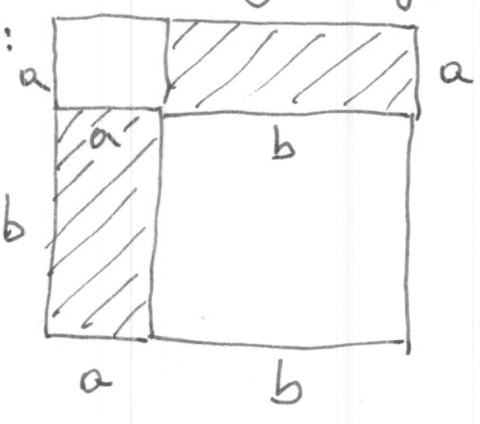
Elementy teorii miary

Chcemy mierzyć podzbiory $\mathbb{R}^n$ – mierzyć długość podzbiorów $\mathbb{R}$, pole powierzchni podzbiorów $\mathbb{R}^2$, objętości podzbiorów $\mathbb{R}^3$ itd.

Ogromną pracę wykonali starożytni – przyjrzyjmy się, jakich narzędzi użyli, by znaleźć uczone w szkole wzory na pole powierzchni wielokątów, koł itd.

Punktem wyjścia niech będzie wzór na pole prostokąta o bokach a i b, a więc $P=ab$. Oczywiście lepiej byłoby wyjść od pojęcia jeszcze bardziej pierwotnego – wiedzy o tym, że pole kwadratu o boku x to x^2, stąd jednak łatwo możemy wyprowadzić wzór na pole prostokąta:



Oznaczając pole prostokąta o bokach a, b, przez P, otrzymujemy

$$(a+b)^2 - a^2 - b^2 = 2P \Rightarrow P = ab.$$

Zarówno w dowodzie, jak i w samym sformułowaniu problemu ukryte jest założenie, że pole figury (kwadratu, prostokąta) nie zależy od tego, jak jest ona położona w $\mathbb{R}^2$ – a więc zakładamy, że dla dowolnej izometrii $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pole(A) = pole$(\varphi(A))$.

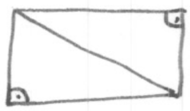
W powyższym dowodzie zakładamy też, że gdy poskładamy figurę z kilku kawałków, to jej pole będzie równe sumie pól fragmentów: jeżeli zbiory $A_1, A_2, \dots, A_n$ są parami rozłączne, to pole $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \text{pole}(A_i)$.

~~Z~~ Kolejne naturalne założenie to to, że pole zbioru może być 0, dodatnie lub ∞.

Te założenia wystarczają do

- udowodnienia, że pole jest funkcją monotoniczną: jeżeli $A \subset B$, to $\text{pole}(A) \leq \text{pole}(B)$,

  bo $\text{pole}(B) = \text{pole}(A) + \underbrace{\text{pole}(B \setminus A)}_{\geq 0}$.

- obliczenia pola
  - trójkątów prostokątnych 
  - dowolnych trójkątów 
  - dowolnych wielokątów (dzielimy przekątnymi na trójkąty)

Żeby jednak obliczyć pole koła, musimy je przybliżać wielokątami – a żeby jakkolwiek takie przybliżenie uzasadnić, potrzebujemy kolejnego założenia:

jeżeli $A_1, A_2, \dots$ są parami rozłączne,

to $\text{pole}(\cancel{A_1 \cup A_2} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \text{pole}(A_i)$.

Szukamy zatem funkcji μ, określonej na podzbiorach $\mathbb{R}^n$, o wartościach w $[0,\infty]$, spełniającej założenie <u>przeliczalnej addytywności</u>:
jeżeli $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ to rodzina parami rozłącznych podzbiorów $\mathbb{R}^n$
to $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.
i zgadzającej się z pojęciem długości/pola/objętości na odcinkach/prostokątach/prostopadłościanach i ich wyżej wymiarowych odpowiednikach.

<u>Problem</u>: takiej funkcji nie ma nawet na podzbiorach $\mathbb{R}$.

Przykład – <u>zbiór Vitaliego</u>

Rozważmy na $\mathbb{R}$ relację równoważności:

$x \sim y$, gdy $x-y \in \mathbb{Q}$ — sprawdzenie, że to relacja równoważności, jest bardzo proste.

Ma ona nieprzeliczalnie wiele klas abstrakcji; gdy $x \in \mathbb{R}$, to klasa abstrakcji x, ozn. $\{x\}_\sim$, składa się z liczb postaci $x+q$, gdzie $q \in \mathbb{Q}$.
Prosta obserwacja: $\forall_{x\in\mathbb{R}} \ \{x\}_\sim \cap [0,1] \neq \emptyset$.
$(\{x\}_\sim = \{x-\lfloor x\rfloor\}_\sim;\ x-\lfloor x\rfloor \in [0,1])$.
Niech V będzie zbiorem, składającym się z reprezentantów wszystkich klas abstrakcji – po jednym z każdej, branych z odcinka $[0,1]$ (oczywiście istnienie zbioru V wymaga pewnika wyboru).

