Przypomnijmy dwie fundamentalne nierówności:

Nierówność Höldera

Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną, $m \in \mathbb{N}$,
$\alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = 1$,
$f_1, \dots, f_m : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mierzalne nieujemne.
Wtedy
$$\int_X f_1^{\alpha_1} \cdot f_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot f_m^{\alpha_m} \, d\mu \leq \left(\int_X f_1 \, d\mu\right)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \left(\int_X f_m \, d\mu\right)^{\alpha_m}$$
i jeżeli całka po lewej stronie nierówności jest skończona i dodatnia, to równość zachodzi tylko wtedy, gdy funkcje $f_1, \dots, f_m$ są μ-p.w. proporcjonalne, tzn. istnieją $\lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$ t.że. $\lambda_1 f_1 = \lambda_2 f_2 = \dots = \lambda_m f_m$ μ-p.w.

Dowód: Zauważmy na początek, że

- jeżeli dla pewnego $i \in \{1, \dots, m\}$ $\int_X f_i \, d\mu = 0$, to $f_i = 0$ μ-p.w., więc $f_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot f_m^{\alpha_m} = 0$ μ-p.w. i obie strony nierówności są zero. $(0 \cdot \infty = 0)$

- jeżeli dla pewnego $i \in \{1, \dots, m\}$ $\int_X f_i \, d\mu = +\infty$, to prawa strona nierówności jest $+\infty$. (i nierówność zachodzi)

Możemy zatem założyć, że $\forall_i \int_X f_i \, d\mu \in (0, +\infty)$.

Niech zatem, dla $i=1,\dots,m$, $g_i(x) = \dfrac{f_i(x)}{\int_X f_i\,d\mu}$;
$x\in X$

przypomnijmy też punktową nierówność:

$$x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_m^{\alpha_m} \le \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m, \text{ gdy } x_i \geq 0,\ \alpha_i \geq 0,\ \alpha_1+\ldots+\alpha_m = 1$$

(wystarczy zlogarytmować obie strony i skorzystać z wklęsłości logarytmu).

Nasza nierówność jest równoważna nierówności

$$\int_X g_1^{\alpha_1}\cdot g_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot g_m^{\alpha_m}\,d\mu \le 1, \text{ ale}$$

$$\int_X g_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot g_m^{\alpha_m}\,d\mu \le \int_X(\alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_m g_m)\,d\mu =$$

$$= \alpha_1\int_X g_1\,d\mu + \ldots + \alpha_m\int_X g_m\,d\mu = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m = 1.$$

Ustalenie, kiedy zachodzi równość w nierówności Höldera, zostawiam Państwu jako proste ćwiczenie (wystarczy prześledzić dowód). $\square$.

Nierówność Höldera dla dwóch czynników najczęściej się zapisuje (i pamięta) tak: jeżeli $f,g: X\to[0,\infty]$ są mierzalne, $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$\int_X fg\,d\mu \le \left(\int f^p d\mu\right)^{1/p}\left(\int g^q d\mu\right)^{1/q}$$

Wykładniki p,q t.ż. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ nazywamy hölderowsko sprzężonymi, oczywiście $q=\frac{p}{p-1}$.

Nierówność Minkowskiego

Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną, $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mierzalne.

Wówczas

$$\left(\int_X |f_1 + \ldots + f_m|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \sum_{i=1}^{m} \left(\int_X |f_i|^p d\mu \right)^{1/p}$$

i równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy

a) lewa strona nierówności jest równa $+\infty$

lub

b) wszystkie f_i, które nie są μ-p.w. zero, są dodatnio proporcjonalne, tzn. $\exists_{\lambda_i > 0}, i = 1, \ldots, m$ ~~takie, że~~ oraz $\exists_{h : X \to \overline{\mathbb{R}}}$ mierzalna tż. dla każdego i

- albo $f_i = 0$ μ-p.w.
- albo $\lambda_i f_i = h$ μ-p.w.

Dowód: Nierówność wystarczy wykazać dla $m = 2$, dla większych m — przez oczywistą indukcję.

Krok 1: jeżeli prawa strona nierówności M. jest skończona, to lewa też.

(czyli jeżeli $\left(\int_X |f_1|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X |f_2|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty$,

to $\left(\int_X |f_1 + f_2|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty$.)

Stąd wynikać już będzie, że gdy lewa strona nierówności M. jest $+\infty$, to też i prawa jest $+\infty$, co dowodzi warunku a).

Mamy punktową nierówność $|x+y|^p \leq 2^{p-1}(|x|^p+|y|^p)$, która natychmiast wynika z wypukłości $x \longmapsto x^p$ dla $x \geq 0$:

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^p \leq \left(\frac{|x|+|y|}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}|x|^p + \frac{1}{2}|y|^p.$$

Dlatego

$$\int_X |f_1+f_2|^p d\mu \leq 2^{p-1}\int_X |f_1|^p d\mu + 2^{p-1}\int_X |f_2|^p d\mu = (*)$$

Jeżeli jednak wiemy, że $\left(\int_X |f_1|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X |f_2|^p d\mu\right)^{1/p} < \infty$, to $\int_X |f_1|^p d\mu$ i $\int_X |f_2|^p d\mu$ są skończone, a więc i $(*)$ jest skończona $\Rightarrow \left(\int_X |f_1+f_2|^p d\mu\right)^{1/p} < \infty$.

<u>Krok 2</u> Założmy, że $\int_X |f_1+f_2|^p d\mu < \infty$.

$$\int_X |f_1+f_2|^p d\mu = \int_X |f_1+f_2|\,|f_1+f_2|^{p-1} d\mu \overset{n.\Delta.}{\leq}$$

$$\leq \int_X |f_1|\,|f_1+f_2|^{p-1} d\mu + \int_X |f_2|\,|f_1+f_2|^{p-1} d\mu =$$

$$= \int_X (|f_1|^p)^{\alpha_1}(|f_1+f_2|^p)^{\alpha_2} d\mu + \int_X (|f_2|^p)^{\alpha_1}(|f_1+f_2|^p)^{\alpha_2} d\mu$$

gdzie $\alpha_1 = \frac{1}{p}$, $\alpha_2 = \frac{p-1}{p}$, $\alpha_1+\alpha_2 = 1$. Stosujemy n. Höldera

$$\leq \left(\int_X |f_1|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |f_1+f_2|^p d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}} +$$

$$+ \left(\int_X |f_2|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |f_1+f_2|^p d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}} =$$

$$= \left(\left(\int_X |f_1|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X |f_2|^p d\mu\right)^{1/p}\right) \left(\int_X |f_1+f_2|^p d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Albo $\int_X |f_1+f_2|^p d\mu = 0$, wtedy $f_1 = -f_2$ μ-p.w. i nierówność Minkowskiego zachodzi (i jest równością, gdy $f_1 = f_2 = 0$ μ-p.w.), albo możemy podzielić obie strony przez $\left(\int_X |f_1+f_2|^p d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}}$, co daje teze (przypadek $\int_X |f_1+f_2|^p d\mu = +\infty$ już wykluczyliśmy)

Zostawiam Panom dokończenie ustalania, kiedy zachodzi równość. $\square$.

