Przypomnienie z GALu

Macierz symetryczną $A \in M^{n\times n}$ nazywamy

- dodatnio określoną, gdy $\forall_{v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \langle Av, v\rangle > 0$ (ozn. $A > 0$)
- dodatnio półokreśloną, gdy $\forall_{v\in\mathbb{R}^n} \langle Av, v\rangle \geq 0$ (czasem: nieujemnie określoną) (ozn. $A \geq 0$)

analogicznie definiujemy macierz ujemnie określoną i ujemnie półokreśloną.

Ze względu na to, że, przy ustaleniu bazy w V, każde przekształcenie dwuliniowe $T: V\times V \to \mathbb{R}$ jest postaci $T(v,w) = \langle Av, w\rangle$ dla pewnej macierzy A, która, gdy T jest symetryczne, też jest symetryczna, możemy mówić, że:

$T: V\times V \to \mathbb{R}$ symetryczne, dwuliniowe jest

- dodatnio określone, gdy $\forall_{v\in V\setminus\{0\}} T(v,v) > 0$ ozn. $T>0$
- dodatnio półokreślone, gdy $\forall_{v\in V} T(v,v) \geq 0$ ozn. $T \geq 0$
- ujemnie określone, gdy $\forall_{v\in V\setminus\{0\}}$ $T(v,v) < 0$ ozn. $T < 0$
- ujemnie półokreślone, gdy $\forall_{v\in V} T(v,v) \leq 0$ ozn. $T \leq 0$.

Macierz symetryczna A jest diagonalizowalna i ma rzeczywiste wartości własne.

Jeżeli wszystkie są dodatnie, to $A > 0$

nieujemne $A \geq 0$

ujemne $A < 0$

niedodatnie $A \leq 0$.

Określoność A możemy badać przy pomocy kryterium Sylvestera:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Niech $d_1 = a_{11}$

$$d_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$d_3 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$\vdots$

aż do $d_n = \det A$.

Jeżeli dla $k = 1, 2, \ldots, n$ $d_k > 0$, to $A > 0$

$d_k \geq 0$, to $A \geq 0$

$(-1)^k d_k > 0$, to $A < 0$

$(-1)^k d_k \geq 0$, to $A \leq 0$.

Wnioski z wzoru Taylora

Warunki konieczne i dostateczne istnienia ekstremum lokalnego:

Twierdzenie (warunek konieczny). Niech $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. Załóżmy, że $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ ma w $a \in \mathcal{U}$

a) minimum lokalne b) maksimum lokalne

oraz że f jest dwukrotnie różniczkowalna w a.

Wówczas a) $D^2 f(a) \geq 0$ b) $D^2 f(a) \leq 0$

Dowód: a)

Z tw. Fermata $Df(a) = 0$. Postępując jak w pierwszym podejściu do dowodu wzoru Taylora, ustalamy $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ i kładziemy $g(t) = f(a+tv)$.

Wtedy

$$\begin{aligned} f(a+tv) &= g(t) = g(0) + g'(0)\,t + g''(0)\frac{t^2}{2} + r(t) \\ &= f(a) + t\underbrace{Df(a)v}_{=0} + \frac{t^2}{2} D^2 f(a)(v,v) + r(t) \end{aligned}$$

skąd
$$D^2 f(a)(v,v) + 2\frac{r(t)}{t^2} = 2\,\frac{f(a+tv)-f(a)}{t^2},$$

gdzie o $r(t)$ wiemy, że $r(0) = 0 = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{r(t)}{t^2}$.

Gdyby $D^2 f(a)(v,v) < 0$, to istniałoby $\delta > 0$ takie, że
$$\forall_{t \in (-\delta,\delta)} \quad \left|\frac{r(t)}{t^2}\right| < -\frac{1}{4} D^2 f(a)(v,v)$$

Wtedy

$$D^2f(a)(v,v) + 2\frac{r(t)}{t^2} < D^2f(a)(v,v) - 2\frac{1}{4}D^2f(a)(v,v) =$$

$$= \frac{1}{2}D^2f(a)(v,v) < 0, \text{ więc}$$

dla $t \in (-\delta,\delta)$ $\quad \dfrac{f(a+tv)-f(a)}{t^2} < 0 \iff f(a+tv) < f(a)$.

To przeczy założeniu, że f ma w a minimum lokalne.

Stąd $Df(a)(v,v) \geq 0$ – i jest tak dla dowolnego $v \in \mathbb{R}^n$, zatem $Df(a)$ jest dodatnio półokreślona.

b) dowodzi się dokładnie tak samo.

<u>Twierdzenie</u> (warunki dostateczne).

Niech $f \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ i załóżmy, że f ma w $a \in \mathcal{U}$ punkt krytyczny (czyli $Df(a) = 0$).

