1-\|z\|^2} & 1 + \frac{z_3}{1-\|z\|^2} \end{pmatrix},$$

$$D\Psi(z) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-z_1}{\sqrt{1-\|z\|^2}} & \frac{-z_2}{\sqrt{1-\|z\|^2}} & \frac{-z_3}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} v_1 & \quad v_2 & \quad v_3 \end{array} \end{array}$$

$$1 + \frac{z_1^2}{1-\|z\|^2} = \frac{1-\cancel{z_1^2}-z_2^2-z_3^2}{1-\|z\|^2}$$

$$D\Psi(z)^T \cdot D\Psi(z) = G(v_1, v_2, v_3) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+\frac{z_1^2}{1-\|z\|^2} & \frac{z_1 z_2}{1-\|z\|^2} & \frac{z_1 z_3}{1-\|z\|^2} \\ \frac{z_1 z_2}{1-\|z\|^2} & 1+\frac{z_2^2}{1-\|z\|^2} & \frac{z_2 z_3}{1-\|z\|^2} \\ \frac{z_1 z_3}{1-\|z\|^2} & \frac{z_2 z_3}{1-\|z\|^2} & 1+\frac{z_3^2}{1-\|z\|^2} \end{pmatrix}$$

$$\det\left(D\Psi(z)^T \cdot D\Psi(z)\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{1-\|z\|^2}\right)^3 \det\begin{pmatrix} 1-z_2^2-z_3^2 & z_1 z_2 & z_1 z_3 \\ z_1 z_2 & 1-z_1^2-z_3^2 & z_2 z_3 \\ z_1 z_3 & z_2 z_3 & 1-z_1^2-z_2^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(1-\|z\|^2)^3}\Big((1-z_2^2-z_3^2)(1-z_1^2-z_3^2)(1-z_1^2-z_2^2) +$$

$$+ 2 z_1^2 z_2^2 z_3^2 - z_1^2 z_3^2 (1-z_1^2-z_3^2) -$$

$$- z_2^2 z_3^2 (1-z_2^2-z_3^2) - z_1^2 z_2^2 (1-z_1^2-z_2^2)\Big)$$

więc $\quad \det\left(D\Psi(z)^T D\Psi(z)\right) =$

$$= \frac{1}{(1-\|z\|^2)^3} \det \begin{pmatrix} 1-z_2^2-z_3^2 & z_1 z_2 & z_1 z_3 \\ z_1 z_2 & 1-z_1^2-z_3^2 & z_2 z_3 \\ z_1 z_3 & z_2 z_3 & 1-z_1-z_2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{1}{(1-\|z\|^2)^3} \left(1-\|z\|^2\right)^2 = \frac{1}{1-\|z\|^2}$$

trochę rachunków

i ostatecznie $\quad \sigma_3(N) = \int\limits_{\mathbb{B}^3} \frac{1}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \, d\lambda_3(z) =$

$$= \int_0^1 \int_{S^2} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \, r^2 d\sigma_2(s) \, d\lambda_1(r) =$$