Niech teraz $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną i załóżmy, że $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem zbiorów μ-mierzalnych. Na zbiorze $\mathcal{M}(\mu)$ wszystkich funkcji μ-mierzalnych rozważmy – jak już czyniliśmy wcześniej – relację równoważności: $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ μ-p.w.

Odtąd, w miejsce funkcji mierzalnej f, będę rozważał jej klasę abstrakcji w tej relacji – innymi słowy, będę utożsamiał dwie funkcje mierzalne równe μ-p.w.; nie będę jednak, by nie komplikować zanadto notacji, rozróżniał $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mierzalnej i klasy abstrakcji $[f]_\sim$, obie oznaczając f. Dla porządku jednak, zbiór klas abstrakcji relacji $\sim$, czyli $\mathcal{M}(\mu)/_\sim$, oznaczać będę przez $\widetilde{\mathcal{M}}(\mu)$.

Definiujemy przestrzenie „funkcyjne" (cudzysłów, bo ich elementami nie są funkcje, ale ich klasy abstrakcji):

$$L^1(X, \mu) = \left\{ f \in \widetilde{\mathcal{M}}(\mu) : \int_X |f| \, d\mu < \infty \right\}$$

i ogólniej, dla $p > 0$,

$$L^p(X, \mu) = \left\{ f \in \widetilde{\mathcal{M}}(\mu) : \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\}.$$

Pierwszą z tych przestrzeni dobrze znamy: to przestrzeń funkcji μ-całkowalnych (modulo utożsamianie funkcji równych μ-p.w.)

Przestrzenie $L^p(X,\mu)$, dla $p>0$, nazywamy przestrzeniami Lebesgue'a.

Do kompletu zdefiniujemy jeszcze

$$L^\infty(X,\mu) = \{ f \in \widetilde{\mathcal{M}}(\mu) \ : \ \operatorname*{ess\,sup}_X |f| < \infty \}$$

gdzie

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{„supremum istotne"} \\ \text{„essential supremum"}}}{\operatorname*{ess\,sup}_X g} = \inf \{ \sup_{X \setminus Z} g \ : \ \mu(Z) = 0 \} \overset{\Vert}{=} \inf \{ \sup_X h \ : \ h \in [g]_\sim \}.$$

i, dla $p \in (0, +\infty]$, $\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} & p<\infty \\ \operatorname*{ess\,sup}_X |f| & p=+\infty. \end{cases}$

Zauważmy, że $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \, \|f\|_p$ dla wszystkich $\lambda \in \mathbb{R}$ (czyli $\|\cdot\|_p$ jest dodatnio jednorodna) i $\|f\|_p = 0 \iff f = 0 \ \mu\text{-p.w.} \iff [f]_\sim = 0$, a nierówność Minkowskiego oznacza, że dla $p \in [1, +\infty)$ $\quad \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ (nierówność trójkąta). Oznacza to, że dla $p \in [1, +\infty)$ $\|\cdot\|_p$ jest normą na przestrzeni $L^p(X,\mu)$.

A co dla pozostałych p?

Dla $p=+\infty$ bez trudu sprawdzamy, że

$$\operatorname*{esssup}_X |f+g| \le \operatorname*{esssup}_X (|f|+|g|)$$

$$\le \operatorname*{esssup}_X |f| + \operatorname*{essup}_X |g| \text{, czyli}$$

$\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$, a zatem $\|\cdot\|_\infty$ jest normą na L^∞.

Pozostaje $p\in(0,1)$.

Zauważmy, że gdy $p\in(0,1)$, to wykładnik q hoelderowsko sprzężony z p jest wówczas ujemny: $q=\frac{p}{p-1}<0$. Okazuje się, że w tej sytuacji nierówność Höldera zachodzi w przeciwną stronę!

<u>Stwierdzenie</u>: Jeżeli $p\in(0,1)$, $q=\frac{p}{p-1}$, $f,g\in\widetilde{\mathcal{M}}(\mu)$ są nieujemne i $g(x)>0$ dla μ-p.w. $x\in X$, to

$$\int_X fg\,d\mu \ge \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p}\left(\int_X g^q d\mu\right)^{1/q}.$$

<u>Dowód</u>:

Przyjmijmy $u=(fg)^p$, $v=g^{-p}$, $\alpha=\frac{1}{p}$, $\beta=\frac{\alpha}{\alpha-1}=\frac{1}{1-p}$

Wtedy $\int_X f^p d\mu=\int_X uv\,d\mu \le \left(\int_X u^\alpha d\mu\right)^{1/\alpha}\left(\int_X v^\beta d\mu\right)^{1/\beta}$

$=\left(\int_X fg\,d\mu\right)^p\left(\int_X g^q d\mu\right)^{1-p}$, skąd od razu wynika teza.

Kiedy w tej nierówności zachodzi równość?

Zadanie: Gdy $f, g > 0$, $\overbrace{p \in (0,1)}^{\text{są mierzalne}}$, to

$$\|f+g\|_p \underset{\uparrow}{\geq} \|f\|_p + \|g\|_p$$

i tutaj nie zawsze jest równość.

Stąd $\|\cdot\|_p$ nie jest dobrą normą na $L^p(X,\mu)$ gdy $p \in (0,1)$.

Zadanie: Funkcja $d_p : L^p(X,\mu) \times L^p(X,\mu) \mapsto [0,\infty]$, $d_p(f,g) = \|f-g\|_p^p$ zadaje metrykę na przestrzeni $L^p(X,\mu)$ dla $p \in (0,1)$.

Własności przestrzeni L^p i p-norm dla $p \geq 1$

Na początek prosty wniosek z nierówności Höldera:

Stwierdzenie: Jeżeli $\mu(X) < \infty$, $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, to $L^q(X,\mu) \subseteq L^p(X,\mu)$.