1) jeżeli $D^2f(a) > 0$, to f ma w a minimum lokalne właściwe

2) jeżeli $D^2f(x) \geq 0$ w pewnym otoczeniu punktu a, to f ma w a minimum lokalne

3) jeżeli $D^2f(a) < 0$, to f ma w a maksimum lokalne właściwe

4) jeżeli $D^2f(x) \leq 0$ w pewnym otoczeniu punktu a, to f ma w a maksimum lokalne.

Dowód (oczywiście wystarczy 1) i 2)).

1). Załóżmy, że $D^2f(a) > 0$, tzn. $\forall_{v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \; D^2f(a)(v,v) > 0$.

Funkcja
$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \Psi & & \Psi \\ v & \longmapsto & D^2f(a)(v,v) \end{array}$$
jest
- ciągła (jako wielomian kwadratowy od współrzędnych v)
- dodatnia.

Skoro jest ciągła, to przyjmuje na (zwartej) S^{n-1} swoje minimum: istnieje $v_0 \in \mathbb{R}^n$, $\|v_0\| = 1$ (tzn. $v_0 \in S^{n-1}$) takie, że $\forall_{v \in S^{n-1}}$
$$D^2f(a)(v,v) \geq \underbrace{D^2f(a)(v_0,v_0)}_{\text{oznaczmy to przez } \alpha \, (>0)} > 0$$

Niech $w \in \mathbb{R}^n$, $w \neq 0$. Wtedy
$$D^2f(a)(w,w) = D^2f(a)\Big(\underbrace{\tfrac{w}{\|w\|}}_{\in S^{n-1}}, \tfrac{w}{\|w\|}\Big)\|w\|^2 \geq \alpha \|w\|^2$$
(ten wzór zachodzi również dla $w = 0$).

Jeżeli $a+h \in U$, to z wzoru Taylora (i tw. Fermata)
$$f(a+h) - f(a) = \tfrac{1}{2} D^2f(a)(h,h) + R(h), \text{ gdzie } \frac{R(h)}{\|h\|^2} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

stąd istnieje $\delta > 0$ takie, że jeżeli $\|h\| < \delta$, to
$$\left|\frac{R(h)}{\|h\|^2}\right| < \frac{\alpha}{4} \quad \left(\text{czyli } |R(h)| < \frac{\alpha}{4}\|h\|^2\right)$$

Wtedy, dla $x \in B(a, \delta)$, biorąc $h = x - a$,
$$f(x) - f(a) = \tfrac{1}{2} D^2f(a)(h,h) + R(h) \geq \tfrac{1}{2} \alpha \|h\|^2 - \frac{\alpha}{4}\|h\|^2$$
$$= \tfrac{1}{4} \alpha \|h\|^2$$

więc $f(x)-f(a)>0$, o ile tylko $x\neq 0$. To znaczy, że f ma w a minimum lokalne właściwe

2) Wykorzystamy obserwację z pierwszego podejścia do wzoru Taylora:

Jeżeli $f\in C^2(\mathcal{U},\mathbb{R})$ i h jest takie, że $[a,a+h]\subset\mathcal{U}$, to istnieje $\theta\in[0,1]$ takie, że

$$f(a+h)=f(a)+Df(a)h+\frac{1}{2}D^2f(a+\theta h)(h,h)$$

Niech $\delta>0$ będzie takie, że $B(a,\delta)\subset\mathcal{U}$, i dla wszystkich $x\in B(a,\delta)$ $D^2f(x)\geq 0$.

Wiemy, że $Df(a)=0$. Stąd, dla $x\in B(a,\delta)$ i $h=x-a$,

$$f(x)=f(a)+\underbrace{\frac{1}{2}D^2f(\underbrace{a+\theta h}_{\in B(a,\delta)})(h,h)}_{\geq 0 \text{ bo } D^2f(a+\theta h)\geq 0}\geq f(a)$$

więc f ma w a minimum lokalne (niekoniecznie właściwe).

3) jak 1), 4) jak 2).

Twierdzenie Niech $R > r > 0$.
Istnieje $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ taka, że $\forall_{x \in \mathbb{R}^n}\ \varphi(x) \geq 0$, $\varphi \equiv 1$ na $B(0,r)$ i $\varphi \equiv 0$ poza $B(0,R)$.

Dowód - konstrukcja

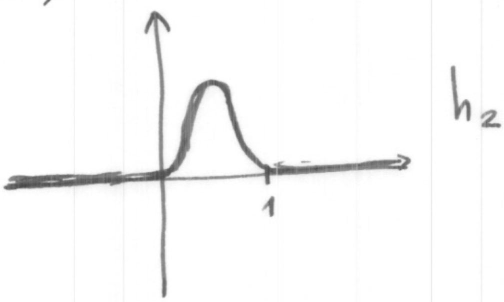
Niech $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h_1(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$.

