Miary ze znakiem

Def: Niech $\mathcal{F} \subset 2^X$ będzie σ-ciałem.
$\mu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ nazywamy miarą ze znakiem,
gdy 1) $\mu(\emptyset) = 0$
2) μ przyjmuje najwyżej jedną z wartości $+\infty, -\infty$
3) μ jest przeliczalnie addytywna

Kluczowe przykłady

1. Jeżeli μ_1, μ_2 są miarami na $\mathcal{F}$ i przynajmniej jedna z nich jest skończona, to $\mu = \mu_1 - \mu_2$ jest miarą ze znakiem

2. Niech ν będzie miarą na $\mathcal{F}$ i niech $f \in L^1(X, \nu)$. Wtedy $\mu(E) = \int_E f \, d\nu$ zadaje na $\mathcal{F}$ miarę ze znakiem

Def: Niech μ będzie miarą ze znakiem na $\mathcal{F}$.
$E \in \mathcal{F}$ nazywamy dodatnim, gdy $\mu|_E$ jest miarą (bez znaku), tzn. gdy dla każdego $F \in \mathcal{F}$ t. że $F \subset E$ mamy $\mu(F) \geq 0$.

Lemat: Jeżeli $E \in \mathcal{F}$, $0 < \mu(E) < \infty$, to E ma podzbiór F dodatni, dodatniej miary μ.

$\left\{ \begin{array}{l} \mu \text{ jest} \\ \text{miarą} \\ \text{ze znakiem} \\ \text{na } \mathcal{F} \end{array} \right.$

Dowód: Jeżeli E jest dodatni, to koniec – bierzemy $F = E$. Załóżmy więc przeciwnie – wtedy w E istnieją podzbiory miary ujemnej.

Niech n_1 będzie najmniejszą liczbą naturalną tż. dla pewnego $B_1 \subset E$ mamy $\mu(B_1) \leq -\frac{1}{n_1}$

na boku mała obserwacja: Jeżeli $Y \subset Z$, $Y, Z \in \mathcal{F}$ i $\mu(Y) = +\infty$, to $\mu(Z) = \mu(Y) + \mu(Z \setminus Y) =$
$= +\infty + \mu(Z \setminus Y) = +\infty$,
analogicznie gdy $\mu(Y) = -\infty$, to $\mu(Z) = -\infty$.
Stąd podzbiory zbioru o mierze μ skończonej mają miarę skończoną

Wróćmy do dowodu.

albo $E \setminus B_1$ jest dodatni,
$\mu(E \setminus B_1) = \underbrace{\mu(E)}_{>0} - \underbrace{\mu(B_1)}_{<0} > 0$
więc bierzemy $F = E \setminus B_1$

albo $E_1 = E \setminus B_1$ nie jest dodatni; jak wiemy, $\mu(E_1) > 0$. Niech n_2 będzie najmniejszą liczbą naturalną tż dla pewnego B_2, $B_2 \subset E_1$, $B_2 \in \mathcal{F}$ mamy $\mu(B_2) \leq -\frac{1}{n_2}$

albo $E_1 \setminus B_2$ jest dodatni,
$\mu(E_1 \setminus B_2) > 0$,
bierzemy $F = E_1 \setminus B_2$

albo $E_2 = E_1 \setminus B_2$ nie jest dodatni, $\mu(E_2) > 0$, niech n_3 będzie ... itd.

Albo w którymś kroku wybieramy lewą gałąź algorytmu, co daje nam F, albo zawsze wybieramy prawą. W tym ostatnim przypadku przyjmijmy $F = E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$

Musimy wykazać, że $\mu(F) > 0$ i że F jest dodatni.

Z nierówności

$$0 < \mu(E) = \mu(F) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leq \mu(F) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j}$$

dostajemy $0 < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j} < \mu(F) < \infty$. ← bo $F \subset E$, $\mu(E) \in \mathbb{R}$ (patrz uwaga)

Stąd $n_j \to \infty$ przy $j \to \infty$ (i $\mu(F) > 0$).

Niech teraz $G \in \mathcal{F}$, $G \subset F$ i załóżmy, że $\mu(G) < 0$.

Dla każdego $m \in \mathbb{N}$ $G \subset E_m = E \setminus \bigcup_{j=1}^{m} B_j$, więc

$$\mu(G) > -\frac{1}{n_{m+1} - 1} \xrightarrow{m \to \infty} 0$$

(bo n_{m+1} jest najmniejszą liczbą naturalną, że w E_m istnieje podzbiór z $\mathcal{F}$ o mierze $\leq -\frac{1}{n_{m+1}}$)

Stąd $\mu(G) \geq 0$ ↯, co dowodzi dodatniości F.

□.

Twierdzenie (Hahna o rozkładzie).