Dowód:

- gdy $q < \infty$, to $\overset{\|f\|_p^p}{\overset{\|}{\int_X f^p \, d\mu}} = \int_X f^p \cdot 1 \, d\mu \leq$

$$\overset{\text{n.H.}}{\leq} \left(\int_X (f^p)^{q/p} d\mu \right)^{p/q} \cdot \left(\int_X 1^{q/(q-p)} d\mu \right)^{\frac{q-p}{q}} = \|f\|_q^p \cdot \mu(X)^{\frac{q-p}{q}},$$ więc $\|f\|_q < \infty \Rightarrow \|f\|_p < \infty$ □

- Przypadek $q = +\infty$ – prościutkie zadanko.

Gdy $\mu(X) = +\infty$, tak być nie musi:

<u>Zadanie</u>: gdy $1 \le p < q \le +\infty$, to ~~$L^p(\mathbb{R},\lambda_1) \not\subset$~~ ani $L^p(\mathbb{R},\lambda_1)$ nie zawiera się w $L^q(\mathbb{R},\lambda_1)$, ani odwrotnie: $L^q(\mathbb{R},\lambda_1)$ nie zawiera się w $L^p(\mathbb{R},\lambda_1)$.

ale może: rozważmy $X = \mathbb{N}$ z miarą liczącą μ, wtedy $L^p(\mathbb{N},\mu) = \ell^p$, więc gdy $1 \le p < q \le +\infty$, to $L^p(\mathbb{N},\mu) \subsetneq L^q(\mathbb{N},\mu)$.

<u>Interpolacja</u>: jeżeli $1 \le p < r < q \le +\infty$ i $f \in L^p(X,\mu) \cap L^q(X,\mu)$, to $f \in L^r(X,\mu)$,

bo gdy $r \in (p,q)$, to $r = \theta p + (1-\theta) q$ dla pewnego $\theta \in (0,1)$ i, gdy $q < \infty$,

$$\|f\|_r^r = \int_X |f|^r d\mu = \int_X (|f|^p)^\theta \cdot (|f|^q)^{1-\theta} d\mu \overset{\text{n. H}}{\le} \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^\theta \left(\int_X |f|^q d\mu\right)^{1-\theta}$$

$$= \|f\|_p^{\theta p} \cdot \|f\|_q^{(1-\theta)q} < \infty \text{ (ongli)}$$

a dla $q = +\infty$ $\quad |f| \le \|f\|_\infty$ μ-p.w.,

więc
$$\|f\|_r^r = \int_X |f|^r d\mu \le \int_X |f|^p \cdot \|f\|_\infty^{r-p} d\mu = \|f\|_p^p \cdot \|f\|_\infty^{r-p}.$$

Stwierdzenie: Jeżeli $f \in L^p(X,\mu) \cap L^\infty(X,\mu)$,

to $\lim_{r\to\infty} \|f\|_r = \|f\|_\infty$.

Dowód: Jeżeli $f = 0$ μ-p.w, to oczywiste, załóżmy więc, że $f \neq 0$ (jako element L^p), a więc że $\|f\|_\infty \neq 0 \neq \|f\|_p$. Wiemy już, że

$$\|f\|_r \leq \|f\|_\infty^{1-p/r} \cdot \|f\|_p^{p/r} \xrightarrow[r\to\infty]{} \|f\|_\infty,$$

więc $\limsup_{r\to\infty} \|f\|_r \leq \|f\|_\infty$

Niech teraz $0 < \alpha < \|f\|_\infty$, wtedy $\beta = \mu\{|f| > \alpha\} > 0$,

więc
$$\|f\|_r^r = \int_X |f|^r d\mu = r \int_0^\infty t^{r-1} \mu\{|f| > t\} dt \geq$$
$$\geq r \int_0^\alpha t^{r-1} \mu\{|f| > \alpha\} dt = \beta \cdot \alpha^r,$$

skąd $\|f\|_r \geq \beta^{1/r} \cdot \alpha \xrightarrow[r\to\infty]{} \alpha$, więc $\liminf_{r\to\infty} \|f\|_r \geq \alpha$.

Z dowolności $\alpha \in (0, \|f\|_\infty)$ $\liminf_{r\to\infty} \|f\|_r \geq \|f\|_\infty$,

a więc $\lim_{r\to\infty} \|f\|_r = \|f\|_\infty$. $\square$.

Zadanko: Jeżeli $1 \leq p < q < \infty$, i $f \in L^p(X,\mu) \cap L^q(X,\mu)$,

to $\lim_{r\to p^+} \|f\|_r = \|f\|_p$, $\lim_{r\to q^-} \|f\|_r = \|f\|_q$.

Stwierdzenie: Jeżeli $1 \le p \le \infty$ i $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ w $L^p(X,\mu)$, to

1) $f_n \xrightarrow{\mu} f$ (tzn. f_n zbiega do f w mierze)

2) istnieje podciąg (f_{n_k}) zbieżny punktowo μ-p.w. do f

Lemacik (nier. Czebyszewa) Niech $t > 0$. Jeżeli $f \in L^p(X,\mu)$, $1 \le p < \infty$, to $\mu\{|f| > t\} \le \frac{\|f\|_p^p}{t^p}$ (a gdy $p = +\infty$, to $\mu\{|f|>t\} = 0$ gdy $t \ge \|f\|_\infty$).

Dowód: Nawias wynika wprost z definicji L^∞.

Rozważmy $p = 1$. $\|f\|_1 = \int_X |f| \, d\mu \ge \int_{\{|f|>t\}} |f| \, d\mu \ge \int_{\{|f|>t\}} t \, d\mu =$

$= t\mu(\{|f|>t\})$, co dowodzi lematu dla $p = 1$.

Dla $p \in (1, \infty)$

$$\|f\|_p^p = \||f|^p\|_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rachunek dla } p=1}}{\ge} s\mu(\{|f|^p > s\}) \underset{\substack{\uparrow \\ s = t^p}}{=} t^p \mu(\{|f|^p > t^p\})$$

$= t^p \mu(\{|f| > t\})$,

co dowodzi lematu dla $p \in (1, \infty)$. □

Dowód Stwierdzenia

1) wynika wprost z Lemaciku: dla każdego $\varepsilon > 0$

$$\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \begin{cases} \leq \dfrac{\|f_n - f\|_p^p}{\varepsilon} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 & \text{dla } p \in [1,\infty) \\ = 0 \text{ o ile tylko } \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon, \\ \text{więc też dąży do zera przy } p = \infty, \ n \to \infty. \end{cases}$$

2) wynika z 1) oraz pierwszej części tw. Riesza-Fischera, którą udowodniliśmy wprowadzając pojęcie zbieżności w mierze

($f_n \xrightarrow{\mu} f$, to istnieje podciąg (f_{n_k}) zbieżny punktowo μ-p.w.). $\square$.