Wiemy, że $h_1 \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$h_1 \geq 0$

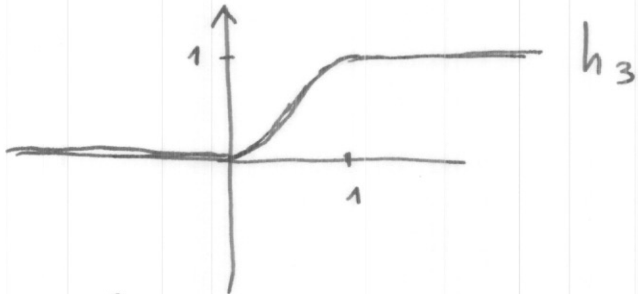
$h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h_2(t) = h_1(t)\, h_1(1-t)$

h_2 też jest C^∞, $h_2 \geq 0$
i $h_2 \equiv 0$ poza $[0,1]$.

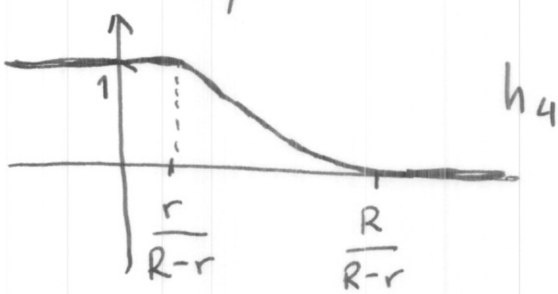


$h_3 \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$h_3(t) = \frac{\int_{-\infty}^{t} h_2(s)\,ds}{\int_{-\infty}^{\infty} h_2(s)\,ds}$$



$$h_4(t) = 1 - h_3\left(t - \frac{r}{R-r}\right)$$



i $\varphi(x) = h_4\left(\frac{|x|}{R-r}\right)$. Jeżeli $x \in B(0,r)$, to $|x| < r$, więc $\frac{|x|}{R-r} < \frac{r}{R-r}$ i $\varphi(x) = 1$. Gdy $x \notin B(0,R)$, to $|x| \geq R$ i $\varphi(x) = 0$. Dla $x \neq 0$ φ jest różniczkowalna ∞-wiele razy;

W otoczeniu $x=0$ (na kuli $B(0,r)$) funkcja φ jest stała, jest więc różniczkowalna ∞-wiele razy.

Kilka słów o notacji wielowskaźnikowej

Wiemy, że $D^2 f(a)(h,h) = (h_1, \dots, h_n) \left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{ij} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} =$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$$

analogicznie

$$D^3 f(a)(h,h,h) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} h_i h_j h_k \quad \text{itd. } (*)$$

Jeżeli f jest 3-krotnie różniczkowalna w a, to w powyższej sumie, dzięki tw. Schwarza, wiele wyrazów się powtarza:

$3! = 6$ wyrażeń

$$\frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} h_1 h_2 h_3 = \frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_3} h_2 h_1 h_3 = \dots$$

$$\frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_1^2 \partial x_2} h_1^2 h_2 = \frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1} h_1 h_2 h_1 = \frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_2 \partial x_1^2} h_2 h_1^2 \quad \text{3 wyrażenia}$$

Wygodniej byłoby uporządkować sumę $(*)$ ~~wg~~ grupując równe wyrazy.

$\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n \qquad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$

$\alpha! = \alpha_1! \, \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$

Gdy $h \in \mathbb{R}^n$, $h = (h_1, \ldots, h_n)$, to $h^\alpha = h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \ldots h_n^{\alpha_n}$

$$D^\alpha f(a) = \frac{\partial^{\overbrace{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}^{=|\alpha|}} f(a)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \, \partial^{\alpha_2} x_2 \cdot \ldots \cdot \partial^{\alpha_n} x_n}$$

Na przykład $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad \dfrac{\partial^3 f(a)}{\partial x_1^2 \partial x_2} = D^{(2,1,0,\ldots,0)} f(a)$

~~Ile wyrażeń zn~~ Oczywiście pochodna cząstkowa $D^\alpha f(a)$ jest pochodną rzędu $|\alpha|$.

$$D^k f(a)(h, \ldots, h) = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdot \ldots \cdot \partial x_{i_k}} h_{i_1} h_{i_2} \cdot \ldots \cdot h_{i_k}$$

Ile razy w powyższej sumie występuje $D^\alpha f(a) h^\alpha$?

wśród k liczb $i_1, \ldots, i_k$ α_1 razy ma wystąpić 1 $\quad \binom{k}{\alpha_1}$ możliwości wyboru

wśród $k - \alpha_1$ pozostałych α_2 razy ma wystąpić 2 $\quad \binom{k-\alpha_1}{\alpha_2}$

wśród $k - \alpha_1 - \ldots - \alpha_l$ $\quad \alpha_{l+1}$ razy ma wystąpić $l+1$ $\quad \binom{k - \alpha_1 - \ldots - \alpha_l}{\alpha_{l+1}}$

Na koniec, na pozostałych $k - \alpha_1 - \ldots - \alpha_{n-1} = \alpha_n$ miejscach kładziemy n $\quad 1 = \binom{k - \alpha_1 - \ldots - \alpha_{n-1}}{\alpha_n} = \binom{\alpha_n}{\alpha_n}$ możliwości.