Dla każdego $x \in [0,1]$ istnieje element y zbioru V taki, że $x \sim y$, a więc $x = y + q$, gdzie $q \in \mathbb{Q}$. Skoro i x, i y leżą w $[0,1]$, to $q \in [-1,1]$. Stąd wynika już, że $x \in V+q$, a więc

$$[0,1] \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (V+q)$$

Z drugiej strony $\forall_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]}$ $V+q \subset [0,1]+[-1,1] = [-1,2]$,

więc

$$[0,1] \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (V+q) \subset [-1,2] \qquad (*)$$

Przesunięcie zbioru V o q jest izometrią, więc $\mu(V+q) = \mu(V)$. Zauważmy też, że dla różnych $q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ $(V+q_1) \cap (V+q_2) = \emptyset$, bo gdyby $z \in (V+q_1) \cap (V+q_2)$, to $z - q_1 \in V$ i $z - q_2 \in V$. $z - q_1 \sim z - q_2 \sim z$, więc klasa abstrakcji $\{z\}_\sim$ ma w V nie jednego, a dwóch reprezentantów $\lightning$

Z przeliczalnej addytywności

$$\mu\Big(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (V+q)\Big) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \mu(V+q) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \mu(V).$$

Jeżeli $\mu(V) = 0$, to $\mu\Big(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (V+q)\Big) = 0$, co leży w sprzeczności z $(*)$, bo $\mu\Big(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (V+q)\Big) \geq \mu([0,1]) = 1$.

Jeśli zaś $\mu(V) > 0$, to $\mu\big(\bigcup (V+q)\big) = +\infty$, co daje sprzeczność z drugim zawieraniem w $(*)$:

$$\mu\Big(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}(V+q)\Big) \leq \mu([-1,2]) = 3.$$

To znaczy, że funkcja μ nie może być sensownie zdefiniowana na zbiorze V – jest to przykład zbioru niemierzalnego.

Widać, że jednym ze źródeł naszych kłopotów jest tu żądanie, by μ była przeliczalnie addytywna. Może powinniśmy zadowolić się tylko (skończoną) addytywnością μ, dopuszczając przeliczalną addytywność tylko w niektórych sytuacjach?

W 1914 Mazurkiewicz i Sierpiński podali przykład podzbioru płaszczyzny, który można rozłożyć na 2 rozłączne części, z których każda jest izometryczna z całym zbiorem. Ich przykład jest jednak zbiorem przeliczalnym, więc spodziewamy się, że jego miara jest zero ~~(o ile miara punktu jest 0)~~ (i słusznie).

Ale 10 lat później Stefan Banach i Alfred Tarski pokazali, jak kulę w $\mathbb{R}^3$ rozłożyć na 5 rozłącznych zbiorów, z których następnie, przy pomocy izometrii, możemy poskładać DWIE kule identyczne z wyjściową

($B = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5$; istnieją izometrie $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$
$P_i \cap P_j = \emptyset$ gdy $i \neq j$

takie, że $\varphi_1(P_1) \cup \varphi_2(P_2) = B$ i $\varphi_3(P_3) \cup \varphi_4(P_4) \cup \varphi_5(P_5) = B$).

Nie w przeliczalnej addytywności leży więc problem, ale w pewniku wyboru. Gdy zastąpimy go np. przeliczalnym pewnikiem wyboru, albo jednym z tzw. aksjomatów determinacji, zbiór Vitaliego i paradoksalny rozkład Banacha-Tarskiego rozpłyną się jak zły sen - i będzie można zdefiniować μ tak, by była określona na wszystkich podzbiorach $\mathbb{R}^n$ (i spełniała wszystkie nasze, wymienione wcześniej, założenia).

My jednak jesteśmy przywiązani do pewnika wyboru, pójdziemy więc inną drogę.

Giuseppe Vitali (1875-1932)
włoski matematyk, syn kolejarza. Uczył się w Rawennie, studiował w Pizie, gdzie po studiach przez 2 lata był asystentem Diniego. Przez 20 lat uczył w szkołach średnich, W 1922 roku został zatrudniony na Uniwersytecie w Modenie, potem pracował w Padwie i Bolonii. Ma wielkie zasługi w ugruntowaniu podstaw teorii miary i całkowania, przede wszystkim jako autor serii tzw. twierdzeń pokryciowych.

Definicja: Rodzinę $\mathcal{F} \subset 2^X$ nazywamy ciałem zbiorów, jeżeli

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{F}$
- $A_1, A_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$.

Łatwo można sprawdzić, że gdy $\mathcal{F}$ jest ciałem zbiorów, to $\forall_{A_1, A_2 \in \mathcal{F}} \quad A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}, \quad A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{F}$ itd.

Np $A_1 \setminus A_2 = \cancel{A}\, X \setminus (A_2 \cup X \setminus A_1)$.

$A_1 \cap A_2 = X \setminus (X \setminus A_1 \cup X \setminus A_2)$

~~Jeż~~ Podobnie, przez indukcję, jeżeli $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, to $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{F}$ i $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{F}$.