Tw. Riesza - Fischera

Przestrzenie $L^p(X,\mu)$, dla $\infty > p \geq 1$, są zupełne.

Lemat: Przestrzeń liniowa unormowana $(Y, \|\cdot\|)$ jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy bezwzględnie zbieżny szereg elementów Y (tzn $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \; : \; a_i \in Y, \; \sum_{i=1}^{\infty} \|a_i\| < \infty$) jest zbieżny w Y (tzn. $\exists_{b \in Y} \; \|b - \sum_{i=1}^{k} a_i\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$).

Dowód lematu:

$(\Rightarrow)$ Niech $\sum a_i$ będzie bezwzgl. zbieżnym szeregiem elementów Y, wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $k \in \mathbb{N}$ tż $\sum_{i=k+1}^{\infty} \|a_i\| < \varepsilon$; wtedy, biorąc $S_\ell = \sum_{i=1}^{\ell} a_i$ mamy $(m \geq n)$ $\|S_m - S_n\| = \|\sum_{i=n+1}^{m} a_i\| \leq$

$$\leq \sum_{i=n+1}^{m} \|a_i\| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \|a_i\|,$$ jeżeli więc $m \geq n \geq k$, to $\|S_m - S_n\| < \varepsilon$, zatem ciąg sum częściowych (S_i) szeregu $\sum a_i$ jest ciągiem Cauchy'ego w Y $\Rightarrow$ jest w Y zbieżny.

$(\Leftarrow)$ Niech (b_i) będzie ciągiem Cauchy'ego w Y. Dla każdego $i \in \mathbb{N}$ znajdziemy $n_i \in \mathbb{N}$ takie, że $\forall_{k,\ell \geq n_i} \; \|b_k - b_\ell\| < 2^{-i}$; możemy też dobrać n_i tak, by były ciągiem rosnącym.

Przyjmijmy $a_1 = b_{n_1}$, $a_2 = b_{n_2} - b_{n_1}, \dots, a_k = b_{n_k} - b_{n_{k-1}}$,

wtedy $b_{n_k} = a_1 + a_2 + \dots + a_k = \sum_{i=1}^{k} a_i = S_k$

i szereg $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ jest bezwzgl. zbieżny, bo dla $i > 1$

$\|a_i\| = \|b_{n_i} - b_{n_{i-1}}\| < 2^{i-1} \Rightarrow (b_{n_k})$ jest zbieżny w Y.

Niech $b = \lim_{k\to\infty} b_{n_k}$. Mamy, dla ustalonego $\varepsilon > 0$,

$$\|b_n - b\| \leq \underbrace{\|b_n - b_{n_k}\|}_{\substack{< \varepsilon/2, \text{ o ile} \\ n \text{ i } k \text{ dost. duże,} \\ \text{bo } (b_n) \text{ jest Cauchy'ego}}} + \underbrace{\|b_{n_k} - b\|}_{\substack{< \varepsilon/2 \\ \text{o ile } k \\ \text{dost.} \\ \text{duże}}} < \varepsilon,$$

o ile n dost. duże

więc (b_n) jest zbieżny do b. $\square$.

Dowód twierdzenia R.-F.

Z lematu wynika, że wystarczy wykazać, że każdy bezwzgl. zbieżny szereg w $L^p(X, \mu)$ jest zbieżny w $L^p(X, \mu)$.

Niech zatem $\sum f_n$ spełnia $\sum_{i=1}^{\infty} \|f_n\| = M < \infty$

Przyjmijmy $g_n = \sum_{k=1}^{n} |f_k|$, wtedy $\|g_n\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p \leq M$,

czyli $\int_X g_n^p \, d\mu \leq M^p$

Dla każdego $x \in X$ ciąg $g_n(x)$ jest niemalejący

$\Rightarrow$ ma granicę $g(x)$ i funkcja g jest mierzalna.

Z lematu Fatou dostajemy od razu, że

$$\int_X g^p d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n^p d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n^p d\mu \le M^p,$$

a więc g^p jest całkowalna $\Rightarrow$ g jest skończona μ-p.w.

~~Przyjmijmy teraz~~ Zauważmy, że jeżeli dla pewnego $x\in X$ funkcja $g(x)$ ~~jest~~ skończona, to szereg $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ (liczbowy!) jest bezwzgl. zbieżny $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ jest zbieżny. ~~Połóżmy~~ zatem, dla $m=1,2,\dots,\infty$.

$$s_m(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} f_k(x) & \text{gdy } g(x)<\infty \\ 0 & \text{gdy } g(x)=+\infty \end{cases}$$

Wtedy $s_m = \sum_{k=1}^{m} f_k$ μ-p.w, więc s_m jest mierzalna. Mamy też $\forall_{m\in\mathbb{N}}$ $|s_m(x)|\le g_m(x)$, więc $s_m(x)\to s_\infty(x)$ oraz $\forall_{x\in X}$ $|s_\infty(x)|\le g(x)$ $\Rightarrow$ $s_\infty\in L^p(X,\mu)$ μ-p.w. Na koniec, $|s_m(x)-s_\infty(x)|^p \le (g_m(x)+g(x))^p$

$\le 2^p(g(x))^p \leftarrow$ całkowalne

więc z tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej

$$\left\|\sum_{k=1}^{m} f_k - s_\infty\right\|_p = \|s_m - s_\infty\|_p = \Big(\int_X \underbrace{|s_m - s_\infty|^p}_{\downarrow\ \mu\text{-p.w.}\ 0} d\mu\Big)^{1/p} = 0$$

cyli szereg $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ jest zbieżny w $L^p(X,\mu)$ do s_∞. $\square$

__Zadanie__: Udowodnić zupełność $L^\infty(X,\mu)$.

Aproksymacja funkcji całkowalnych

<u>Twierdzenie</u>: Niech μ będzie σ-skończoną miarą Radona na X i niech X będzie T_4 (tzn. przestrzenią normalną). Wówczas dla każdej $f \in L^1(X,\mu)$ i $\varepsilon > 0$ istnieje $h \in C(X)$ t.ż. $\|f - h\|_1 < \varepsilon$.