stąd $D^\alpha f(a) h^\alpha$ występuje $\binom{k}{\alpha_1}\binom{k-\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \binom{k - \alpha_1 - \ldots - \alpha_{n-1}}{\alpha_n} = \dfrac{k!}{(k-\alpha_1)! \, \alpha_1!} \dfrac{(k-\alpha_1)!}{(k-\alpha_1-\alpha_2)! \, \alpha_2!} \cdot \ldots$

$$= \frac{k!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdot\ldots\cdot\alpha_n!} =: \cancel{\binom{k}{\alpha}} \frac{k!}{\alpha!}$$

więc

$$D^k f(a)\cancel{(h_1,\ldots,h_n)}(h,h,\ldots,h) = \sum_{|\alpha|=k} D^\alpha f(a)\cdot h^\alpha \cdot \frac{k!}{\alpha!}$$

i ostatecznie wzór Taylora można zapisać jako

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} D^k f(a)(h,h,\ldots,h) + R_m(h)$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha + R_m(h) = \sum_{|\alpha|\le k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha + R_m(h)$$

Zasada Banacha (Twierdzenie Banacha o punkcie stałym)

Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie domknięty i niepusty,
(niech A będzie przestrzenią metryczną zupełną)

$F : A \to A$ niech spełnia warunek Lipschitza

$$\forall_{x,y \in A} \quad \| F(x) - F(y) \| \leq L \, \| x - y \|$$

$$(d(F(x), F(y)) \leq L \, d(x,y))$$

ze stałą $L < 1$

przekształcenia spełniające ten warunek nazywamy **kontrakcjami** przestrzeni A

Wówczas F ma (dokładnie jeden) punkt stały w A, tzn. istnieje dokł. jedno $z \in A$ takie, że $F(z) = z$.

To jest przykład supertwierdzenia: proste sformułowanie, nietrudny - i do tego konstruktywny, tj dający przepis na szukanie punktu z - dowód i dziesiątki ważnych zastosowań.

Dowód

Krok 1 Ustalmy $x \in A$ i rozważmy zadany rekurencyjnie ciąg: $x_0 = x$, $x_1 = F(x_0) = F(x)$, $x_2 = F(x_1) = F(F(x))$ itd, $x_{m+1} = F(x_m)$.

Wykażemy, że ciąg (x_m) spełnia warunek Cauchy'ego.

Niech bowiem $d = \|x - F(x)\|$. Jeżeli $d=0$, to $x = F(x) = F(F(x)) = \dots$; ciąg (x_m) jest ciągiem stałym a x jest punktem stałym F.

Załóżmy, że $d > 0$.

$\|x_2 - x_1\| = \|F(x_1) - F(x_0)\| \leq L\|x_1 - x_0\| = L\|F(x) - x\| = Ld$

$\|x_3 - x_2\| = \|F(x_2) - F(x_1)\| \leq L\|x_2 - x_1\| \leq L^2 d$

i tak dalej, indukcyjnie dowodzimy, że

$\|x_{m+1} - x_m\| \leq L^m d$.

Stąd $\|x_{m+k} - x_m\| \overset{n.\Delta}{\leq} \|x_{m+k} - x_{m+k-1}\| + \|x_{m+k-1} - x_{m+k-2}\| + \dots$

$\dots + \|x_{m+1} - x_m\| \leq (L^{m+k-1} + L^{m+k-2} + \dots + L^m)d$

$$\leq (L^m + L^{m+1} + \dots)d = \underbrace{\frac{L^m}{1-L} d}$$

to dla dużych m jest bardzo małe; dla ustalonego $\varepsilon > 0$ jeżeli $m > \log_L\left(\frac{\varepsilon}{d}(1-L)\right)$, to $\frac{L^m}{1-L} d < \varepsilon$.

to jest właśnie warunek Cauchy'ego dla (x_m).

Wiemy zatem, że ciąg (x_m) ma granicę w $\mathbb{R}^n$, a że A jest domknięty, to $z_x = \lim_{m\to\infty} x_m \in A$.

<u>Krok 2</u>

Wartość z_x nie zależy od x z którego startowaliśmy.

Niech bowiem (x_m) będzie dany jako

$$\begin{cases} x_0 = x \\ x_{m+1} = F(x_m) \end{cases} \quad \text{a } (y_m) \text{ jako } \begin{cases} y_0 = y \\ y_{m+1} = F(y_m). \end{cases}$$

Oznaczmy $z_x = \lim\limits_{m\to\infty} x_m$, $z_y = \lim\limits_{m\to\infty} y_m$.