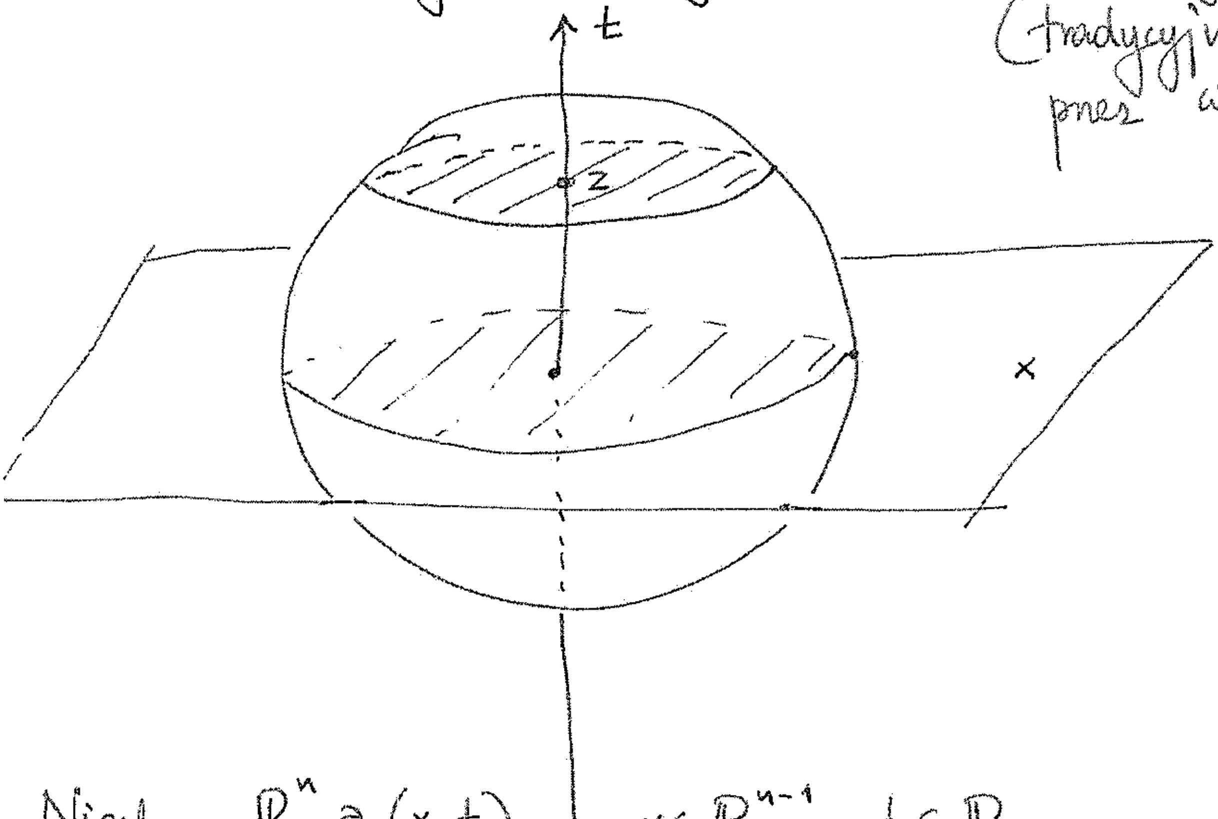
$(ds\, dr)$

$$= \int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} \underbrace{\left(\int_{S^2} d\sigma_2(s)\right)}_{\text{pole sfery jednostkowej w } \mathbb{R}^3\text{, a więc } 4\pi} dr =$$

$$= 4\pi \cdot \frac{\pi}{4} = \pi^2, \quad \text{więc} \quad \sigma_3(S^3) = 2\pi^2$$

Remanent

Miara kuli jednostkowej w $\mathbb{R}^n$. Oznaczmy ją (tradycyjnie) przez ω_n.



Niech $\mathbb{R}^n \ni (x,t)$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $t \in \mathbb{R}$.

Przekrój kuli jednostkowej $\mathbb{B}^n$ na wysokości $z = t$ (hiper)płaszczyzną równoległą do (hiper)płaszczyzny x to kula $(n-1)$ wymiarowa o promieniu $\sqrt{1-z^2}$ (tw. Pitagorasa). Stąd pole tego przekroju to $(1-z^2)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \omega_{n-1}$ (dlaczego?)

Dlatego
$$\omega_n = \int_{-1}^{1} (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}} \omega_{n-1}\, dz = \omega_{n-1} \cdot 2 \int_0^1 (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz =$$

$$\underset{\substack{s=z^2 \\ z=\sqrt{s} \\ dz=\frac{1}{2}s^{-1/2}ds}}{=} \omega_{n-1} \int_0^1 (1-s)^{\frac{n-1}{2}} s^{-1/2}\, ds = \omega_{n-1} \cdot B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

gdzie $B(a,b) = \int_0^1 (1-s)^{a-1} s^{b-1}\, ds$ to funkcja Beta Eulera.

Stąd dalej

$$\omega_n = \omega_{n-1} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \omega_{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$$

Pamiętamy, że $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$; $\omega_1 = 2$, więc

$$\omega_n = \omega_{n-1} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \cdot \sqrt{\pi} = \omega_{n-2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\cancel{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}} \frac{\cancel{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \left(\sqrt{\pi}\right)^2$$

$$= \ldots = \omega_1 \cdot \frac{\Gamma\left(3/2\right)}{\Gamma\left(n+2/2\right)} \left(\sqrt{\pi}\right)^{n-1} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \sqrt{\pi} =$$

$$= \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}.$$

<u>Zadanie</u>: Postępując analogicznie jak przy obliczeniu $\sigma_3(S^3)$ udowodnić, że $\sigma_n(S^n) = n\,\omega_n$.

Przydatny trick przy obliczaniu wyznacznika Grama:

<u>Wzór Cauchy'ego – Bineta</u>

Niech $A \in M^{m\times n}$ $\quad m \le n$

$B \in M^{n\times m}$

Wtedy AB jest macierzą $m\times m$. Jak sprawnie obliczyć $\det AB$?

Jacques Philippe Marie Binet
1786 – 1856
uczył w Ecole Polytechnique, przyjaciel Cauchy'ego; osiągnięcia w geometrii, teorii liczb: jawny wzór na wyrazy ciągu Fibonacciego; funkcja B Eulera w rzeczywistości wprowadzona została przez Bineta.

Dowód wzoru Cauchy'ego-Bineta

Niech $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$

Wtedy $AB = \sum_j a_{ij} b_{jk}$, więc

k-ta kolumna $AB = \sum_j b_{jk} \cdot$ j-ta kolumna A

stąd $\det AB = \sum_{j_1} b_{j_1,1} \cdot \det($macierz AB, której w pierwszej kolumnie podmieniliśmy wyrazy, kładąc j_1-wszą kolumnę macierzy A$)$

robiąc tak dalej, z kolejnymi kolumnami, dostajemy

$$= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_m = 1}^{n} b_{j_1,1} \cdot b_{j_2,2} \cdot \ldots \cdot b_{j_m,m}$$

$\cdot \det($macierz, której k-ta kolumna to j_k-ta kolumna macierzy A, czyli $(A_{kol\, j_1}, A_{kol\, j_2}, \dots A_{kol\, j_m}))$

tutaj oczywiście często $j_k = j_l$, ale wtedy wyznacznik jest równy 0. stąd, grupując wyrazy różniące się tylko kolejnością kolumn,

$$= \sum_{\substack{1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_m \le n \\ S = \{j_1, \dots, j_m\}}} \beta(B,S) \det A(S)$$

gdzie $\beta(B,S)$ to współczynniki zależne od macierzy B i podzbioru S (ale już niezależne od A).