<u>Dowód</u>:

<u>Krok 1</u> Niech $f = \chi_A$, gdzie $A \subset X$ jest μ-mierzalny o mierze skończonej. Wtedy istnieją $F \subset A \subset \mathcal{U}$, F domknięty, $\mathcal{U}$ otwarty, $\mu(\mathcal{U} \setminus F) < \varepsilon$; niech h_A będzie funkcją Urysohna dla pary zbiorów domkniętych F, $X \setminus \mathcal{U}$, tzn. $h_A = 1$ na F, $h_A = 0$ poza $\mathcal{U}$, $h_A : X \to [0,1]$.

Wtedy $\int_X |f - h_A| \, d\mu \le \int_{\mathcal{U} \setminus F} 1 \, d\mu = \mu(\mathcal{U} \setminus F) < \varepsilon$.

<u>Krok 2</u> Jeżeli f jest funkcją prostą, $f \in L^1$, $\underbrace{f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i}}_{}$ (*), $\boxed{i \ \mu(A_i) < \infty}$ to $\|f - \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i h_{A_i}}_{\text{funkcja ciągła}}\|_1 \le \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|$

~~jeżeli μ jest skończona, możemy założyć, że μ(A_i) < ∞~~

<u>Krok 3</u> Niech f będzie całkowalna nieujemna, wtedy istnieje ciąg (f_n) funkcji prostych monotonicznie (niemalejąco) zbieżny do f, więc z tw. o zbieżności zmajoryzowanej (bo $|f - f_n| \le 2f \leftarrow$ całkowalna)

(*) przypomnijmy, że gdy f jest mierzalna nieujemna, to $f = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \chi_{A_i}$, gdzie

$$A_i = \left\{ x \in X : f(x) > \frac{1}{i} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j} \right\}$$

Załóżmy, ~~wtedy~~ że $f \in L^1(X,\mu)$. Wtedy (nier. Czebyszewa) $\mu(\{|f| > t\}) \leq \frac{\|f\|_1}{t}$,

Dowód n. Czebyszewa: $\|f\|_1 = \int_X |f| \overset{\text{Cavalieri}}{=} \int_0^{\infty} \mu(\{|f|>t\})\,dt$

$\geq \int_0^s \mu(\{|f|>s\})\,dt = s\mu(\{|f|>s\}) \Rightarrow \mu(\{|f|>s\}) \leq \frac{\|f\|_1}{s}$

skąd od razu wynika, że zbiory A_i mają skończoną miarę.

$\|f-f_n\|_1 = \int_X (f-f_n)\,d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, w szczególności

istnieje f_n prosta t.ż. $\|f-f_n\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$;

a f_n umiemy już przybliżyć ciągłą z dokł. $\varepsilon/2$:

istnieje $h \in C(X)$ t.ż. $\|f_n - h\|_1 < \varepsilon/2$.

Wtedy $\|f-h\|_1 < \varepsilon$.

<u>Krok 4</u> Jeżeli f jest całkowalna, to rozkładamy ją na część dodatnią i ujemną:

$f = f_+ - f_-$ i przybliżamy oddzielnie

f_+ i f_- funkcjami h_+ i h_- ~~za~~ t.ż.

$\|f_+ - h_+\|_1 < \varepsilon/2$, $\|f_- - h_-\|_1 < \varepsilon/2$, wtedy $h = h_+ - h_-$

spełnia tezę. $\square$.

<u>Uwaga</u>: Tak samo można udowodnić gęstość funkcji ciągłych w $L^p(X,\mu)$ dla $1 \le p < \infty$.

<u>Zagadka</u>: Czy twierdzenie zachodzi dla $p = \infty$?

Zdefiniujmy $\tau_y : L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \to L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$,

$\tau_y f(x) = f(x+y)$.

$1 \leq p < \infty$

<u>Lemat</u>: Jeżeli $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, to $\tau_y f \xrightarrow[y\to 0]{} f$ w L^p, tzn $\|\tau_y f - f\|_p \to 0$.

<u>Dowód</u>: Jest oczywistym, że $\tau_y f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

~~Rozważmy funkcje $h_N(x) = h(x)\cdot\varphi_N(x)$,~~

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $h \in C(\mathbb{R}^n)$ będzie taka, że $\|f - h\|_p < \frac{\varepsilon}{6}$ (oczywiście wtedy $h \in L^p(\mathbb{R}^n)$).

Dalej, dla $N \in \mathbb{N}$ rozważmy $h_N(x) = h(x)\cdot\varphi_N(|x|)$, gdzie $\varphi_N : [0,\infty) \to [0,1]$, $\varphi_N(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,N] \\ 2 - t/N & t \in [N,2N] \\ 0 & t \geq 2N \end{cases}$.

Wtedy $\operatorname{supp} h_N \subset \overline{B_{2N}}$, $|h_N| \leq |h|$, więc $h_N \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$\Downarrow$

h_N jest jednost. ciągła na $\mathbb{R}^n$.

Dalej, $h_N \xrightarrow[N\to\infty]{} h$, z tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej $h_N \to h$ w $L^p(\mathbb{R}^n)$ $\left(|h - h_N|^p \leq 2^p |h|^p\right)$, więc istnieje N tż $\|h - h_N\|_p < \varepsilon/6 \Rightarrow \|f - h_N\|_p < \varepsilon/3$

Skoro h_N jest jednost. ciągła, możemy znaleźć $\delta > 0$ tż. jeżeli $|u - v| < \delta$, to $|h_N(u) - h_N(v)| < \frac{\varepsilon}{3\lambda_n(B_{3N})^{1/p}}$

Wtedy, dla $|y| < \min(\delta, N)$ (np dla $|y| < \min(\delta, 1)$) by uniezależnić warunek na y od N

$$\|\tau_y f - f\|_p \leq \underbrace{\|\tau_y f - \tau_y h_N\|_p}_{= \|f - h_N\|_p < \frac{\varepsilon}{3}} + \|\tau_y h_N - h_N\|_p + \underbrace{\|h_N - f\|_p}_{< \varepsilon/3}$$

$$< \tfrac{2}{3}\varepsilon + \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|h_N(x+y) - h_N(x)|^p}_{\substack{\text{to jest } = 0 \\ \text{poza } B_{3N} \\ \text{a na } B_{3N} \text{ jest } < \frac{\varepsilon^p}{3^p \lambda_n(B_{3N})}.}} d\lambda_n(x) \Big)^{1/p}$$

$$< \frac{2}{3}\varepsilon + \left(\frac{\varepsilon^p}{3^p \lambda_n(B_{3N})} \cdot \lambda_n(B_{3N}) \right)^{1/p} = \varepsilon. \qquad \square.$$

W kolejnych twierdzeniach ograniczymy się do $X = \mathbb{R}^n$, $\mu = \lambda_n$ (choć są one prawdziwe przy ogólniejszych założeniach).