Mamy

$$\|z_x - z_y\| = \|\lim_{m\to\infty} x_m - \lim_{m\to\infty} y_m\| = \|\lim_{m\to\infty}(x_m - y_m)\| =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \|x_m - y_m\| = \lim_{m\to\infty} \|F(x_{m-1}) - F(y_{m-1})\|$$

a ale $\|F(x_{m-1}) - F(y_{m-1})\| \le L\|x_{m-1} - y_{m-1}\| \longrightarrow L\|z_x - z_y\|$

skąd

$$\|z_x - z_y\| \le L\|z_x - z_y\|.$$

Skoro $L<1$, to $\|z_x - z_y\| = 0$, czyli $z_x = z_y$.

Krok 3

Niech więc $z = \lim\limits_{m\to\infty} x_m$. Wykażemy, że $F(z) = z$. Mamy bowiem

$$\begin{array}{c} F(x_m) = x_{m+1} \xrightarrow[m\to\infty]{} z \\ \Big\downarrow \text{ z ciągłości } F \\ F(z) \end{array}$$

Krok 4 Pozostało wykazać, że z jest jedynym punktem stałym F.

Załóżmy, że dla pewnego $w \in A$ $F(w) = w$.

$\|z - w\| = \|F(z) - F(w)\| \le L\|z - w\|$. Skoro $L<1$, to $\|z-w\| = 0$, czyli $z = w$.

$\square$

Uwaga:

Nie wystarczy założyć, że $\forall_{\substack{x,y\in A\\ x\neq y}} \|F(x)-F(y)\| < \|x-y\|$

Niech $A = [0,\infty)$

$f(t) = t + \frac{1}{t+1}$. f nie ma punktu stałego w A (dlaczego?)

choć

$|f(x)-f(y)| = |f'(\xi)||x-y|$ dla pewnego ξ między x a y

$= \left|1-\frac{1}{\xi+1}\right||x-y| < |x-y|$

A gdyby A było zwartym podzbiorem $\mathbb{R}$?

A gdyby A było odcinkiem obmkniętym?

Twierdzenie: $A \subset \mathbb{R}^n$ domknięty, niepusty

Jeżeli F_1 i $F_2 : A \to A$ są kontrakcjami

i $\sup_{x\in A} \|F_1(x)-F_2(x)\| < \varepsilon$, to punkty stałe

z_1 przekształcenia F_1

i z_2 przekształcenia F_2

spełniają $\|z_1 - z_2\| \le \frac{\varepsilon}{1-\lambda}$, gdzie λ jest stałą Lipschitza którejś z funkcji F_1 i F_2. (dla ustalenia uwagi F_2)

Dowód $\|z_1-z_2\| = \|F_1(z_1) - F_2(z_2)\| \le \|F_1(z_1) - F_2(z_1)\| +$

$+ \|F_2(z_1) - F_2(z_2)\| \le \varepsilon + \lambda \|z_1 - z_2\|$, skąd od razu

dostajemy tezę. $\square$

Twierdzenie o lokalnej odwracalności

Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwarty, $f : C^1(A, \mathbb{R}^n)$.

Załóżmy, że dla pewnego $a \in A$ $Df(a) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ jest izomorfizmem liniowym (a więc macierz Jacobiego funkcji f w a jest odwracalna).

Wówczas istnieje $\delta > 0$ i $V \subset \mathbb{R}^n$ otwarte takie, że

1) $f : B(a, \delta) \to V$ jest bijekcją
2) $g = f^{-1} : V \to B(a, \delta)$ jest na V klasy C^1
3) jeżeli $\underset{\in V}{y} = f(x)$ i $x \in B(a, \delta)$, to $Dg(y) = (Df(x))^{-1}$

Dowód

Przez większość dowodu zajmować się będziemy szczególnym przypadkiem; dla uniknięcia konfuzji zamiast f rozważać będę funkcję F, określoną na $\underset{\text{otwartym}}{\tilde{A} \subset \mathbb{R}^n}$ takim, że $0 \in \tilde{A}$;

$F(0) = 0$, $DF(0) = \mathrm{Id}$.

Wykażemy, że istnieją $\delta > 0$ i $\underset{\text{otwarte}}{\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n}$ takie, że

1') $F : B(0, \delta) \to \tilde{V}$ jest bijekcją
2') $G = F^{-1} : \tilde{V} \to B(0, \delta)$ jest klasy C^1

oraz 3') jeżeli $\underset{\in \tilde{V}}{y} = F(x)$ i $x \in B(0, \delta)$, to $DG(y) = (DF(x))^{-1}$

Lemacik z GALu

Jeżeli $T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ i $|||T||| < 1$, to $\mathrm{Id}+T$ jest izomorfizmem liniowym.

Dowód Wystarczy wykazać, że $\ker(\mathrm{Id}+T) = \{0\}$ (homomorfizm liniowy z $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^n$ jest izomorfizmem $\Leftrightarrow$ ma trywialne jądro).