Jeżeli ciało $\mathcal{F}$ spełnia dodatkowo warunek przeliczalnej addytywności:

$$\forall_{A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

to nazywamy je σ-ciałem (sigma-ciałem)

Przykłady ciał i σ-ciał:

1) 2^X jest oczywiście σ-ciałem zbiorów
2) ustalmy $A \subset X$, wtedy $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, X \setminus A, X\}$ jest σ-ciałem.
3) podobnie, jeżeli $A_1, A_2, \dots, A_k \subset X$ są parami rozłączne, to $\mathcal{F}$ ~~$= \{A_1, \dots, A_k, A_{k+1}$~~

$\mathcal{F}$ złożone z $\emptyset$, X oraz

- A_j, $j=1,2,\dots,k$ i $X \setminus A_j$, $j=1,\dots,k$
- $A_i \cup A_j$ $i,j=1,2,\dots,k$ i $X \setminus A_i \cup A_j$
- $A_i \cup A_j \cup A_l$ i $X \setminus (A_i \cup A_j \cup A_l)$

itd, aż po sumę k elementów i jej dopełnienie tworzą σ-ciało.

4) $\mathcal{F} \subset 2^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{N} :$ A lub $\mathbb{N} \setminus A$ jest skończone$\}$

jest ciałem, ale nie σ-ciałem:

$\forall_{k \in \mathbb{N}}$ $A_k = \{2,4,6,\dots,2k\} \in \mathcal{F}$, ale ani $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \{2,4,6,\dots\}$,

ani $\mathbb{N} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \{1,3,5,\dots\}$ nie są skończone,

więc $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \notin \mathcal{F}$.

Niech $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ będzie dowolną rodziną ciał/σ-ciał.

Wówczas $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ też jest ciałem/σ-ciałem.

Dowód to abstract nonsense, zostawię go Państwu.

<u>Wniosek</u>: Dla każdej rodziny $\mathcal{O} \subset 2^X$ istnieje najmniejsze σ-ciało {i najmniejsze ciało} zawierające $\mathcal{O}$ – nazywamy je σ-ciałem (odp: ciałem) generowanym przez $\mathcal{O}$.

Dowód: Rozważmy rodzinę $\{\mathcal{F}_i\}$ wszystkich σ-ciał (odp. ciał) zawierających $\mathcal{G}$. Jest ona niepusta, bo zawiera 2^X. Wtedy

$$\mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$$ jest σ-ciałem generowanym przez $\mathcal{G}$.

Przykład: Niech X będzie p-nią topologiczną. σ-ciało generowane przez rodzinę (wszystkich) zbiorów otwartych w X nazywamy σ-ciałem zbiorów borelowskich i oznaczamy $\mathcal{B}(X)$.

Def: Miarą zewnętrzną na X nazywamy funkcję $\mu^*: 2^X \to [0, +\infty]$ spełniającą:

1) $\mu^*(\emptyset) = 0$
2) dla ~~kaz~~ wszystkich $A \subset B \subset X$
$\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. } monotoniczność miary zewnętrznej
3) $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$ } tę własność nazywamy przeliczalną subaddytywnością

Def: Niech $\mathcal{F} \subset 2^X$ będzie σ-ciałem. Miarą na $\mathcal{F}$ nazywamy funkcję $\mu: \mathcal{F} \to [0, \infty]$ spełniającą

1) $\mu(\emptyset) = 0$
2) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ dla wszystkich parami rozłącznych $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$.

(własność 2) nazywamy przeliczalną addytywnością).

Jak już wiemy, 1) i 2) pociągają za sobą monotoniczność miary: jeżeli $A \subset B$, $A, B \in \mathcal{F}$, to ~~A~~ $\mu(A) = \mu(B) - \mu(B \setminus A) \leq \mu(B)$, bo A i $B \setminus A$ są rozłączne.

<u>Stwierdzenie</u>

1) Jeżeli $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, $A_i \in \mathcal{F}$,

to $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$

2) jeżeli $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, $A_i \in \mathcal{F}$, oraz $\mu(A_1) < \infty$

to $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$

Dowód

1) Niech $P_1 = A_1$, $P_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots, P_j = A_j \setminus A_{j-1}$

Wtedy $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$, a zbiory P_i są już parami rozłączne. Zatem

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(P_i) = \mu(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty}\left(\mu(A_i) - \mu(A_{i-1})\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty}\left(\mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1) + \mu(A_3) - \mu(A_2) + \ldots + \mu(A_n) - \mu(A_{n-1})\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

2) Niech $B_j = A_1 \setminus A_j$. Wtedy $\emptyset = B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \ldots$,

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_1 \setminus A_j = A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$$

Na mocy 1) $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \lim_{j \to \infty} \mu(B_j) =$

$$= \mu(A_1) - \lim_{j \to \infty} \mu(A_j)$$

a z drugiej strony

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right)$$

Stąd $\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j \to \infty} \mu(A_j)$. $\square$

Po co w 2) jest założenie, że $\mu(A_1) < \infty$?

Na razie nie mamy jeszcze żadnego użytecznego przykładu miary, trudno więc tworzyć kontrprzykłady.

~~Możemy jednak chyba zgodnie przyjąć, że jeżeli~~

Jeżeli jednak uda nam się znaleźć miarę, która w sensowny sposób uogólnia długość odcinka, to ~~w tej~~ miara półprostej $[a, \infty)$ powinna być $+\infty$, niezależnie od a. Niech zatem

$A_j = [j, \infty)$. Wtedy $A_1 \supset A_2 \supset \dots$,

$\forall_j \; \mu(A_j) = +\infty$, ale $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \emptyset$, więc

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = 0.$$

Możemy uściślić to rozumowanie wprowadzając tzw. miarę liczącą na $\mathbb{N}$:

Dla każdego $A \subset \mathbb{N}$ $\mu(A) = \# A$ (liczba elementów).