Def: Mówimy, że funkcja f mierzalna na X jest lokalnie całkowalna na $\mathcal{U} \subset X$, gdy dla każdego $K \subset \mathcal{U}$ zwartego f jest całkowalna na K. Przestrzeń funkcji lok. całkowalnych na $\mathcal{U}$ oznaczamy $L^1_{loc}(\mathcal{U})$.

Przykład: Funkcje stałe różne od zera nie są całkowalne na $\mathbb{R}^n$, ale są lokalnie całkowalne. Podobnie, gdy f jest ciągła na $\mathcal{U}$, to $f \in L^1_{loc}(\mathcal{U})$.

Zadanie: Skonstruować $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ taką, że każdy reprezentant f jest nieciągły we wszystkich punktach $\mathbb{R}^n$.

Def: Dla $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ definiujemy funkcję maksymalną Hardy'ego-Littlewooda

$$Mf(x) = \sup\left\{ \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B |f| \, d\lambda_n \; : \; B \text{ jest kulą}, \; x \in B \right\}$$

$$\in [0, +\infty]$$

Ozn. Dla uproszczenia, średnią całkową $\frac{1}{|A|}\int_A h \, d\lambda_n$ funkcji h na zbiorze A oznaczać będziemy $\fint_A h \, d\lambda_n$;

Umowa: gdy $\lambda_n(A)=0$, to $\fint_A h\, d\lambda_n = 0$.

Twierdzenie (Hardy'ego - Littlewooda - Wienera)

1) jeżeli $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, to Mf jest skończona prawie wszędzie

2) jeżeli $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, to $\lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}) \leq \frac{3^n}{t} \|f\|_1$

3) jeżeli $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$, to $Mf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ i istnieje stała C zależna od n i p tż.

$$\|Mf\|_p \leq C \cdot \|f\|_p$$

(a więc M jest operatorem ograniczonym - - choć nie całkiem liniowym - na L^p dla $p>1$).

Lemat (minimalistyczna wersja jednego z lematów Vitalego, tzw. lematu o pięciu).

Z każdej skończonej rodziny kul $\{B_1, B_2, \dots, B_\ell\}$ w $\mathbb{R}^n$ możemy wybrać podrodzinę $\{B_{m_1}, \dots, B_{m_k}\}$ taką, że kule $\{B_{m_i}\}_{i=1}^k$ są parami rozłączne oraz

$$\bigcup_{i=1}^{\ell} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{k} 3B_{m_i},$$

gdzie przez $3B$ oznaczam kulę koncentryczną z B, o 3 razy większym promieniu.

Dowód: Jako B_{m_1} wybieramy największą z kul $B_1, \dots, B_\ell$, jako B_{m_2} - największą spośród rozłącznych z B_{m_1}, B_{m_3} - największą wśród rozłącznych z B_{m_1} i B_{m_2}

i tak dalej, póki się da.
Uzyskane kule są oczywiście parami rozłączne, pozostaje sprawdzić inkluzję z tezy.

Dla dowolnego $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ kula B_i przecina się z co najmniej jedną z kul $B_{m_1}, \dots, B_{m_k}$; niech j będzie najmniejszym indeksem takim, że $B_i \cap B_{m_j} \neq \emptyset$. Wiemy, że $\operatorname{diam} B_i \leq \operatorname{diam} B_{m_j}$, w przeciwnym razie w j-tym kroku wybralibyśmy B_i w miejsce B_{m_j}. Oznaczmy teraz przez y_j środek kuli B_{m_j} i wybierzmy $w \in B_i \cap B_{m_j}$. Dla dowolnego $z \in B_i$

$$\|z - y_j\| \leq \|z - w\| + \|w - y_j\| \leq \cancel{\operatorname{diam} B_i + \tfrac{1}{2} \operatorname{diam} B_{m_i}}$$

$$\leq \operatorname{diam} B_i + \frac{1}{2} \operatorname{diam} B_{m_j} \leq \frac{3}{2} \operatorname{diam} B_{m_j}$$

Uwaga: kule mogą być zarówno otwarte, jak i domknięte.

$$\Rightarrow z \in 3B_{m_j} \Rightarrow B_i \subset 3B_{m_j}, \text{ więc}$$

Lemat zachodzi w dowolnej p-ni metrycznej.

$$\bigcup_{i=1}^{l} B_i \subset \bigcup_{j=1}^{k} 3B_{m_i}. \qquad \square$$

Dowód tw. Hardy'ego - Littlewooda

Zauważmy na początek, że punkt 1) wynika z punktów 2) i 3).

Udowodnimy teraz 2).

Jeżeli $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}$, to z def. funkcji maksymalnej istnieje kula $B_{x_0} \ni x_0$ taka, że $\fint_{B_{x_0}} |f| d\lambda_n > t$, a więc $\lambda_n(B_{x_0}) < \frac{1}{t} \int_{B_{x_0}} |f| \, d\lambda_n$.

Niech teraz $K \subset \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}$ będzie zbiorem zwartym; rozważmy pokrycie zbioru K kulami $\{B_x\}_{x \in K}$.