Załóżmy przeciwnie - że istnieje $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tż $(\mathrm{Id}+T)v = 0$. Wtedy $Tv = -v$, więc

$$\underbrace{\|-v\|}_{=\|v\|} = \|Tv\| \le |||T|||\,\|v\| < \|v\| \quad ⚡ \text{ sprzeczność.}$$

Krok 1

Niech $\varphi(x) = F(x) - x$. Wiemy, że $\varphi \in C^1(\tilde{A}, \mathbb{R}^n)$, $\varphi(0) = 0$, $D\varphi(x) = DF(x) - \mathrm{Id} \Rightarrow D\varphi(0) = 0$.

Istnieje więc $\delta_1 > 0$ taka, że na kuli $\overline{B}(0, 2\delta_1)$ mamy $|||D\varphi(x)||| < \frac{1}{2}$ (bo funkcja $x \mapsto |||D\varphi(x)|||$ jest ciągła). Możemy założyć (ew. zmniejszając δ_1), że $\overline{B}(0, 2\delta_1) \subset \tilde{A}$.

Z Lemacika widzimy od razu, że $DF(x) = \mathrm{Id} + D\varphi(x)$ jest izomorfizmem nie tylko dla $x = 0$, ale i dla wszystkich $x \in \overline{B}(0, 2\delta_1)$.

Co więcej, z tw. o wartości średniej, $\forall_{x,y \in \overline{B}(0,2\delta_1)}$

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \le \|x-y\| \sup_{z \in (x,y)} |||D\varphi(z)||| \le \frac{1}{2}\|x-y\| \quad ☺$$

więc $\|F(x)-F(y)\| = \|(x-y)+(\varphi(x)-\varphi(y))\| \geq \|x-y\| - \|\varphi(x)-\varphi(y)\|$
$\geq \frac{1}{2}\|x-y\|$.

Ta nierówność dowodzi dwóch rzeczy.

- po pierwsze, F jest na $\overline{B}(0,2\delta_1)$ różnowartościowa, jest więc bijekcją między $\overline{B}(0,2\delta_1)$ a $F(\overline{B}(0,2\delta_1))$
- po drugie, $G: F(\overline{B}(0,2\delta_1)) \to \overline{B}(0,2\delta_1)$ spełnia na $F(B(0,2\delta_1))$ warunek Lipschitza ze stałą 2 (wystarczy przyjąć $x=G(u)$, $y=G(v)$, $u=F(x)$, $v=F(y)$ w nierówności), jest więc ciągła. (na $F(\overline{B}(0,2\delta_1))$, a więc i na $F(B(0,2\delta_1))$.

<u>Kłopot</u>: o zbiorze $F(\dot{B}(0,2\delta_1))$ niewiele wiemy. Czy jest otwarty? Czy w ogóle zawiera jakiś zbiór otwarty, który mógłby być kandydatem na $\tilde{V}$?

W takim razie spróbujmy inaczej.

<u>Krok 2</u>

Wykażemy, że ~~dla $x \in \overline{B}(0,\delta_1)$~~ znajdziemy funkcję $\psi: \overline{B}(0,\delta_1) \to \overline{B}(0,\delta_1)$ ciągłą i taką, że dla wszystkich $x \in \overline{B}(0,\delta_1)$ zachodzi równość

~~Własności 2') i 3') wynikają teraz, dla~~

$$F(x+\psi(x)) = x$$ } istnienie ψ wykażemy w Kroku 3.

Jeżeli uda nam się znaleźć taką funkcję ψ, to •) funkcja G dla $x\in\overline{B}(0,\delta_1)$ dana będzie wzorem $G(x) = x+\psi(x)$

••) jeżeli $x\in B(0,\delta_1)$, to $x+\psi(x)\in \underbrace{B(0,\delta_1)+\overline{B}(0,\delta_1)}_{\subset B(0,2\delta_1)}$

Stąd $\forall_{x\in B(0,\delta_1)} \quad x = F(x+\psi(x)) \in F(B(0,2\delta_1))$

cyli $B(0,\delta_1)\subset F(B(0,2\delta_1))$,

a więc $F(B(0,2\delta_1))$ zawiera zbiór otwarty $B(0,\delta_1)$.

Zbiór $F^{-1}(B(0,\delta_1))$ jest otwarty (przeciwobraz zbioru otwartego w przekszt. ciągłym ~~z~~) i zawiera 0, więc istnieje $\delta>0$ takie, że $B(0,\delta)\subset F^{-1}(B(0,\delta_1))$. Funkcja G jest ciągła na $F(B(0,2\delta_1))$; $G^{-1}(B(0,\delta))$ jest otwarty - możemy go oznaczyć przez V. Wtedy

$F: B(0,\delta)\to F(B(0,\delta)) = G^{-1}(B(0,\delta)) = V$

jest bijekcją (bo $B(0,\delta)\subset B(0,2\delta_1)$,

$V\subset \cancel{F}(\overline{B}(0,\delta_1)\subset F(B(0,2\delta_1)))$).

Własności 2' i 3' wynikają teraz z tw. o pochodnej funkcji odwrotnej i z tego, że przekształcenie $M^{n\times n} \ni T \longrightarrow T^{-1} \in M^{n\times n}$ jest ciągłe w pobliżu macierzy Id.