Niech $\mathcal{F} \subset 2^X$ będzie σ-ciałem i niech μ będzie miarą ze znakiem na $\mathcal{F}$. Wówczas istnieją rozłączne X^+ i $X^- \subset X$,

$$X = X^+ \cup X^-, \quad X^+ \cap X^- = \emptyset$$

takie, że $\mu|_{X^+}$ jest nieujemna (tzn. X^+ jest dodatni wzgl. μ) oraz $\mu|_{X^-}$ jest niedodatnia (tzn. X^- jest dodatni wzgl. $-\mu$).

Wniosek: Każdą miarę ze znakiem μ można przedstawić jako różnicę dwóch miar: $\mu = \mu^+ - \mu^-$ (μ^+ i μ^- to miary nieujemne na $\mathcal{F}$), przy czym miary μ^+ i μ^- są skupione na rozłącznych zbiorach X^+ i X^-

Def: Mówimy, że miara (nieujemna) ν jest skupiona na $E \in \mathcal{F}$, gdy $\nu(A) = \nu(A \cap E)$ dla wszystkich $A \in \mathcal{F}$ (tzn. $\nu = \nu|_E$).

Jeżeli dwie miary ν_1, ν_2 są skupione odpowiednio na E_1, E_2 i $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, to mówimy, że są wzajemnie singularne (osobliwe) i ozn. $\nu_1 \perp \nu_2$.

Przykłady: Delta Diraca na $\mathbb{R}^n$:

$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & a \notin A \end{cases}$ jest miarą skupioną na $\{a\}$;

$\delta_a \perp \lambda_n$, bo λ_n jest skupiona na $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$.

Uwaga: Jeżeli ν_1 jest skupiona na E i $\nu_2(E)=0$, to $\nu_1 \perp \nu_2$.

Dalsze przykłady: Niech ν będzie miarą na $\mathcal{F}$, $f \in L^1(\nu)$ i niech $\mu(A) = \int_A f \, d\nu$. Wtedy μ jest miarą ze znakiem,

$X^+ = \{f > 0\}$ $\quad$ $X^- = \{f \leq 0\}$

$\mu = \mu^+ - \mu^-$, gdzie $\mu^+ = \mu|_{X^+}$, $\mu^- = -\mu|_{X^-}$ to rozkład Hahna μ.

Uwaga: Równie dobrze moglibyśmy wziąć $\tilde{X}^+ = \{f \geq 0\}$, $\tilde{X}^- = \{f < 0\}$.

Zadanie: Jeżeli μ jest miarą ze znakiem na $\mathcal{F}$ i (X^+, X^-) oraz $(\tilde{X}^+, \tilde{X}^-)$ są dwoma rozkładami X jak w twierdzeniu, to

$\mu(X^+ \dot{-} \tilde{X}^+) = \mu(X^- \dot{-} \tilde{X}^-) = 0$.

różnica symetryczna

Zauważmy, że gdy μ jest jak w przykładzie, $\mu(A) = \int_A f \, d\nu$, to $X^+ \dot{-} \tilde{X}^+ = \{f = 0\}$, $\mu(\{f=0\}) = \int_{\{f=0\}} f \, d\nu = 0$.

Dowód tw. Hahna.

Załóżmy, że μ nie przyjmuje wartości $+\infty$.

Wtedy $M = \sup(\mu(A) : A \in \mathcal{F}, A$ jest dodatni$) < \infty$.

Mamy ciąg $A_1, A_2, \ldots$ zbiorów dodatnich

t.ż. $\mu(A_i) \to M$; biorąc $B_1 = A_1$, $B_2 = A_1 \cup A_2, \ldots$

dostajemy ciąg $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$ zbiorów dodatnich,

$\mu(A_i) \le \mu(B_i) \le M$, więc również $\mu(B_i) \to M$.

Zbiór $X^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ też jest dodatni

(proste ćwiczenie), $\mu(X^+) = \lim_{i\to\infty} \mu(B_i) = M$.

Pozostaje wykazać, że $X^- = X \setminus X^+$ jest ujemny

(tzn. $\mu|_{X^-}$ jest niedodatnia). Załóżmy przeciwnie,

wówczas w X^- jest podzbiór $E \subset X^-$ t.ż.

$0 < \mu(E) < \infty$. Z lematu istnieje $C \subset E$,

C dodatni; ~~wtedy~~ $\mu(C) > 0$, ale wtedy

$X^+ \cup C$ jest dodatni, $\mu(X^+ \cup C) = \mu(X^+) + \mu(C)$

$> M$, co jest sprzeczne z definicją M.

Ta sprzeczność kończy dowód. $\square$

Niech μ, ν będą miarami (bez znaku) na $\mathcal{F}$

Definicja: Mówimy, że miara μ jest *absolutnie ciągła* wzgl. miary ν, gdy

$$\forall_{E \in \mathcal{F}} \quad \nu(E) = 0 \Rightarrow \mu(E) = 0$$

Piszemy wtedy $\mu \ll \nu$.