Proszę sprawdzić, że rzeczywiście jest to miara na $2^{\mathbb{N}}$.

ZZ.

Wtedy $A_j = \{j, j+1, j+2, \dots\}$ ma te same własności, co $A_j = [j, +\infty) \subset \mathbb{R}$ i

$$\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = +\infty > \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu(\emptyset) = 0.$$

<u>Definicja</u> Niech μ^* będzie miarą zewn. na X. $A \subset X$ spełnia <u>warunek Carathéodory'ego</u>, jeżeli $\forall_{Z\subset X}$ $\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A)$.

<u>Twierdzenie Carathéodory'ego</u> Niech μ^* będzie miarą zewnętrzną na X. Rodzina $\mathcal{F}$ wszystkich zbiorów spełniających warunek Carathéodory'ego jest σ-ciałem, a μ^* jest na $\mathcal{F}$ miarą.

<u>Dowód</u>: Krok po kroku sprawdzimy, że $\mathcal{F}$ spełnia wszystkie warunki na to, by być σ-ciałem, a μ - by być miarą na $\mathcal{F}$.

- <u>$\emptyset \in \mathcal{F}$</u>

Tak, bo $\forall_{Z\subset X}$ $\mu^*(Z) = \mu^*(\underbrace{Z \cap \emptyset}_{=\emptyset}) + \mu^*(\underbrace{Z \setminus \emptyset}_{=Z})$

- <u>jeżeli $A \in \mathcal{F}$, to $X \setminus A \in \mathcal{F}$</u>

Sprawdźmy.

$$\mu^*(\underbrace{Z \cap (X\setminus A)}_{=Z\setminus A}) + \mu^*(\underbrace{Z \setminus (X \setminus A)}_{=Z\cap A}) = \mu^*(Z\setminus A) + \mu^*(Z \cap A) \overset{\text{bo } A\in\mathcal{F}}{=} \mu^*(Z).$$

• <u>jeżeli A i $B \in \mathcal{F}$, to również $A \cup B \in \mathcal{F}$.</u>

tu troszkę trudniej - trzeba będzie skorzystać z subaddytywności μ^*.

Zauważmy, że $Z \cap (A \cup B) = (Z \cap A) \cup ((Z \setminus A) \cap B)$
$Z \setminus (A \cup B) = (Z \setminus A) \setminus B$.

Mamy zatem

$$\mu^*(Z \cap (A \cup B)) + \mu^*(Z \setminus (A \cup B)) \overset{\text{subadd.}}{\leq} \mu^*(Z \cap A) + \mu^*((Z \setminus A) \cap B) + \mu^*((Z \setminus A) \setminus B) \underset{\text{bo } B \in \mathcal{F}}{=} \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A) \underset{\text{bo } A \in \mathcal{F}}{=} \mu^*(Z).$$

Z drugiej strony, $(Z \cap (A \cup B)) \cup (Z \setminus (A \cup B)) = Z$, więc z subaddytywności $\mu^*(Z) \leq \mu^*(Z \cap (A \cup B)) + \mu^*(Z \setminus (A \cup B))$ - mamy nierówność przeciwną.

Wiemy zatem, że $\mathcal{F}$ jest ciałem, w szczególności że $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$, $A \setminus B \in \mathcal{F}$, $B \setminus A \in \mathcal{F}$.

• teraz sprawdzimy, że <u>μ^* jest addytywna na $\mathcal{F}$</u>

Jeżeli $A \cap B = \emptyset$, ~~ta~~ $A, B \in \mathcal{F}$, to dla każdego $Z \subset X$

$$\mu^*(Z \cap (A \cup B)) = \mu^*(\underbrace{(Z \cap (A \cup B)) \cap A}_{= Z \cap A}) + \mu^*(\underbrace{(Z \cap (A \cup B)) \setminus A}_{= Z \cap B}) =$$

bo A i B są rozłączne

$= \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \cap B)$, w szczególności dla $Z = X$

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Przez oczywistą indukcję dowodzimy, że jeżeli $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ są parami rozłączne, to $\mu^*(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) + \dots + \mu^*(A_n)$.

- <u>$\mathcal{F}$ jest σ-ciałem</u>

Zauważmy, że wystarczy sprawdzić, że dla dowolnych PARAMI ROZŁĄCZNYCH $P_1, P_2, \dots \in \mathcal{F}$ mamy $\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \in \mathcal{F}$,

bo jeżeli $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ (i $\{A_i\}$ niekoniecznie są parami rozłączne),

to $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$, gdzie $P_1 = A_1$, ~~$P_2 = A_1 \setminus A_2$, $P_3 = A_2 \setminus A_3$~~

$P_2 = A_2 \setminus A_1$, $P_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$, ..., $P_j = A_j \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{j-1})$ są już parami rozłączne i należą do $\mathcal{F}$ (bo $\mathcal{F}$ jest ciałem). Dla dowolnego $Z \subset X$ mamy

$$\mu^*(Z) \underset{\text{bo } \bigcup_{i=1}^{m} P_i \in \mathcal{F}}{=} \mu^*\left(Z \cap \bigcup_{i=1}^{m} P_i\right) + \mu^*\left(Z \setminus \bigcup_{i=1}^{m} P_i\right) =$$

$$= \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{m} (Z \cap P_i)\right) + \mu^*\left(Z \setminus \bigcup_{i=1}^{m} P_i\right)$$

$$\underset{\substack{\text{zbiory} \\ (Z \cap P_i) \text{ są rozłączne}}}{=} \sum_{i=1}^{m} \mu^*(Z \cap P_i) + \mu^*\Big(\underbrace{Z \setminus \bigcup_{i=1}^{m} P_i}_{\supset\, Z \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i}\Big) \underset{\text{monotoniczność } \mu^*}{\geq} \sum_{i=1}^{m} \mu^*(Z \cap P_i) + \mu^*\left(Z \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i\right)$$

