76)

<u>Twierdzenie</u> (o pochodnej funkcji odwrotnej)

Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwarty,

$f : U \to \mathbb{R}^n$ różniczkowalna w $a \in U$

i $Df(a)$ jest izomorfizmem liniowym

f jest różnowartościowa, $f(U) \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty

i $f^{-1} : f(U) \to \mathbb{R}^n$ jest ciągła w $f(a)$.

Wówczas f^{-1} jest różniczkowalna w $f(a)$

i $D(f^{-1})(f(a)) = (Df(a))^{-1}$.

<u>Dowód:</u> W zasadzie ten sam, co dla $n=1$:

Niech $H = \cancel{f(a+h} \; f(a+h) - f(a)$.

Oczywiście $\lim_{h \to 0} H = 0$, bo f jest ciągła w a, mamy też

$H = 0 \iff h = 0$. Mamy też, jak łatwo sprawdzić,

$h = f^{-1}(f(a)+H) - f^{-1}(f(a))$

i z ciągłości f^{-1} w w $f(a)$ $\lim_{H \to 0} h = 0$.

Stąd $h \to 0 \iff H \to 0$.

Aby wykazać, że f^{-1} jest różniczkowalna

w $f(a)$ i $D(f^{-1})(f(a)) = (Df(a))^{-1}$, musimy

sprawdzić, czy

$$\star = \frac{f^{-1}(f(a)+H) - f^{-1}(f(a)) - (Df(a))^{-1} H}{\|H\|} \xrightarrow[H \to 0]{?} 0.$$

17)

Mamy $\star = \dfrac{h+a-a-(Df(a))^{-1}(f(a+h)-f(a))}{\|f(a+h)-f(a)\|} =$

$$= \frac{h - Df(a)^{-1}(Df(a)h + \|h\|r(h))}{\|Df(a)h + \|h\|r(h)\|} =$$

$$= \frac{\cancel{\|h\|}\, Df(a)^{-1} r(h)}{\|Df(a)\frac{h}{\|h\|} + r(h)\|}$$

licznik ~~dąży~~ dąży do 0, a mianownik jest od niego oddzielony, bo ~~dąży~~ do

$$\|Df(a)\frac{h}{\|h\|}\| \geq \min_{v\in S(0,1)} \|Df(a)v\|$$

$$\|$$

$$\frac{1}{\|Df(a)^{-1}\|}$$

78)

Lemat Fermata Niech $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ otwarty.

Jeżeli $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ ma w $x \in \mathcal{U}$ ekstremum lokalne, to $Df(x) = 0$.

Dowód

$Df(x) = 0$ oznacza, że $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$ dla $i = 1, 2, \dots n$.

Jeżeli f ma w x ekstremum lokalne, to każda z funkcji

$$F_i(t) = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

ma w $t = x_i$ ekstremum lokalne.

Stąd (z 1-wym. lematu Fermata)

$$F_i'(x_i) = 0$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \end{array}$$

$\square$.

79)

Dla przekształceń $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ trudno mówić o ekstremach lokalnych (do tego potrzebny jest porządek w ~~dziedzinie~~ przeciwdziedzinie), ale przydaje się następujące uogólnienie:

Def: Niech $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{U} \overset{\text{otw.}}{\subset} \mathbb{R}^n$, będzie różniczkowalna. Mówimy, że $x \in \mathcal{U}$ jest punktem krytycznym funkcji f, gdy macierz $Df(x)$ ma niemaksymalny rząd.

Niemaksymalny, tzn. jaki? $Df(x) \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, więc macierz $Df(x)$ jest macierzą $n \times m$. Stąd x jest punktem krytycznym gdy $\operatorname{rank} Df(x) < \min(n, m)$.

Wniosek: Gdy $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, jest różniczkowalna, to x jest punktem kryt. $f \iff Df(x) = 0$.

Wniosek z wniosku i tw. Fermata:
Jeżeli $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ ma w x ekstremum lokalne i f jest różniczkowalna w x, to x jest punktem krytycznym f.

Oczywiście odwrotnie być nie musi; znamy to zjawisko już z funkcji jednej zmiennej: $f(x)=x^3$, jedynym punktem krytycznym f jest $x=0$ (bo $Df(x)=f'(x)=3x^2$), ale w $x=0$ f nie ma ekstremum lokalnego.

Podobna sytuacja jest z funkcją $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=xy$.