Z tego pokrycia możemy wybrać podpokrycie skończone $\{B_{x_1}, \dots, B_{x_\ell}\}$; dalej, korzystając z Lematu spośród kul $\{B_{x_1}, \dots, B_{x_\ell}\}$ możemy wybrać kule $B_1, \dots, B_m$ parami rozłączne takie, że

$$\bullet) \quad \lambda_n(B_i) < \frac{1}{t} \int_{B_i} |f| \, d\lambda_n$$

oraz

$$\bullet\bullet) \quad K \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} B_{x_j} \subset \bigcup_{j=1}^{m} 3B_j .$$

Wtedy $\lambda_n(K) \overset{\bullet\bullet)}{\leq} \lambda_n\left(\bigcup_{j=1}^{m} 3B_j\right) \leq \sum_{j=1}^{m} \lambda_n(3B_j) =$

$$= 3^n \sum_{j=1}^{m} \lambda_n(B_j) \overset{\bullet)}{\leq} \frac{3^n}{t} \sum_{j=1}^{m} \int_{B_j} |f| \, d\lambda_n$$

$$= \frac{3^n}{t} \int_{\bigcup_{j=1}^{m} B_j} |f| \, d\lambda_n \leq \frac{3^n}{t} \|f\|_1$$

bo B_j są parami rozłączne

Ta nierówność zachodzi dla każdego zwartego $K \subset \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}$, więc

$$\lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf > t\}) = \sup\{\lambda_n(K) : K \text{ zwarty}, K \subset \{Mf > t\}\} \leq \frac{3^n}{t} \|f\|_1$$

Dalej wywnioskujemy 3) z 2).

Dla ustalonego $t \geqslant 0$ oznaczmy $f^{[t]} = f \cdot \chi_{\{|f| > t\}}$

$$f_{[t]} = f \cdot \chi_{\{|f| \leq t\}}.$$

Wtedy $f = f^{[t]} + f_{[t]}$, więc $Mf \leq Mf^{[t]} + Mf_{[t]}$

$$\underset{(*)}{\leq} Mf^{[t]} + t$$

(by uzasadnić te ostatnie rachunki, wystarczy sprawdzić, że M jest subaddytywna: $M(f+g) \leq Mf + Mg$ oraz że gdy $|f| \leq \lambda$ p.w. na $\mathbb{R}^n$, to $Mf \leq \lambda$ na $\mathbb{R}^n$)

Jeżeli $Mf(x) > t$, to $t < Mf(x) \overset{(*),\ z\ t/2\ w\ miejsce\ t}{\leq} Mf^{[t/2]} + t/2$,

więc $Mf^{[t/2]} > t/2$.

Innymi słowy, $\{Mf > t\} \subset \{Mf^{[t/2]} > t/2\}$,

zatem

$$\lambda_n(\{Mf > t\}) \leq \lambda_n(\{Mf^{[t/2]} > \tfrac{t}{2}\}) \overset{2)}{\leq} \frac{3^n}{t/2} \| f^{[t/2]} \|_1$$

$$= \frac{2 \cdot 3^n}{t} \int_{\{|f| > t/2\}} |f| \, d\lambda_n \quad , \quad \text{więc}$$

$$\| Mf \|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} Mf^p \, d\lambda_n = p \int_0^\infty t^{p-1} \cdot \lambda_n(\{Mf > t\}) \, dt$$

$$\leq p \int_0^\infty t^{p-1} \cdot \frac{2 \cdot 3^n}{t} \int_{\{|f| > t/2\}} |f| \, d\lambda_n dt \overset{\text{Fubini}}{=} 2p \cdot 3^n \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} t^{p-2} |f(x)| \chi_{\{|f(x)| > t/2\}}(x,t) \, d\lambda_n(x) dt$$

Fubini
$$= 2p\cdot 3^n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \int_0^\infty t^{p-2} \chi_{\{0\le t<2|f(x)|\}}(x,t)\, dt\, d\lambda_n(x) =$$

$$= 2p\cdot 3^n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \cdot \int_0^{2|f(x)|} t^{p-2} dt\, d\lambda_n(x) =$$

$$= \frac{p\cdot 2^p}{p-1}\cdot 3^n \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p d\lambda_n = \frac{p\cdot 2^p}{p-1}\cdot 3^n \|f\|_p^p \qquad \square.$$

Zadanie: Sprawdzić, że 3) nie zachodzi dla $p=1$. Wskazówka: rozważyć $f = \chi_{B(0,1)}$.

Wniosek: Twierdzenie Lebesgue'a o różniczkowaniu

Jeżeli $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, to dla p.w. $x \in \mathbb{R}^n$ zachodzi
$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} f\, d\lambda_n \overset{(*)}{=} f(x).$$

Dowód: Oczywiście wystarczy wykazać, że dla każdej kuli $\overline{B} \subset \mathbb{R}^n$ równość $(*)$ zachodzi w p.w. $x \in \overline{B}$. Rozważmy funkcję $g = f\cdot \chi_{\overline{B}}$, wtedy $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g = f$ na $\overline{B}$.

Przyjmijmy oznaczenia: $g_r(x) = \fint_{B(x,r)} g\, d\lambda_n$
$$\Omega g(x) = \limsup_{r\to 0} g_r(x) - \liminf_{r\to 0} g_r(x).$$

Teraz skoncentrujemy się na udowodnieniu dwóch rzeczy:

1. że $\Omega g = 0$ p.w.

stąd będziemy wiedzieli, że $\lim\limits_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} g \, d\lambda_n =$
$= \lim\limits_{r \to 0} g_r(x)$ istnieje dla p.w. $x \in \mathbb{R}^n$

oraz

2. że $g_r \to g$ w $L^1(\mathbb{R}^n)$ przy $r \to 0$

wtedy będziemy wiedzieli, że dla pewnego ciągu $r_k \to 0^+$ mamy $\lim\limits_{k\to\infty} g_{r_k}(x) = g(x)$ p.w.

Ale dla p.w. $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{r\to 0} g_r(x) = \lim_{k\to\infty} g_{r_k}(x) = g(x)$$

więc granica, której istnienie dowodzi 1., jest równa p.w. $g(x)$, co zakończy dowód.

No to dowodzimy 1. Zauważmy, że

$$\Omega g(x) = \limsup_{r\to\infty} \fint_{B(x,r)} |g| \, d\lambda_n - \liminf_{r\to\infty} \fint_{B(x,r)} |g| \, d\lambda_n \le 2 Mg(x),$$

więc z tw. Hardy'ego-Littlewooda-Wienera dla każdego $\varepsilon > 0$

$$\lambda_n(\{\Omega g > \varepsilon\}) \le \lambda_n(\{Mg > \varepsilon\}) \le \frac{C}{\varepsilon} \|g\|_1 . \quad \otimes$$

Niech $h \in C(\mathbb{R}^n)$, $\|h - g\|_1 < \varepsilon^2$.

Zauważmy, że dla funkcji ciągłych równość $(*)$ zachodzi wszędzie, we wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$, zatem $\Omega h = 0$.