Zatem $\forall_{m \in \mathbb{N}} \quad \sum_{i=1}^{m} \mu^*(Z \cap P_i) \leq \mu^*(Z) - \mu^*\left(Z \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i\right)$

Stąd, dla każdego Z takiego, że $\mu^*(Z)<\infty$ szereg $\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(Z\cap P_i)$ jest zbieżny i

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(Z\cap P_i)\leq\mu^*(Z)-\mu^*(Z\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}P_i) \quad ☺$$

skąd

$$\mu^*(Z)\geq\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(Z\cap P_i)+\mu^*(Z\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}P_i)\geq$$

$$\geq\mu^*(\underbrace{Z\cap\bigcup_i P_i}_{=\bigcup_i(Z\cap P_i)})+\mu^*(Z\setminus\bigcup_i P_i)$$

przeliczalna subaddytywność μ^*

a nierówność przeciwna: $\mu^*(Z\cap\bigcup_i P_i)+\mu^*(Z\setminus\bigcup_i P_i)\leq\mu^*(Z)$ jest oczywista z subaddytywności μ^*.

Stąd $\bigcup_i P_i$ spełnia warunek Caratheodory'ego dla każdego $Z\subset X$ takiego, że $\mu^*(Z)<\infty$.

A jeżeli $\mu^*(Z)=+\infty$? Wtedy ☺ również zachodzi, tylko może być nierównością między nieskończonościami, podobnie jak następujące po niej, formalne rachunki – wszystko okiata.

- i na koniec <u>przeliczalna addytywność μ^* na $\mathcal{F}$.</u>

Niech $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_1$ będą parami rozłączne.

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{monotoniczność} \\ \mu^*}}{\geq} \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{addytywność } \mu^* \text{ na } \mathcal{F}}}{=} \sum_{i=1}^{m} \mu^*(A_i)$$

więc $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$ (być może $\infty \geq \infty$)

ale jeżeli A_i są rozłączne, to z przeliczalnej subaddytywności μ^* zachodzi nierówność przeciwna.

Stąd $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$.

$\square$

Zbiory miary zero

<u>Twierdzenie</u> Niech μ^* będzie miarą zewnętrzną na X i niech $A \subset X$ ma miarę zero, tzn. $\mu^*(A)=0$. Wówczas A spełnia warunek Carathéodory'ego.

<u>Dowód</u>

Zauważmy, że $\forall_{Z \subset X}\ 0 \le \mu^*(A \cap Z) \overset{\text{monotoniczność } \mu^*}{\le} \mu^*(A) = 0$,

więc
$$\mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A) = \mu^*(Z \setminus A) \le \mu^*(Z)$$

Z drugiej strony
$$\mu^*(Z) = \mu^*((Z \cap A) \cup (Z \setminus A)) \le \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A).$$

Stąd
$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A).$$

<u>Def</u>. Niech μ^* będzie miarą zewn. na X. Każdy $A \subset X$ spełniający warunek Carathéodory'ego nazywamy zbiorem mierzalnym; σ-ciało zbiorów mierzalnych oznaczamy $\mathcal{F}(\mu^*)$

Udowodnione przez nas twierdzenie mówi, że każdy zbiór miary zero jest mierzalny.

Przykład

Niech $\mu^*: 2^{\mathbb{R}} \to [0,\infty]$ będzie dana wzorem

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } A \text{ jest przeliczalny} \\ 1 & \text{gdy } \mathbb{R}\setminus A \text{ jest przeliczalny} \\ \frac{1}{2} & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Wykażemy, że μ^* jest miarą zewnętrzną na $\mathbb{R}$.
Monotoniczność μ^* jest oczywista, $\mu^*(\emptyset)=0$, pozostaje subaddytywność, a więc że

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \quad \star$$

Prawa strona $\star$ może przyjmować wartości:

0 – gdy $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)=0$, to $\forall_i\ \mu^*(A_i)=0$, więc $\forall_i\ A_i$ jest przeliczalny, ale wtedy $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ też jest przeliczalny, zatem lewa strona $\star$ też jest 0.

$\frac{1}{2}$ – gdy $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)=0$, to wszystkie A_i, poza jednym (bso możemy przyjąć, że A_1) są przeliczalne, a A_1 i $\mathbb{R}\setminus A_1$ są nieprzeliczalne. Wtedy $\mathbb{R}\setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \underbrace{(\mathbb{R}\setminus A_1)}_{\text{nieprzelicz.}} \setminus \underbrace{\bigcup_{i=2}^{\infty} A_i}_{\text{przelicz.}}$ jest nieprzeliczalny.
Stąd $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \frac{1}{2}$.

1 lub więcej – wtedy ☆ zachodzi niezależnie od tego, ile wynosi $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$.