Aby wyznaczyć $\beta(B,S)$ ustalmy $S = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$ i niech

$$A_S = (0, 0, \underset{j_1}{e_1}, \underset{j_2}{e_2}, 0, \underset{j_3}{e_3}, \dots, \underset{j_m}{e_m}, 0)$$

będzie macierzą, której j_k-ta kolumna to e_k, a pozostałe są równe zeru.

<u>wzór Cauchy'ego - Bineta</u>:

Niech $S = \{i_1, i_2, \dots, i_m\} : 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_m \le n$

$A(S)$ to macierz $m \times m$ powstająca z A przez wybranie kolumn o indeksach $i_1, \dots, i_m$

$B(S)$ to macierz $m \times m$ powstająca z A przez wybranie wierszy o indeksach $i_1, \dots, i_m$

$$\det AB = \sum_{\substack{\text{po wszystkich}\\ \text{wyborach } S}} \det A(S) \cdot \det B(S).$$

<u>Przykład</u>: Przy obliczaniu $\sigma_3(S^3)$ wyznaczaliśmy $\det(D\Psi(z)^T D\Psi(z))$, gdzie $A = D\Psi(z)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{z_1}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{z_2}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{z_3}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \end{pmatrix}$

$B = D\Psi(z) = A^T$.

Kolejne $A(S)$ powstają przez wykreślenie z A jednej kolumny; $B(S)$ – przez wykreślenie z B tego samego wiersza; więc $\det A(S) = \det B(S)$;

$$\det(AB) = \sum_S \left(\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{z_1}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \\ 1 & 0 & -\frac{z_2}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{z_3}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \end{pmatrix}\right)^2 +$$

$$+\left(\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{z_1}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \\ 0 & 0 & -\frac{z_2}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{z_3}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \end{pmatrix}\right)^2 + \left(\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{z_1}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{z_2}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \\ 0 & 0 & -\frac{z_3}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \end{pmatrix}\right)^2 + \left(\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^2$$

$$= \frac{1}{1-\|z\|^2}\left[\left(\det \begin{pmatrix} -z_1 & 0 & 0 \\ -z_2 & 1 & 0 \\ -z_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^2 + \left(\det \begin{pmatrix} 1 & -z_1 & 0 \\ 0 & -z_2 & 0 \\ 0 & -z_3 & 1 \end{pmatrix}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -z_1 \\ 0 & 1 & -z_2 \\ 0 & 0 & -z_3 \end{pmatrix}\right)^2\right] + 1 = \frac{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}{1-\|z\|^2} + 1 = \frac{1}{1-\|z\|^2}$$

Wtedy $\det A(S)=1$, ale dla wszystkich $S'\neq S$ $\det A(S')=0$.

Mamy też $AB = B(S)$. Stąd

$$\det B(S) = \det AB = \sum_{S'} \beta(B,S')\det A(S') =$$
$$= \beta(B,S)\det A(S) = \beta(B,S).$$

To kończy dowód wzoru Cauchy'ego-Bineta.

<u>Przykład zastosowania</u>

Niech $V\subset\mathbb{R}^m$ będzie zbiorem otwartym, $\varphi\in C^1(V,\mathbb{R})$ i niech $W=\{(x,\varphi(x)) : x\in V\}\subset\mathbb{R}^{m+1}$ będzie wykresem φ. Wtedy

$$\sigma_m(W) = \int_V \sqrt{1+\|\nabla\varphi\|^2}\, d\lambda_m$$

<u>Dowód</u>:

$\Phi: V\ni x\longmapsto (x,\varphi(x))\in W$ jest parametryzacją wykresu, więc

$$\sigma_m(W) = \int_V \sqrt{\det(D\Phi^T\cdot D\Phi)}\, d\lambda_m$$

$$D\Phi = \left(\mathrm{id}_m, \nabla\varphi\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \varphi_{x_1} \\ 0 & 1 & & 0 & \varphi_{x_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & \varphi_{x_n} \end{pmatrix}$$

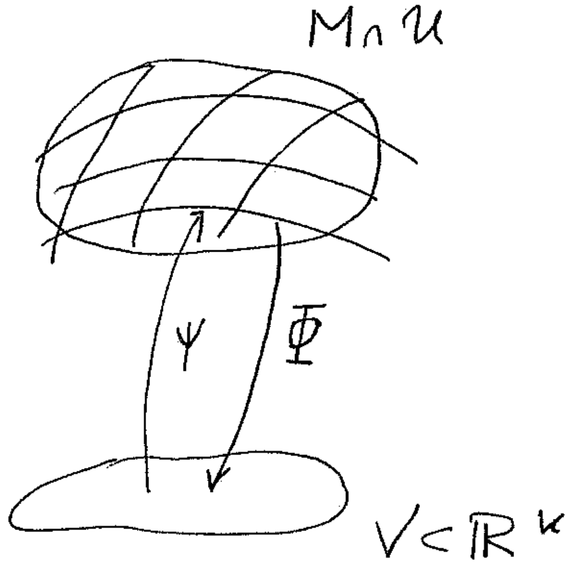
wykreślając kolejne kolumny dostajemy macierze kwadratowe o wyznacznikach $\pm\varphi_{x_1}, \pm\varphi_{x_2}, \dots, \pm\varphi_{x_n}, 1$, więc

$$\det(D\Phi^T\cdot D\Phi) = 1+\varphi_{x_1}^2+\varphi_{x_2}^2+\dots+\varphi_{x_n}^2 = 1+\|\nabla\varphi\|^2.$$