Przykład: Jeżeli $f \in L^1(\nu)$, $\mu(A) = \int_A f \, d\nu$, to $\mu \ll \nu$.

Twierdzenie (Radona-Nikodyma-Lebesgue'a)

Niech μ, ν będą miarami (bez znaku) σ-skończonymi na $\mathcal{F}$. Wówczas

(Lebesgue) istnieją (jednozn. wyznaczone) miary ν_a, ν_s tż. $\nu = \nu_a + \nu_s$, $\nu_a \ll \mu$, $\nu_s \perp \mu$

(rozkład Lebesgue'a)

(Radon-Nikodym) istnieje h ~~m~~ $: X \to \overline{\mathbb{R}}$ nieujemna, mierzalna wzgl. $\mathcal{F}$, taka, że

$$\nu_a(E) = \int_E h \, d\mu \quad \text{dla wszystkich } E \in \mathcal{F}.$$

Jeżeli ν jest skończona, to ~~ta~~ ν_a, ν_s są skończone i $h \in L^1(\mu)$.

Zauważmy, że BSO możemy założyć, że $\mu(X)$ i $\nu(X)$ są skończone, gdyż w przypadku, gdy są σ-skończone, możemy podzielić X na przeliczalnie wiele parami rozłącznych części $\{X_i\}_{i=1}$ i takich, że $\mu(X_i), \nu(X_i) < \infty$; twierdzenie dla X w oczywisty sposób wynika z twierdzenia dla każdego z X_i.

Zajmijmy się najpierw częścią pochodzącą od Radona i Nikodyma, która najczęściej formułowana jest następująco:

Tw. (R-N): Jeżeli μ i ν_a są miarami σ-skończonymi na σ-ciele $\mathcal{F}$ podzbiorów X oraz $\nu_a \ll \mu$, to istnieje mierzalna, nieujemna $h: X \to [0, \infty]$ tż

$$\nu_a(E) = \int_E h \, d\mu \quad \text{dla wszystkich } E \in \mathcal{F}.$$

W dowodzie, jak wspomniałem, ograniczymy się do przypadku μ i ν_a skończonych, wtedy

$$\nu_a(X) = \int_X h \, d\mu < \infty, \text{ więc } h \in L^1(X, \mu).$$

<u>Dowód</u>: Rozważmy rodzinę funkcji

$$\Phi = \{\varphi : X \to [0, \infty] : \varphi \text{ jest mierzalne wzgl. } \mathcal{F} \text{ oraz } \int_E \varphi \, d\mu \le \nu_a(E) \text{ dla wszystkich } E \in \mathcal{F}\}.$$

Oczywiście $0 \in \Phi$. Wykażemy teraz, że gdy $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, to $\varphi = \max\{\varphi_1, \varphi_2\} \in \Phi$, mamy bowiem

$$\int_E \max\{\varphi_1, \varphi_2\}\, d\mu = \int_{E \cap \{\varphi_1 \geq \varphi_2\}} \varphi_1\, d\mu + \int_{E \cap \{\varphi_1 < \varphi_2\}} \varphi_2\, d\mu \leq \nu_a(E \cap \{\varphi_1 \geq \varphi_2\}) + \nu_a(E \cap \{\varphi_1 < \varphi_2\}) = \nu_a(E).$$

Niech teraz $M = \sup_{\varphi \in \Phi} \int_X \varphi\, d\mu$. Oczywiście dla każdego $\varphi \in \Phi$ $\int_X \varphi\, d\mu \leq \nu_a(X) < \infty$, więc $M < \infty$.

Niech teraz (φ_n) będzie ciągiem funkcji z Φ takim, że $\int_X \varphi_n\, d\mu \to M$ i niech $\psi_n = \sup\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$.

Ciąg (ψ_n) jest ciągiem niemalejącym funkcji mierzalnych, więc ma granicę punktową $h : X \to [0, \infty]$, która jest funkcją mierzalną. Wiemy też, że $\forall_n\ \psi_n \in \Phi$, więc $\forall_{E \in \mathcal{F}} \int_E \psi_n\, d\mu \leq \nu_a(E)$, skąd, z tw. o zbieżności monotonicznej, $\int_E h\, d\mu \leq \nu_a(E)$. Dodatkowo

bo $\psi_n \in \Phi$, $M = \sup_{\varphi \in \Phi} \int_X \varphi\, d\mu$

$$M = \lim_{n \to \infty} \int_X \varphi_n\, d\mu \leq \underbrace{\lim_{n \to \infty} \int_X \psi_n\, d\mu}_{= \int_X h\, d\mu} \leq M$$