Jakie zbiory są mierzalne względem μ^*?
Oczywiście wszystkie przeliczalne, bo są miary zero. $\mathcal{F}(\mu^*)$ jest σ-ciałem, więc również ~~R~~ dopełnienia zbiorów przeliczalnych są mierzalne.
Stąd: $(\mu^*(A) = 0$ lub $\mu^*(A) = 1) \Rightarrow A \in \mathcal{F}(\mu^*)$.

A jeżeli $\mu^*(A) = \frac{1}{2}$? Które ze zbiorów tego typu spełniają warunek Carathéodory'ego?

Oznaczmy $B = \mathbb{R} \setminus A$. B jest zbiorem nieprzeliczalnym, istnieją zatem B_1, B_2 rozłączne i nieprzeliczalne takie, że $B_1 \cup B_2 = B$ (dlaczego?)
Niech $Z = A \cup B_1$.
$\mu^*(Z) = \frac{1}{2}$, bo i Z, i $\mathbb{R} \setminus Z = B_2$ są nieprzeliczalne.
$\mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A) = \mu^*(A) + \mu^*(B_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.
Stąd żaden zbiór poza przeliczalnymi i ich dopełnieniami nie jest mierzalny.

<u>Zadanie</u>: Znajdź μ^* taką, że $\mathcal{F}(\mu^*) = \{\emptyset, A, X \setminus A, X\}$ i ogólniej – taką, że $\mathcal{F}(\mu^*)$ jest skończonym σ-ciałem.

Def Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a μ^* - miarą zewnętrzną na X. Mówimy, że μ^* jest miarą zewnętrzną metryczną, jeżeli

$$\forall_{A,B\subset X} \quad \underset{\inf\{d(x,y)\,:\,x\in A,\, y\in B\}}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{dist}(A,B)}} > 0 \implies \mu^*(A\cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

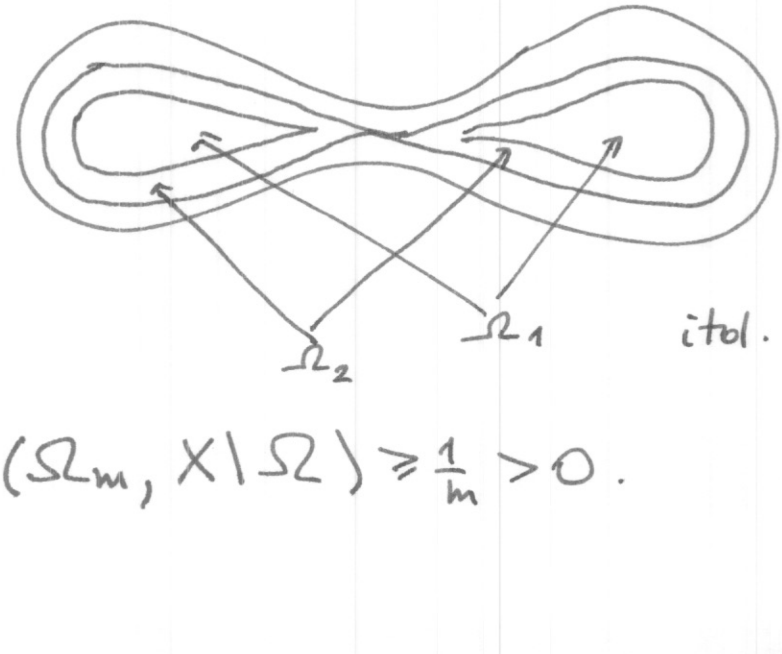
Twierdzenie Jeżeli μ^* jest metryczną miarą zewnętrzną na X, to $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{F}(\mu^*)$ (tzn. zbiory borelowskie są mierzalne).

Dowód

Oczywiście wystarczy sprawdzić, że zbiory otwarte są mierzalne, tj spełniają warunek Carathéodory'ego.

Niech Ω będzie otwartym podzbiorem X.

Zdefiniujmy $\Omega_m = \left\{x\in\Omega : \cancel{d(x}\ \operatorname{dist}(x, X\setminus\Omega) > \frac{1}{m}\right\}$



$$\operatorname{dist}(\Omega_m, X\setminus\Omega) \geq \frac{1}{m} > 0.$$

Ω_m to wstępujący ciąg zbiorów, $\bigcup \Omega_m = \Omega$

(bo Ω jest otwarty, więc $\forall_{x \in \Omega}$ $d(x, X \setminus \Omega) > 0$, więc $\exists_m$ $d(x, X \setminus \Omega) > \frac{1}{m} \Rightarrow x \in \Omega_m$)

Niech teraz $P_m = \Omega_m \setminus \Omega_{m-1} = \{x \in \Omega : \frac{1}{m-1} \geq d(x, X \setminus \Omega) > \frac{1}{m}\}$

Wtedy $\Omega \setminus \Omega_m = P_{m+1} \cup P_{m+2} \cup \ldots$

Niech teraz $i > j+1$ i niech $x \in P_j$, $y \in P_i$.