Przypomnienie

Niech M będzie rozmaitością różniczkową klasy C^1 w $\mathbb{R}^n$ wymiaru k, i niech, dla $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ otwartego, zbiór $M \cap \mathcal{U}$ będzie sparametryzowany przy pomocy $\Psi : V \to \mathbb{R}^n$;

$$V \subset \mathbb{R}^k$$



tzn. Ψ jest homeomorfizmem V na $M \cap \mathcal{U}$, klasy C^1, $D\Psi$ ma na V rząd maksymalny, tzn. k.

Wówczas definiujemy na $M \cap \mathcal{U}$ miarę, zwaną miarą powierzchniową; jeżeli $X \subset M \cap \mathcal{U}$, to jest postaci $\Psi(A)$ dla pewnego $A \subset V$, wystarczy więc opisać, jak wygląda miara zbiorów $\Psi(A)$.

$$\sigma(\Psi(A)) = \int_A \sqrt{\det(D\Psi(x)^T D\Psi(x))}\, d\lambda_k(x)$$

dla wszystkich $A \subset V$ mierzalnych w sensie Lebesgue'a.

To oczywiście jest miara na σ-ciele

$$\mathcal{F} = \{\Psi(A) : A \subset V,\ A \in \mathcal{L}^k(\mathbb{R}^k)\}.$$

Oczywiście każdy podzbiór M możemy podzielić na przeliczalnie wiele ~~,~~ kawałków, z których każdy będzie leżał w (wiązanych) dziedzinie jednej mapy (tj obrazie jednej parametryzacji) – to powinno pozwolić nam na mierzenie dowolnych borelowskich podzbiorów M – pod warunkiem, że wynik nie zależy

(1) od wyboru atlasu / parametryzacji

(2) od sposobu, w jaki zbiór dzielimy (oczywiście na mierzalne części)

Problem (2) jest mało istotny, póki ograniczamy się do atlasów lokalnie skończonych (tzn. każdy punkt należy do dziedziny skończenie wielu map) – a ~~podrozm~~ każda podrozmaitość $\mathbb{R}^n$ ma taki atlas, nie zamierzam w to głębiej wchodzić. Ważniejsze jest pytanie (1):

Załóżmy, że otoczenie zbioru $\overset{Z}{\Psi}(A)$ mamy sparametryzowane na 2 sposoby

Miarę zbioru Z możemy obliczyć korzystając z parametryzacji Ψ_1 i z parametryzacji Ψ_2.

Czy wyjdzie to samo?

By na to odpowiedzieć, musimy trochę więcej dowiedzieć się o opisie parametrycznym rozmaitości. Kluczem do tego jest poniższe twierdzenie, którego zastosowania są znacznie szersze.

<u>Twierdzenie o rzędzie</u>

Niech $V \subset \mathbb{R}^m$ będzie zbiorem otwartym i niech $\Psi \in C^k(V, \mathbb{R}^n)$. Załóżmy też, że $\forall_{x \in V}$ rank $D\Psi$ jest stały i równy $r \in \{1, 2, \dots, m\}$

Wówczas dla każdego $a \in V$ istnieją otoczenia $V_1 \subset V$, $a \in V_1$ oraz $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $\Psi(a) \in \mathcal{U}$ oraz dyfeomorfizmy $f_1 : V_1 \longrightarrow f_1(V_1) \subset \mathbb{R}^m$ oraz $f_2 : \mathcal{U} \longrightarrow f_2(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$ klasy C^k, takie, że dla wszystkich $x = (x_1, \dots, x_m) \in f_1(V_1)$ mamy

$$f_2 \circ \Psi \circ f_1^{-1}(x) \overset{(*)}{=} (x_1, x_2, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

<u>Innymi słowy</u> - jeżeli rząd Ψ w otoczeniu punktu a jest stały, to możemy tak zmienić współrzędne w dziedzinie i w obrazie Ψ, w otoczeniach a i $\Psi(a)$,

by przekształcenie Ψ w tych nowych współrzędnych przybrało formę (*) — czyli było rzutem na pierwsze r współrzędnych.

W przypadku, gdy $\Psi: V \to \mathbb{R}^m$ jest parametryzacją płata rozmaitości, twierdzenie mówi, że $\forall_{a \in V}$, poprzez zamianę (f_1) współrzędnych w dziedzinie (tj. otoczeniu a) i (f_2) w obrazie (tj. w otoczeniu $\Psi(a)$) możemy sprawić, że M, w otoczeniu $\Psi(a)$ jest wykresem funkcji zerowej (w tych nowych współrzędnych).