Oczywiście $Df(x,y)=(y,x)$ ma rząd niemaksymalny wtedy i tylko wtedy, gdy ma rząd 0, a więc gdy $(x,y)=(0,0)$. Z drugiej strony dowolnie blisko $(0,0)$ są punkty, w których f przyjmuje wartości dodatnie (a więc większe niż $f(0,0)=0$), jak i punkty, w których f przyjmuje wartości ujemne (mniejsze niż $f(0,0)$), zatem f nie ma w $(0,0)$ ~~punkt~~ ekstremum lokalnego.

Warto pamiętać, że nasza wyobraźnia, wytrenowana na funkcjach jednej zmiennej, może nas zawodzić w przypadku funkcji choćby tylko dwóch zmiennych. W skrypcie prof. Pawła Strzeleckiego znajdą Państwo starannie obejrzane, przeliczone i narysowane przykłady funkcji, ~~które mają~~ $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, które mają na $\mathbb{R}^2$ dokładnie jeden punkt krytyczny, mają w nim

81) ekstremum lokalne, ale mimo to nie jest ono ekstremum globalnym. Co gorsza, oba te przykłady to funkcje nieograniczone na $\mathbb{R}^2$ ani z góry, ani z dołu! (patrz Przykład 2.28).

Definicja

Niech $f: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ różniczkowalna w $x \in \mathcal{U}$. Gradientem f w $x \in \mathcal{U}$ nazywamy wektor

$$\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

Uwaga:

Dla każdego $h \in \mathbb{R}^n$

$$Df(x)h = \langle \nabla f(x), h \rangle$$

$Df(x) \leftarrow$ przekształcenie liniowe (funkcjonał)

$Df(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, więc $Df(x) \in (\mathbb{R}^n)^*$

$\nabla f(x) \leftarrow$ wektor, element $\mathbb{R}^n$.

Podstawowa własność gradientu

Gradient wskazuje kierunek najszybszego wzrostu f.

Twierdzenie: ~~Niech~~ $\cancel{v = \nabla f(x)}$, ~~Załóżmy~~, ~~że~~ ~~v~~ Załóżmy, że $\nabla f(x) \neq 0$.

Niech $v = \nabla f(x)$. Wówczas dla każdego $w \in \mathbb{R}^n$ t.ż. $\|w\| = \|v\|$ zachodzi nierówność

$$D_w f(x) \leq D_v f(x).$$

i równość zachodzi tylko dla $w = v$.

Dowód

$$D_w f(x) = Df(x)w = \langle \nabla f(x), w \rangle = \langle v, w \rangle \overset{\text{n. Schw.}}{\leq} \|v\| \, \|w\| = \|v\|^2 = \langle v, v \rangle =$$

$$= \langle \nabla f(x), v \rangle = D_v f(x)$$

W nier. Schwarza równość zachodzi tylko, gdy wektory v i w są równoległe, a więc $w = \lambda v$. Równość $\|v\| = \|w\|$ oznacza $\lambda = \pm 1$, ale dla $\lambda = -1$ mamy $\langle v, w \rangle = -\|v\|^2 < \|v\|^2$

Stąd $\lambda = 1$ i $v = w$.

<u>Def</u>: Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ i niech $a \in A$ będzie punktem skupienia zbioru A.
Mówimy, że wektor $\overset{0}{\ast}v \in \mathbb{R}^n$ jest <u>styczny</u> do A w punkcie a, gdy istnieje ciąg punktów $p_m \in A \setminus \{a\}$ takich, że $p_m \xrightarrow[m\to\infty]{} a$ oraz

$$\lim_{m\to\infty} \frac{p_m - a}{\|p_m - a\|} = \frac{v}{\|v\|}.$$

Ustalamy też, że wektor zerowy jest styczny do A w dowolnym punkcie ~~skupienia~~ zbioru A.

<u>Uwaga</u>: Wprost z definicji widzimy, że jeżeli v jest styczny do A w a i $t \geq 0$, to wektor tv też jest styczny do A w a.

<u>Def</u>. Zbiór wszystkich wektorów stycznych do A w a nazywamy <u>stożkiem stycznym</u> (do A w a) i oznaczamy $T_a A$.

85)

<u>Twierdzenie</u>: Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, a $f : U \to \mathbb{R}$ niech będzie ciągła w $a \in U$.

Wówczas następujące warunki są równoważne

1) f jest różniczkowalna w a

2) stożek styczny do wykresu funkcji f w punkcie $(a, f(a))$ jest n-wymiarową podprzestrzenią liniową nie zawierającą wektora $(0,0,\dots,0,1)$.