Wtedy
$$\frac{1}{j} < d(x, X \setminus \Omega) = \inf_{z \in X \setminus \Omega} d(x,z) \leq \inf_{z \in X \setminus \Omega} (d(x,y) + d(y,z)) = d(x,y) + d(y, X \setminus \Omega) \leq$$
$$\leq d(x,y) + \frac{1}{i-1}$$

skąd $d(x,y) \geq \frac{1}{j} - \frac{1}{i-1}$. Biorąc $\inf\limits_{\substack{x \in P_j \\ y \in P_i}} d(x,y)$ dostajemy $\mathrm{dist}(P_i, P_j) \geq \frac{1}{j} - \frac{1}{i-1}$.

Niech teraz $Z \subset X$. Chcemy wykazać, że
$$\mu^*(Z) \overset{\odot}{=} \mu^*(Z \cap \Omega) + \mu^*(Z \setminus \Omega),$$
i ~~ony~~ wystarczy sprawdzić, że w $\odot$ zachodzi nierówność $\geq$, bo odwrotna wynika z subaddytywności μ^*.

Jeżeli $\mu^*(Z) = +\infty$, to taka nierówność jest oczywiście prawdziwa. Załóżmy zatem, że $\mu^*(Z) < \infty$.

Mamy

$$\sum_{j=1}^{m} \mu^*(Z\cap P_{2j-1}) = \mu^*(Z\cap P_1) + \mu^*(Z\cap P_3) + \ldots + \mu^*(Z\cap P_{2m-1}) =$$

$$= \mu^*((Z\cap P_1)\cup(Z\cap P_3)\cup\ldots\cup(Z\cap P_{2m-1}))$$

bo $\mathrm{dist}(Z\cap P_k, Z\cap P_{k+2})>0$ a miara zewn. μ^* jest metryczna

$$= \mu^*(Z\cap(P_1\cup P_3\cup\ldots\cup P_{2m-1})) \leq \mu^*(Z) < \infty$$

Analogicznie

$$\sum_{j=1}^{m} \mu^*(Z\cap P_{2j}) = \mu^*(Z\cap(P_2\cup P_4\cup\ldots\cup P_{2m})) \leq \mu^*(Z) < \infty.$$

Stąd $\sum_{j=1}^{2m} \mu^*(Z\cap P_j) \leq 2\mu^*(Z) < \infty$, więc szereg $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(Z\cap P_j)$ jest zbieżny, a więc

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} \mu^*(Z\cap P_j) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Wiemy już, że $\mathrm{dist}(\Omega_m, X\setminus\Omega)>0$, więc

$$\mu^*(Z\cap\Omega_m) + \mu^*(\underbrace{Z\cap(X\setminus\Omega)}_{=Z\setminus\Omega}) = \underbrace{\mu^*((Z\cap\Omega_m)\cup(Z\cap(X\setminus\Omega)))}_{\leq \mu^*(Z)}$$

Zatem

$$\mu^*(Z\cap\Omega) + \mu^*(Z\setminus\Omega) \leq \mu^*(Z\cap\Omega_m) + \mu^*(Z\cap(\Omega\setminus\Omega_m)) + \mu^*(Z\setminus\Omega) \leq \mu^*(Z) + \mu^*(Z\cap(\Omega\setminus\Omega_m))$$

☺

Mamy jednak

$$\mu^*(Z\cap(\Omega\setminus\Omega_m)) = \mu^*(Z\cap(P_{m+1}\cup P_{m+2}\cup\ldots))$$
$$\leq \mu^*(Z\cap P_{m+1}) + \mu^*(Z\cap P_{m+2}) + \ldots$$
$$= \sum_{j=m+1}^{\infty} \mu^*(Z\cap P_j) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0,$$ więc przechodząc

w ☺ z m do ∞ dostajemy

$$\mu^*(Z\cap\Omega) + \mu^*(Z\setminus\Omega) \leq \mu^*(Z)$$

i o to nam chodziło.

Miara Lebesgue'a

Zajmiemy się teraz obiecaną konstrukcją miary uogólniającej pojęcia długości (odcinka), pola powierzchni (prostokątów) czy objętości (wielościanów) – w zależności od wymiaru.

Zacznijmy od definicji przedziału w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Będziemy, dla $x,y\in\mathbb{R}^n$, pisać $x\leq y$, gdy $\forall_i\ x_i\leq y_i$

$x<y$, gdy $\forall_i\ x_i<y_i$.

Dla $x,y\in\mathbb{R}^n$, $x<y$, oznaczamy

$(x,y)_n = \{z\in\mathbb{R}^n : x<z<y\}$ przedział otwarty

$[x,y]_n = \{z\in\mathbb{R}^n : x\leq z\leq y\}$ przedział domknięty

Łatwo zauważyć, że

$$(x,y)_n = (x_1,y_1)\times(x_2,y_2)\times\ldots\times(x_n,y_n)$$

$$[x,y]_n = [x_1,y_1]\times[x_2,y_2]\times\ldots\times[x_n,y_n]$$

Dla przedziału (otwartego lub domkniętego) o końcach $x,y\in\mathbb{R}^n$, $x<y$, definiujemy n-wymiarową objętość: gdy $P=(x,y)_n$ lub $[x,y]_n$, to $\mathrm{Vol}(P)=\prod_{i=1}^{n}(y_i-x_i)$.