<u>Zadanie</u>: Niech $U \subset \mathbb{R}^m$ będzie otwarty, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Wykaż, że zbiory $\{x \in U : \operatorname{rank} Df$ jest stały w otoczeniu $x\}$ oraz $\{x \in U : \operatorname{rank} Df$ ma w x lokalne maksimum$\}$ są otwarte i gęste w U.

<u>Dowód twierdzenia o rzędzie</u>. Ustalmy $a \in V$. Skoro $D\Psi(a)$ ma rząd r, to ma pewien niezerowy minor $r \times r$, bez straty ogólności możemy założyć, przenumerowując zmienne w dziedzinie i w obrazie Ψ, że jest to minor odpowiadający zmiennym $x_1, \dots, x_r$ i funkcjom $\Psi_1, \dots, \Psi_r$ (czyli lewy górny

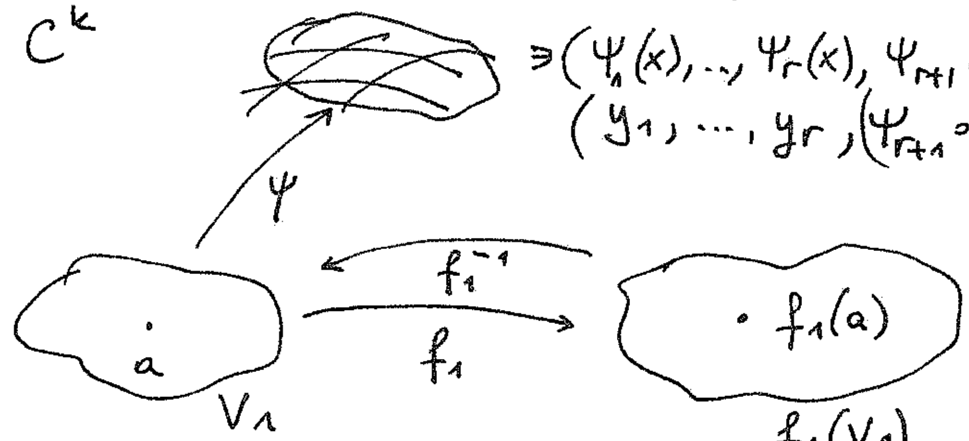
rzą̨g $D\Psi$.

Niech teraz $f_1(x) = (\Psi_1(x), \dots, \Psi_r(x), x_{r+1}, \dots, x_m)$

$$f_1 : V \to \mathbb{R}^m.$$

Widzimy, że $Df_1 = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\dots,r} & 0 \\ 0 & id_{(m-r)\times(m-r)} \end{pmatrix}$

ma rząd maksymalny (równy m) w a, więc ~~dla~~ istnieje otoczenie V_1 punktu a takie, że $f_1 : V_1 \to f_1(V_1)$ jest dyfeomorfizmem klasy C^k



$\ni (\Psi_1(x), \dots, \Psi_r(x), \Psi_{r+1}(x), \dots, \Psi_n(x))$

$(y_1, \dots, y_r, (\Psi_{r+1} \circ f_1^{-1})(y), \dots, (\Psi_n \circ f_1^{-1})(y))$

$$\begin{array}{ccc} V_1 & & f_1(V_1) \\ \Psi & & \Psi \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_m) & \longrightarrow & (\Psi_1(x), \dots, \Psi_r(x), x_{r+1}, \dots, x_m) \\ & & y_1, \dots, y_r, y_{r+1}, \dots, y_m \end{array}$$

widzimy więc, że $\Psi \circ f_1^{-1}(y) = (y_1, \dots, y_r, h_{r+1}(y), \dots, h_m(y))$,

gdzie funkcje $h_{r+1}, \dots, h_n$ są klasy C^k.

$$\Big(\text{bo } h_j = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{klasy } C^k}}{\Psi_j} \circ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{też klasy } C^k,}}{f_1^{-1}}\Big)$$

bo f_1 jest dyfeomorfizmem kl. C^k

Widzimy też, że, dla $x \in V_1$,

$$D(\Psi \circ f_1^{-1})(f_1(x)) = D\Psi(x) \circ (Df_1^{-1})(f_1(x)) =$$
$$= D\Psi(x) \cdot \underbrace{Df_1(x)^{-1}}_{\text{to jest izomorfizm liniowy}},$$

więc $\operatorname{rank} D(\Psi \circ f_1^{-1})(f_1(x)) = \operatorname{rank} D\Psi(x) = r$.

Z drugiej strony, dla $y \in f_1(V_1)$,

$$D(\Psi \circ f_1^{-1})(y) = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{r\times r} & 0 \\ \left(\frac{\partial h_i}{\partial y_j}(y)\right)_{\substack{i=r+1,\dots,n \\ j=1,\dots,r}} & \left(\frac{\partial h_i}{\partial y_j}(y)\right)_{i,j=r+1,\dots,n} \end{pmatrix}$$

więc żeby ta macierz mogła mieć rząd r, musimy mieć $\frac{\partial h_i}{\partial y_j}(y) = 0$ dla $i,j = r+1,\dots,n$, co oznacza, że funkcje $h_{r+1},\dots,h_n$ zależą tylko od zmiennych $y_1,\dots,y_r$, a więc

$$(\Psi \circ f_1^{-1})(y) = (y_1,\dots,y_r, h_{r+1}(y_1,\dots,y_r),\dots,h_n(y_1,\dots,y_r))$$

~~Więc zatem z~~ i funkcje $h_{r+1},\dots,h_n$, dotąd określone na $f_1(V_1)$, możemy traktować jako funkcje na $P(f_1(V_1))$, gdzie P jest rzutem ortogonalnym na podprzestrzeń zmiennych $y_1,\dots,y_r$ (tzn $P = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0_{(m-r)\times(m-r)} \end{pmatrix}$).