No to <u>Krok 3</u>

Zauważmy, że równość $F(x+\psi(x)) = x$ jest równoważna równości

$$x + \psi(x) + \varphi(x+\psi(x)) = x$$

czyli $\psi(x) = -\varphi(x+\psi(x))$.

Ustalmy $x \in \overline{B}(0,\delta_1)$ i niech $T_x(z) = -\varphi(x+z)$

Dla $z \in \overline{B}(0,\delta_1)$ mamy

$$\|T_x(z)\| = \|\varphi(\underbrace{x+z}_{\in \overline{B}(0,2\delta_1)})\| = \|\varphi(x+z) - \varphi(0)\| \leq \frac{1}{2}\|x+z\| \leq \delta_1$$

więc $T_x : \overline{B}(0,\delta_1) \longrightarrow \overline{B}(0,\delta_1)$

Analogicznie, dla $z_1, z_2 \in \overline{B}(0,\delta_1)$

$$\|T_x(z_1) - T_x(z_2)\| = \|\varphi(x+z_1) - \varphi(x+z_2)\| \leq \frac{1}{2}\|z_1 - z_2\|,$$

co dowodzi, że T_x jest kontrakcją.

Stąd T_x ma w $\overline{B}(0,\delta_1)$ punkt stały;

definiujemy $\psi(x) =$ punkt stały T_x.

Z twierdzenia, które udowodniliśmy zaraz po zasadzie Banacha widzimy, że

143 dla $x, y \in \overline{B}(0,\delta_1)$

$$\|\psi(x)-\psi(y)\| \le \frac{\sup\limits_{z\in\overline{B}(0,\delta_1)} \|T_x(z)-T_y(z)\|}{1-\frac{1}{2}} =$$

$$= 2 \sup_{z\in\overline{B}(0,\delta_1)} \|\varphi(x+z)-\varphi(y+z)\| \overset{☺}{\le} 2\cdot\frac{1}{2}\|x-y\| = \|x-y\|.$$

Stąd ψ spełnia war. Lipschitza ze stałą 1, jest więc ciągła na $\overline{B}(0,\delta_1)$.

To jednak i tak już wiemy: z uwag w Kroku 2 widzimy, że $\overline{B}(0,\delta_1)$ jest zawarte w $F(\overline{B}(0,2\delta_1))$ (wymaga to podopisywania domknięć nad tymi kulami w $\bullet\bullet$), które ich nie mają), a na $F(\overline{B}(0,2\delta_1))$ funkcja G, więc i ψ, są ciągłe.

Pozostał ostatni <u>Krok 4</u> przejście od ogólnej sytuacji do szczególnego przypadku.

Niech f spełnia założenia twierdzenia.

Niech teraz $\tilde{A} = A - a$, $F: \tilde{A} \to \mathbb{R}^n$ zaś niech będzie dane wzorem

$$F(x) = Df(a)^{-1}(f(x+a)-f(a)) \; **$$

Wtedy $F(0)=0$, $DF(0) = Id$, istnieje zatem $\delta>0$ i $\tilde{V}\subset\mathbb{R}^n$ otwarty taki, że $F: B(0,\delta)\to\tilde{V}$ jest bijekcją itd. i istnieje $G = F^{-1}$ klasy $C^1(\tilde{V}, B(0,\delta))$

Wtedy ~~dla~~

$$f^{-1}(y) = g(y) = G(Df(a)^{-1}(y - f(a)) + a$$

Pozostaje jeszcze pytanie, gdzie są określone f i g.

Jeżeli $F: B(0,\delta) \to \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$, to

$$f(z) = Df(a)F(z-a) + f(a)$$

i f jest złożeniem przesunięcia (o a), funkcji F, ustalonego przekształcenia liniowego $Df(a)$, które jest izomorfizmem, i kolejnego przesunięcia (o $f(a)$).

~~Tak jak~~ Przesunięcia jedynie przesuwają dziedzinę funkcji, więc f jest określona (i jest bijekcją) na $B(a,\delta)$. Za to obrazem $B(a,\delta)$ jest

$$V = Df(a)(\tilde{V} + a) + f(a)$$

Szczęśliwie izomorfizm liniowy $Df(a)$ przekształca zbiory otwarte na otwarte (dlaczego?), podobnie przesunięcia, więc i V jest otwarty.

145/ Nietrudno sprawdzić, że spełnia tezę twierdzenia.

Twierdzenie o funkcji uwikłanej

Niech $\mathcal{U} \subset \overset{x}{\mathbb{R}^n} \times \overset{y}{\mathbb{R}^m}$ będzie otwarty,

$F \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$.