Mamy też więc $g_r = (g-h)_r + h_r$

więc

$$\limsup_{r \to 0} g_r \leq \limsup_{r \to 0} (g-h)_r + \limsup_{r \to 0} h_r$$

$$= \limsup_{r \to 0} (g-h)_r + h.$$

i tak samo $\liminf_{r \to 0} g_r \geq \liminf_{r \to 0} (g-h)_r + h$,

więc $\Omega g \leq \Omega(g-h)$

$$\Rightarrow \lambda_n(\{\Omega g > \varepsilon\}) \leq \lambda_n(\{\Omega(g-h) > \varepsilon\})$$

$$\underset{\substack{(*),\ z\ g-h\ w \\ \text{miejsce } g}}{\leq} \frac{C}{\varepsilon} \|g-h\|_1 < C\varepsilon$$

Stąd już wynika, że $\lambda_n(\{\Omega g > 0\}) = 0$, czyli $\Omega g = 0$ p.w. Pozostaje wykazać 2.

Mamy

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g_r - g| \, d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} \Big| \fint_{B(x,r)} g(y) \, d\lambda_n(y) - \overbrace{g(x)}^{\fint_{B(x,r)} g(x) \, d\lambda_n(y)} \Big| \, d\lambda_n(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \Big| \fint_{B(x,r)} (g(y) - g(x)) \, d\lambda_n(y) \Big| \, d\lambda_n(x) \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \fint_{B(x,r)} |g(y) - g(x)| \, d\lambda_n(y) \, d\lambda_n(x) =$$

$y = x + z$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \fint_{B(0,r)} |g(x+z) - g(x)| \, d\lambda_n(z) \, d\lambda_n(x) \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= \fint_{B(0,r)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\tau_z g - g| \, d\lambda_n \right) d\lambda_n(z) =$$

$$= \fint_{B(0,r)} \|\tau_z g - g\|_1 \, d\lambda_n(z) \leq \sup_{|z|<r} \|\tau_z g - g\|_1 \xrightarrow{r \to 0} 0,$$

bo $\tau_z g \to g$ w L^1 gdy $z \to 0$. $\square$.

Wnioski:

1. Wybór kanonicznego reprezentanta funkcji z $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$:

Jeżeli $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, to kładąc

$$\tilde{f}(x) = \limsup_{r \to 0} \fint_{B(x,r)} f(y) \, d\lambda_n(y) \qquad (\star)$$

mamy, że $\tilde{f} = f$ p.w. na $\mathbb{R}^n$, więc $\tilde{f}$ jest reprezentantem $[f]_\sim$.

2. Niech $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ i niech $\tilde{f}$ będzie dana wzorem $\star$. Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ nazywamy punktem Lebesgue'a funkcji f, jeżeli

$$\lim_{r \to 0} \fint_{B(x,r)} |f(y) - \tilde{f}(x)| \, d\lambda_n(y) = 0.$$

<u>Twierdzenie:</u> Jeżeli $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, to prawie wszystkie $x \in \mathbb{R}^n$ są punktami Lebesgue'a f.
(tzn. punkty, które nie są, tworzą zbiór miary zero).

<u>Dowód</u>

Dla ustalonej liczby $c \in \mathbb{Q}$ wiemy, z tw. Lebesgue'a o różniczkowaniu, że dla p.w. $x \in \mathbb{R}^n$ $\cancel{\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |f(y)-c}$

$$(*) \qquad \lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |f(y)-c| \, d\lambda_n(y) = |\tilde{f}(x)-c|$$

Oznaczmy przez E_c zbiór tych $x \in \mathbb{R}^n$, dla których $(*)$ NIE ZACHODZI; $\lambda_n(E_c) = 0$.
Stąd, dla $E = \bigcup_{c\in\mathbb{Q}} E_c$ mamy $\lambda_n(E) = 0$
i dla $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$ $(*)$ zachodzi dla wszystkich $c \in \mathbb{Q}$.

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$,
$c \in \mathbb{Q}$ takie, że $|\tilde{f}(x) - c| < \varepsilon/2$.

Wtedy

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |f(y) - \tilde{f}(x)| \, d\lambda_n(y) \leq \lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} \left(|f(y)-c| + |c-\tilde{f}(x)|\right) d\lambda_n(y)$$

$$= \underbrace{\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |f(y)-c| \, d\lambda_n(y)}_{} + \underbrace{\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |c-\tilde{f}(x)| \, d\lambda_n(y)}_{=|c-\tilde{f}(x)|}$$

$$= |\tilde{f}(x) - c| \quad \text{z tw. Lebesgue'a o różniczkowaniu}$$

$$= 2|\tilde{f}(x) - c| < \varepsilon,$$ co, z dowolności $\varepsilon > 0$, daje tezę $\forall_{x \in \mathbb{R}^n \setminus E}$.

Uwaga: Analogicznie definiujemy punkty p-Lebesgue'a dla $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ przy $1 < p < \infty$:
$x \in \mathbb{R}^n$ jest punktem p-Lebesgue'a dla $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$, jeżeli

$$\lim_{r \to 0} \fint_{B(x,r)} |f(y) - \tilde{f}(x)|^p \, d\lambda_n(y) = 0 ;$$

dokładnie tak samo można wykazać, że dla $f \in L^p_{loc}$ zbiór tych $x \in \mathbb{R}^n$, które nie są punktami p-Lebesgue'a, jest miary zero.

Stosując definicję punktów Lebesgue'a do funkcji charakterystycznej zbioru mierzalnego dostajemy ważną definicję - i własność zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a:

Def: Niech $E \subset \mathbb{R}^n$ będzie mierzalny w sensie Lebesgue'a. Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ nazywamy punktem gęstości zbioru E, gdy $\displaystyle\lim_{r \to 0} \frac{\lambda_n(E \cap B(x,r))}{\lambda_n(B(x,r))} = 1$.

Tw. Dla p.w. $x \in E$ x jest punktem gęstości E i dla p.w. $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$ x nie jest punktem gęstości E.

Dowód: Z tw. o punktach Lebesgue'a zastosowanego do $f = \chi_E$

$$\lim_{r \to 0} \frac{\lambda_n(E \cap B(x,r))}{\lambda_n(B(x,r))} = \lim_{r \to 0} \fint_{B(x,r)} \chi_E(y) \, d\lambda_n(y) = \chi_E(x) \quad \text{dla p.w. } x \in \mathbb{R}^n. \quad \square$$