Zauważmy, że rzut zbioru otwartego jest zawsze zbiorem otwartym.

No to niech $f_2 : P(f_1(V_1)) \times \mathbb{R}^{m-r} \to \mathbb{R}^n$ będzie dane wzorem

$$f_2(y_1,\dots,y_r,y_{r+1},\dots,y_n) = (y_1,\dots,y_r,-h_{r+1}(y_1,\dots,y_r)+y_{r+1},\dots,-h_n(y_1,\dots,y_r)+y_n).$$

Mamy
$$Df_2(y) = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{r\times r} & 0 \\ -\left(\frac{\partial h_i}{\partial y_j}\right)_{\substack{i=r+1,\dots,n\\ j=1,\dots,r}} & \mathrm{id}_{(n-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$$

i widać, że macierz ta ma rząd n w $y=\Psi(a)$, więc f_2 jest, w otoczeniu U punktu $\Psi(a)$, dyfeomorfizmem ~~lokalnym~~. (klasy C^k, bo h_j są C^k). Stąd

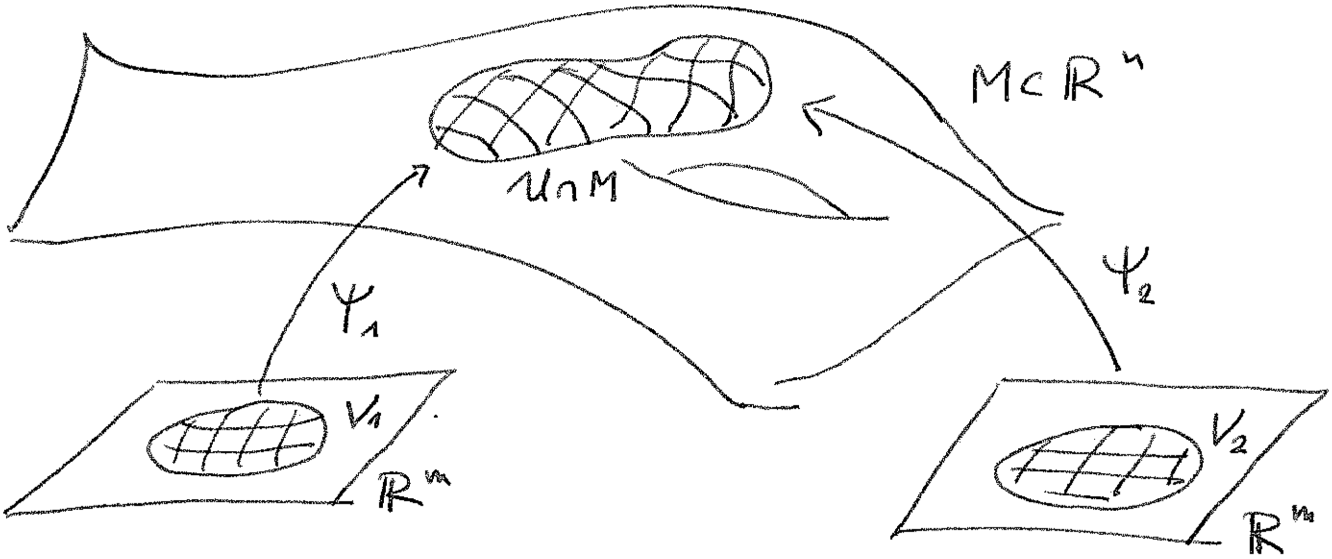
$$f_2\circ\Psi\circ f_1^{-1} : f_1(V_1) \to \mathbb{R}^n,$$

$$f_2\circ\Psi\circ f_1^{-1}(y_1,\dots,y_m) = f_2(y_1,\dots,y_r,h_{r+1}(y_1,\dots,y_r),\dots,h_n(y_1,\dots,y_r))$$
$$= (y_1,\dots,y_r,0,0,\dots,0).$$

$\square$.

Jednym z najważniejszych wniosków z tw. o rzędzie jest

Lemat o funkcjach przejścia



Załóżmy, że M jest m-wymiarową podrozmaitością $\mathbb{R}^n$ klasy C^k i niech $\Psi_1 : V_1 \to \mathbb{R}^n$ i $\Psi_2 : V_2 \to \mathbb{R}^n$ klasy C^k będą dwiema różnymi parametryzacjami tego samego płatu $\mathcal{U} \cap M$ ($\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym).

Wówczas funkcje $\Psi_2^{-1} \circ \Psi_1 : V_1 \to V_2$ oraz $\Psi_1^{-1} \circ \Psi_2 : V_2 \to V_1$ są dyfeomorfizmami klasy C^k.