Jak już wspominałem, $DF(x,y)$ (a dokładniej macierz tej różniczki) można wówczas zapisać jako

$$\Big(\underbrace{D_x F(x,y)}_{\text{pochodne cząstkowe po zmiennych } x},\ \underbrace{D_y F(x,y)}_{\text{pochodne cząstkowe po zmiennych } y.}\Big)$$

Załóżmy, że dla pewnego $(\underset{\mathbb{R}^n}{a}, \underset{\mathbb{R}^m}{b}) \in \mathcal{U}$

mamy $F(a,b) = 0$

oraz że macierz $\underbrace{D_y F(a,b)}_{m}\big\updownarrow m$ jest odwracalna.

Istnieją wówczas zbiory otwarte $V \subset \mathbb{R}^n$ i $W \subset \mathbb{R}^m$

i $h \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ taka, że dla $(x,y) \in V \times W$

mamy $F(x,y) = 0 \iff y = h(x)$.

Dowód TFU

Przypomnienie:

Twierdzenie o lokalnej odwracalności jest szczególnym przypadkiem twierdzenia o funkcji uwikłanej, gdy $n = 0$.

Pokażemy teraz, jak łatwo można przejść w drugą stronę, ~~od tw. o~~ dowodząc TFU przy pomocy twierdzenia o lokalnej odwracalności.

Rozważmy $H : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

$$H(x) = (x, F(x,y))$$

Oczywiście $H \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$

$$DH(x,y) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ D_x F(x,y) & D_y F(x,y) \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \updownarrow n \\ \updownarrow m \end{array} \\ \begin{array}{cc} \quad\longleftrightarrow n \quad & \quad \longleftrightarrow m \end{array} & \end{array}$$

Z założeń TFU wiemy, że macierz $D_y F(a,b)$ jest odwracalna. Stąd również $DH(a,b)$ jest odwracalna (bo np. $\det DH(a,b) = \det(\mathrm{Id}) \cdot \det D_y F(x,y)$
$= \det D_y F(x,y) \neq 0$.)

Stąd dalej, z tw. o lokalnej odwracalności, istnieje $r>0$, $\tilde{W} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ otwarty i $G = H^{-1} : \tilde{W} \to B((a,b), r)$ jest odwracalna klasy C^1. Co więcej, $D_y F(x,y)$ jest odwracalna dla $(x,y) \in B((a,b), r)$.

147 To już prawie koniec dowodu, musimy to tylko zauważyć.

$G : \tilde{W} \to B((a,b),r) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$,

niech więc $G(x,y) = (\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{G_1(x,y)}}, \underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\cap}{G_2(x,y)}})$

Wtedy, dla $(x,y) \in \tilde{W}$,

$(x,y) = H(G(x,y)) = (G_1(x,y), F(G_1(x,y), G_2(x,y)))$

Stąd od razu widać, że $G_1(x,y) = x$,

zaś $F(x, G_2(x,y)) = F(G_1(x,y), G_2(x,y)) = y$. ☆

Załóżmy teraz, że dla pewnych $(x,y) \in B((a,b),r)$ mamy $F(x,y) = 0$, a więc równoważnie

$$H(x,y) = (x, F(x,y)) = (x,0).$$

$$(x,y) = G(H(x,y)) = G(x,0) = (G_1(x,0), G_2(x,0)) = (x, G_2(x,0))$$

skąd $y = G_2(x,0)$.

Jest też odwrotnie: jeżeli $y = G_2(x,0)$, to

$F(x,y) = F(x, G_2(x,0)) = 0$ (z ☆), a zatem

dla $(x,y) \in B((a,b),r)$ $\quad F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = G_2(x,0)$

Funkcja G jest klasy C^1 na $\tilde{W}$, więc $h(x) = G_2(x,0)$ też jest klasy C^1.

Pozostaje drobny detal: $B((a,b),r)$ nie jest obiecanej postaci $V\times W$, gdzie V i W są otwarte. Wystarczy jednak wziąć

$$W = B(b, r/2), \quad V = h^{-1}(W)\cap B(a, r/2)$$

i już $h(V)\subset W$, $V\times W\subset B((a,b),r)$

Oczywiście V i W są otwarte (W z definicji, V jako część wspólna dwóch zbiorów otwartych; h jest ciągła, więc $h^{-1}(W)$ jest otwarty). □

~~Jak~~ Wiemy, że h jest klasy C^1. A jaka jest jej pochodna? Tę możemy otrzymać z prostego rachunku:

Dla $x\in V$ $\quad F(x, h(x)) = 0$ $\quad$ różniczkujemy stronami po x

$$\cancel{\langle D_x F(x,h(x)),(id, Dh(x))\rangle =}$$

$$=\cancel{D_x F\langle}\ 0 = DF(x,h(x))\cdot(id, Dh(x)) =$$

$$= \langle (D_x F(x,h(x)), D_y F(x,h(x))), (id, Dh(x))\rangle$$

$$= D_x F(x,h(x)) + D_y F(x,h(x))\, Dh(x)$$

skąd $\quad Dh(x) = -\left(D_y F(x,h(x))\right)^{-1} D_x F(x,h(x)).$