więc $\int_X h\, d\mu = M$. $\quad (\Rightarrow h \in L^1(X, \mu))$

Chcemy wykazać, że $\forall_{E \in \mathcal{F}} \int_E h\,d\mu = \nu_a(E)$,
na razie mamy nierówność $\leq$. Rozważmy zatem
$\eta(E) = \nu_a(E) - \int_E h\,d\mu$. Jest to miara na $\mathcal{F}$,
naszym zadaniem jest wykazanie, że $\eta \equiv 0$.
Załóżmy przeciwnie – że dla pewnego $A \in \mathcal{F}$ mamy
$\eta(A) > 0$. Wtedy również $\nu_a(A) > 0$, co, dzięki
absolutnej ciągłości ν_a wzgl. μ, pociąga $\mu(A) > 0$.
Istnieje wówczas $\varepsilon > 0$ takie, że $\eta(A) - \varepsilon\mu(A) > 0$.
Niech $\xi = \eta - \varepsilon\mu$. To jest miara ze znakiem
na $\mathcal{F}$, ~~więc~~ $\xi(A) > 0$, więc istnieje $A_1 \subset A$
tż $\xi(A_1) > 0$ i A_1 jest dodatni wzgl. ξ, czyli

$$\forall_{E \in \mathcal{F}}\ 0 \leq \xi(A_1 \cap E) = \eta(A_1 \cap E) - \varepsilon\mu(A_1 \cap E) =$$
$$= \nu_a(A_1 \cap E) - \left(\int_{A_1 \cap E} h\,d\mu + \varepsilon\mu(A_1 \cap E)\right), \text{ zatem}$$

$$\int_{A_1 \cap E} h\,d\mu + \varepsilon\mu(A_1 \cap E) \leq \nu_a(A \cap E)$$

ale mamy też, że $\int_{E \setminus A_1} h\,d\mu \leq \nu_a(E \setminus A)$

Dodając stronami

$$\int_E h\,d\mu + \varepsilon\mu(A_1 \cap E) = \int_E (h + \varepsilon\chi_{A_1})\,d\mu \leq \nu_a(E)$$

To oznacza, że $h+\varepsilon\chi_{A_1}\in\Phi$, ale

$$\int_X (h+\varepsilon\chi_{A_1})\,d\mu = \int_X h\,d\mu + \varepsilon\mu(A_1) = M+\varepsilon\mu(A_1) > M,$$

co daje sprzeczność i kończy dowód. $\square$

Teraz część Lebesgue'a.

Oznaczmy $\lambda=\mu+\nu$. Jeżeli dla pewnego $E\subset X$ $\lambda(E)=0$, to $\mu(E)=0$ i $\nu(E)=0 \Rightarrow \mu\ll\lambda$ oraz $\nu\ll\lambda$.

W szczególności z tw. Radona-Nikodyma istnieją f,g mierzalne nieujemne takie, że

$$\forall_{E\in\mathcal{F}}\quad \mu(E)=\int_E f\,d\lambda\ ,\quad \nu(E)=\int_E g\,d\lambda$$

Niech teraz $\nu_a=\nu|_{\{f>0\}}$ $\left(\text{tzn } \forall_{E\in\mathcal{F}}\ \nu_a(E)=\nu(E\cap\{f>0\})\right)$

i $\nu_s=\nu|_{\{f=0\}}$.

Oczywiście wtedy $\nu=\nu_a+\nu_s$.

Z definicji ν_s jest skupiona na zbiorze $\{f=0\}$, zauważmy też, że $\mu(\{f=0\})=\int_{\{f=0\}} f\,d\lambda = 0$, zatem $\nu_s\perp\mu$.

Załóżmy teraz, że $\mu(E)=0$. Wtedy $f=0$ λ-prawie wszędzie w zbiorze $E \Leftrightarrow \lambda(E\cap\{f>0\})=0$, skąd $\nu_a(E)=\int_{E\cap\{f>0\}} g\,d\lambda=0$, zatem $\nu_a\ll\mu$.

Końcówkę – dowód, że miary ν_a i ν_s są wyznaczone jednoznacznie – zostawiam jako nie bardzo trudne, ale też nie całkiem banalne zadanie. Zndw BSO możemy założyć, że miary μ i ν są skończone.

Zadanie:

Niech μ, ν będą miarami skończonymi na σ-ciele $\mathcal{F}$ podzbiorów X i założmy, że dla pewnych miar $\nu_a, \nu_a', \nu_s, \nu_s$ na $\mathcal{F}$ zachodzi

$$\nu = \nu_a + \nu_s = \nu_a' + \nu_s' \quad , \quad \nu_a, \nu_a' \ll \mu$$
$$\nu_s, \nu_s' \perp \mu .$$

Wówczas $\nu_a = \nu_a'$, $\nu_s = \nu_s'$ na $\mathcal{F}$.