Dowód: Oczywiście Ψ_1 i Ψ_2 są homeomorfizmami (odpowiednio $\Psi_1 : V_1 \to \Psi_1(V_1) = \mathcal{U} \cap M$ oraz

$\Psi_2 : V_2 \to \Psi_2(V_2) = \mathcal{U} \cap M$),

więc złożenie $\Psi_2^{-1} \circ \Psi_1$ też jest homeomorfizmem i $(\Psi_2^{-1} \circ \Psi_1)^{-1} = \Psi_1^{-1} \circ \Psi_2$. Jedyne więc, co zostaje do udowodnienia to to, że $\Psi_2^{-1}\circ\Psi_1$ oraz $\Psi_1^{-1}\circ\Psi_2$ są klasy C^k. Poprzestaniemy na dowodzie, że $\Psi_2^{-1}\circ\Psi_1$ jest klasy C^k, drugą z funkcji badamy dokładnie tak samo.

Ustalmy $a\in V_1$. W całym V_1 rząd $D\Psi$ jest stały (równy m), więc z tw. o rzędzie istnieją dyfeomorfizmy $f_1 : \tilde{V}_1 \to f_1(\tilde{V}_1)$ i $f_2 : \tilde{\mathcal{U}} \to f_2(\tilde{\mathcal{U}})$, gdzie $\tilde{V}_1 \subset V_1$ jest otoczeniem a, $\tilde{\mathcal{U}}\subset\mathcal{U}$ - otoczeniem $\Psi(a)$, takie, że $f_2\circ\Psi_1\circ f_1^{-1}(x) = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0)$ dla $x\in f_1(\tilde{V}_1)$.

Oznaczmy przez P rzut z $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^m$, na podp-ń pierwszych m zmiennych: $P(y_1,\dots,y_m, y_{m+1},\dots,y_n) = (y_1,\dots,y_m)$.

P ma prawostronną odwrotność: $P^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $P^{-1}(x_1,\dots,x_m) = (x_1,\dots,x_m,0,0,\dots,0)$, wiemy też, że

$f_2\circ\Psi_1\circ f_1^{-1} = P^{-1}$ na $f_1(\tilde{V}_1)$ jest klasy C^k (a nawet C^∞).

Stąd $f_1\circ\Psi_1^{-1}\circ f_2^{-1} = (f_2\circ\Psi_1\circ f_1^{-1})^{-1} = P : P^{-1}(f_1(\tilde{V}_1)) \to f_1(\tilde{V}_1)$ jest klasy C^k, wtedy jednak

$$\Psi_1^{-1}\circ\Psi_2 = \underbrace{f_1^{-1}}_{\substack{\text{klasy } C^k\\ \text{dyfeomorf.}}}\circ\underbrace{f_1\circ\Psi_1^{-1}\circ f_2^{-1}}_{P,\ \text{klasy } C^\infty}\circ\underbrace{f_2}_{\substack{\text{klasy } C^k\\ \text{dyfeomorf.}}}\circ\underbrace{\Psi_2}_{\text{klasy } C^k}$$ też jest klasy C^k.

$\square$.

Wniosek

Miara powierzchniowa na M nie zależy od wyboru parametryzacji. Jeżeli bowiem $\Psi_1 : V_1 \to \mathcal{U} \cap M$ i $\Psi_2 : V_2 \to \mathcal{U} \cap M$ są dwiema parametryzacjami tego samego płata $\mathcal{U} \cap M$ i $D \subset \mathcal{U} \cap M$ jest borelowskim podzbiorem $\mathcal{U} \cap M$,

$D = \Psi_1(A_1) = \Psi_2(A_2)$, to

oznaczmy $\varphi : V_2 \to V_1$, $\varphi = \Psi_1^{-1} \circ \Psi_2$

z lematu o funkcjach przejścia jest ~~to~~ dyfeomorfizm klasy C^k, $\Psi_2 = \Psi_1 \circ \varphi$, $\varphi(A_1) = A_2$

oraz, dla $y = \varphi(x)$

$$D\Psi_2(x)^T D\Psi_2(x) = (D\Psi_1(y) D\varphi(x))^T D\Psi_1(y) D\varphi(x) =$$

$$= (D\varphi(x))^T \left[(D\Psi_1(y))^T D\Psi_1(y) \right] D\varphi(x)$$

skąd $\sqrt{\det D\Psi_2(x)^T D\Psi_2(x)} = |\det D\varphi(x)| \sqrt{\det (D\Psi_1(y))^T D\Psi_1(y)}$

i $$\int_{A_2} \sqrt{\det D\Psi_2(x)^T D\Psi_2(x)}\, dx = \int_{A_2} |\det D\varphi(x)| \cdot \sqrt{\det (D\Psi_1(y))^T D\Psi_1(y)}\, dx$$

$\| y = \varphi(x)$

to jest $\sigma(D)$ obliczona przy pomocy Ψ_2

$$\int_{\varphi^{-1}(A_2)} \sqrt{\det (D\Psi_1(y))^T D\Psi_1(y)}\, dy$$

$\varphi^{-1}(A_2) = A_1$

a to jest $\sigma(D)$ obliczona przy pomocy Ψ_1

$\square$.