Mając objętość przedziału, możemy zdefiniować <u>miarę zewnętrzną Lebesgue'a</u> w $\mathbb{R}^n$:

Dla $A\subset\mathbb{R}^n$

$$\lambda_n^*(A)=\inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{Vol}(P_j),\ \text{gdzie } \{P_j\}_{j\in\mathbb{N}} \text{ jest taką rodziną przedziałów w } \mathbb{R}^n, \text{ że } A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}P_j\Big\}$$

W definicji możemy przyjąć P_j otwarte lub domknięte – nie ma to znaczenia dla wartości $\lambda_n^*(A)$. Proszę się zastanowić, dlaczego.

<u>Twierdzenie</u>: λ_n^* jest miarą zewnętrzną metryczną na $\mathbb{R}^n$.

Dowód:

- $\lambda_n^*(\emptyset) = 0$

Rzeczywiście tak jest, bo $\emptyset \subset [-\varepsilon, \varepsilon]^n \quad \forall_{\varepsilon > 0}$,

$\mathrm{Vol}([-\varepsilon,\varepsilon]^n) = (2\varepsilon)^n \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 0$, więc $\lambda_n^*(\emptyset) = 0$.

- monotoniczność

Niech $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, wtedy każde pokrycie przedziałami zbioru B jest także pokryciem zbioru A, skąd od razu dostajemy, że $\lambda_n^*(A) \leq \lambda_n^*(B)$.

- przeliczalna subaddytywność

Niech $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ będzie rodziną podzbiorów $\mathbb{R}^n$.

Jeżeli dla któregokolwiek z A_i $\lambda_n^*(A_i) = +\infty$,

to nierówność $\lambda_n^*\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_n^*(A_j)$

jest oczywista. Załóżmy zatem, że $\forall_{j\in\mathbb{N}}\ \lambda_n^*(A_j) < \infty$.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje rodzina przedziałów

$\{P_{1,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ taka, że $\sum_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\lambda_n^*}_{\mathrm{Vol}(\ )}(P_{1,k}) \leq \lambda_n^*(A_1) + \frac{\varepsilon}{2}$ i $A_1 \subset \bigcup_k P_{1,k}$

analogicznie znajdziemy $\{P_{2,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ t.ż. $\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_n^*(P_{2,k}) \leq$

i $A_2 \subset \bigcup_k P_{2,k}$ $\qquad \leq \lambda_n^*(A_2) + \frac{\varepsilon}{4}$

i dalej $\{P_{j,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ t.ż. $\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_n^*(P_{j,k}) \leq \lambda_n^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$

Wtedy $\bigcup_{j,k\in\mathbb{N}} \{P_{j,k}\}$ pokrywa $\qquad A_j \subset \bigcup_k P_{j,k}$

$\bigcup_j A_j$, więc $\lambda_n^*\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) \leq \sum_{j,k\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(P_{j,k})$

$$\leq \sum_j \lambda_n^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \ldots = \sum_j \lambda_n^*(A_j) + \varepsilon$$

Z dowolności $\varepsilon > 0$

$$\lambda_n^*\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_n^*(A_j)$$

- metryczność λ_n^*

Niech $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tż. $\operatorname{dist}(A,B) = d > 0$

Niech $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ to rodzina przedziałów pokrywająca $A \cup B$, taka, że $\sum_{P\in\mathcal{P}} \operatorname{vol}(P) \leq \lambda_n^*(A\cup B) + \varepsilon$.

Teraz każdy z przedziałów P_i dzielimy na mniejsze $Q_{i,j}$ tak, by średnica $Q_{i,j}$ była mniejsza niż $d/2$ $(\forall i,j)$

Z pokrycia $\mathcal{P}$ po poszatkowaniu otrzymujemy pokrycie $\tilde{Q}$ tż przedziałami o średnicy $< d/2$, przy czym

$$\sum_{Q\in\tilde{Q}} \operatorname{vol}(Q) = \sum_{P\in\mathcal{P}} \operatorname{vol}(P)$$

W $\tilde{Q}$ są przedziały trzech typów:

- mające punkty wspólne z A — te oznaczamy Q_A
- mające punkty wspólne z B — Q_B

$Q_A \cap Q_B = \emptyset$, bo brak przedziałów przecinających równocześnie A i B.

• nieprzecinające żadnego ze zbiorów

$$\sum_{Q \in \mathcal{Q}_A} vol(Q) + \sum_{Q \in \mathcal{Q}_B} vol(Q) \leq \sum_{Q \in \tilde{\mathcal{Q}}} vol(Q) = \sum_{P \in \mathcal{P}} vol(P)$$

$$\leq \lambda_n^*(A \cup B) + \varepsilon.$$

ale $\mathcal{Q}_A$ pokrywa A, $\mathcal{Q}_B$ pokrywa B, więc

$$\lambda_n^*(A) + \lambda_n^*(B) \leq \sum_{Q \in \mathcal{Q}_A} vol(Q) + \sum_{Q \in \mathcal{Q}_B} vol(Q) \leq \lambda_n^*(A \cup B) + \varepsilon.$$

Z dowolności $\varepsilon > 0$ mamy

$$\lambda_n^*(A) + \lambda_n^*(B) \leq \lambda_n^*(A \cup B)$$

ale z subaddytywności mamy przeciwną nierówność.

Stąd $\lambda_n^*(A) + \lambda_n^*(B) = \lambda_n^*(A \cup B)$.

<u>Wniosek</u> Zbiory borelowskie w $\mathbb{R}^n$ są mierzalne w sensie Lebesgue'a (tzn. względem λ_n^*).