Rekapitulując:

Dla każdej podrozmaitości $M \subset \mathbb{R}^n$ klasy C^k, wymiaru m, możemy znaleźć atlas przeliczalny (czyli przeliczalnie wiele parametryzacji $\Psi_i : V_i \to \mathbb{R}^n$ t.że $\Psi_i(V_i) = \mathcal{U}_i \cap M$ pokrywają M)

Każdy borelowski podzbiór B rozmaitości M możemy rozłożyć na przeliczalnie wiele rozłącznych części B_i t.że $B_i \subset \mathcal{U}_i \cap M$

$(B_1 = B \cap \mathcal{U}_1,\ B_2 = (B \cap \mathcal{U}_2) \setminus \mathcal{U}_1, \dots)$, wtedy

$$\sigma(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} \sqrt{\det D\Psi_i^T D\Psi_i}\, d\lambda_m$$

gdzie $A_i = \Psi_i^{-1}(B_i) \subset V_i$.

Druga reguła Pappusa - Guldina

Niech $\Gamma \subseteq \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0, x_2 = 0\}$ będzie krzywą kl. C^k (tzn rozmaitością wymiaru 1)

i niech $A \subset \Gamma$ będzie zbiorem mierzalnym wzgl. σ_Γ, który ma (wzgl. σ_Γ) środek ciężkości $s_A = (s_1, s_2, s_3) = (s_1, 0, s_3)$

Niech teraz B będzie zbiorem, który powstaje w wyniku obrotu A o kąt ~~2π~~ $\alpha \in (0, 2\pi]$ wzgl. osi $x_1 = x_2 = 0$, $M \subset \mathbb{R}^3$ - rozmaitością powstałą z obrotu Γ wzgl. $x_1 = x_2 = 0$ o ~~2π~~ α.

<u>Wówczas</u> $\sigma_M(B) = \alpha r \sigma_\Gamma(A)$, gdzie r jest odległością s_A od osi obrotu (tzn. $r = s_1$)

<u>Dowód</u>: W sformułowaniu ukryliśmy nieudowodniony fakt, że M rzeczywiście jest rozmaitością (wymiaru 2) klasy C^k.

Niech $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie lokalną parametryzacją Γ, $\gamma = (\gamma_1, 0, \gamma_3)$, wtedy

$\Psi(x,t) = (\gamma_1(x)\cos t, \gamma_1(x)\sin t, \gamma_3(x))$ jest lok. parametryzacją M, o ile $t \in (\beta_1, \beta_2)$ i $\beta_2 - \beta_1 < 2\pi$

$0 < \beta_1 < \beta_2 \leq \alpha$

i nietrudno sprawdzić, że $D\Psi$ ma rząd maksymalny i że Ψ jest ~~dy~~ ~~tej samej~~ klasy C^k, gdy γ jest klasy C^k oraz że Ψ jest homeomorfizmem $(a,b)\times(\beta_1;\beta_2)$ na $\Psi((a,b)\times(\beta_1,\beta_2))\subset M$. Oczywiście w ten sposób możemy pokryć całe M.

$$D\Psi(x,t)=\begin{pmatrix}\gamma_1'(x)\cos t & -\gamma_1(x)\sin t\\ \gamma_1'(x)\sin t & \gamma_1(x)\cos t\\ \gamma_3'(x) & 0\end{pmatrix}$$

więc

$$D\Psi(x,t)^T\cdot D\Psi(x,t)=\begin{pmatrix}\gamma_1'(x)^2+\gamma_3'(x)^2 & 0\\ 0 & \gamma_1^2(x)\end{pmatrix}$$

$$\det\left(\text{—— " ——}\right)=\left(\gamma_1'(x)^2+\gamma_3'(x)^2\right)\gamma_1^2(x)$$

Niech teraz $\tilde{A}=A\cap\gamma((a,b))$ będzie częścią A leżącą w obrazie parametryzacji γ.

~~i zauważ~~

$$\sigma_M\Big(\underbrace{\Psi\big(\gamma^{-1}(\tilde{A})\times(0,\alpha)\big)}_{\substack{\text{część } B \text{ powstała z obrotu}\\ \tilde{A} \text{ o kąt } \alpha}}\Big)=\int_{\gamma^{-1}(\tilde{A})\times(0,\alpha)}\gamma_1(x)\sqrt{\gamma_1'^2(x)+\gamma_3'^2(x)}\,dx\,d\beta$$

Fubini

$$=\alpha\int_{\gamma^{-1}(\tilde{A})}\gamma_1(x)\sqrt{\gamma_1'(x)^2+\gamma_3'(x)^2}\,dx=\alpha\int_{\tilde{A}}x_1\,d\sigma_\Gamma$$

Jeżeli teraz rozłożymy A na sumę rozłącznych $\tilde{A}_i$ leżących w ~~dziedzi~~ obszarach parametryzacji $\gamma^i : (a^i, b^i) \to \Gamma$, to

$$\sigma_M(B) = \sum_i \alpha \int_{\tilde{A}_i} x_1 \, d\sigma_\Gamma = \alpha \int_A x_1 \, d\sigma_\Gamma = \alpha \, s_1 \, \sigma_\Gamma(A)$$