<u>Dowód</u>

1) $\Rightarrow$ 2)

Wykażemy, że jeżeli f jest różniczkowalna w $a \in U$, ~~to~~ a $G_f = \{(x, f(x)) \in U \times \mathbb{R}\}$ jest wykresem funkcji f, to

$$T_{(a,f(a))} G_f = \{(v, Df(a)v) : v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Wtedy $T_{(a,f(a))} G_f$ jest obrazem przestrzeni $\mathbb{R}^n$ w przekształceniu liniowym $(id, Df(a)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, które ewidentnie jest rzędu n, więc $T_{(a,f(a))} G_f$ jest podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^{n+1}$! (inna interpretacja: $T_{(a,f(a))} G_f$ jest wykresem funkcji liniowej $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$). Widać też, że $(0,0,\dots,0,1)$ do tej podprzestrzeni nie należy (nie jest postaci $(v, Df(a)v)$).

Aby to wykazać, musimy sprawdzić dwie rzeczy:

(•) – że każdy wektor postaci $(v, Df(a)v)$ leży w stożku $T_{(a,f(a))}G_f$

oraz

(••) – że każdy wektor styczny do ~~$T_{(a,f(a))}$~~ G_f w $(a, f(a))$ jest postaci $(v, Df(a)v)$ dla pewnego $v \in \mathbb{R}^n$.

(•) Niech $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Zbiór $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty, istnieje więc $r > 0$ tż $B(a, \varrho) \subset \mathcal{U}$.

Niech $p_n = a + \frac{\varrho}{2n} v$. Oczywiście $p_n \in B(a, \varrho) \subset \mathcal{U}$.

Punkty $q_n = (p_n, f(p_n))$ należą zatem do G_f i, dzięki ciągłości f w a, $q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} (a, f(a))$

~~Stąd zjeżeli~~

Zbadajmy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q_n - (a, f(a))}{\|q_n - (a, f(a))\|}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n - (a, f(a))}{\|q_n - (a, f(a))\|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\varrho}{2n} v, f(a + \frac{\varrho}{2n} v) - f(a)\right)}{\left\|\left(\frac{\varrho}{2n} v, f(a + \frac{\varrho}{2n} v) - f(a)\right)\right\|} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\varrho}{2n} v, Df(a)\frac{\varrho}{2n} v + \|\frac{\varrho}{2n} v\| r(\frac{\varrho}{2n} v)\right)}{\left\|\left(\frac{\varrho}{2n} v, Df(a)\frac{\varrho}{2n} v + \|\frac{\varrho}{2n} v\| r(\frac{\varrho}{2n} v)\right)\right\|} =$$

87)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(v, Df(a)v + \|v\| r(\frac{\rho}{2n}v))}{\|(v, Df(a)v + \|v\| r(\frac{\rho}{2n}v))\|} = \frac{(v, Df(a)v)}{\|(v, Df(a)v)\|},$$

bo $r(\frac{\rho}{2n}v) \xrightarrow[n\to\infty]{} r(0) = 0$ $\Big\{$ z różniczkowalności f w a

To dowodzi, że $(v, Df(a)v) \in T_{(a,f(a))} G_f$ dla każdego niezerowego $v \in \mathbb{R}^n$. Oczywiście dla $v = 0$ $(v, Df(a)v) = (0,0)$ jest styczny do G_f w każdym punkcie.

(⋅⋅) Niech $q_m = (p_m, f(p_m))$ będzie ciągiem punktów z G_f takim, że $q_m \xrightarrow[m\to\infty]{} (a, f(a))$. (oczywiście wtedy $p_m \xrightarrow[m\to\infty]{} a$).

Załóżmy, że

$$\frac{q_m - (a, f(a))}{\|q_m - (a, f(a))\|} \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{(v,s)}{\|(v,s)\|} = (w,t).$$

dla pewnego niezerowego wektora $(v,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Wykażemy, że wówczas ~~(v,s) ∈ ...~~ $s = Df(a)v$ (co, jak łatwo sprawdzić dzieląc obie strony równości przez $\|(v,s)\|$, jest równoważne $t = Df(a)w$).

Oznaczmy $\lambda_m = \|q_m - (a, f(a))\| = \sqrt{\|p_m - a\|^2 + (f(p_m) - f(a))^2}$

$$|Df(a)w - t| = \lim_{m\to\infty} \left| Df(a)\frac{p_m - a}{\lambda_m} - \frac{f(p_m)-f(a)}{\lambda_m}\right|$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\lambda_m} |f(p_m) - f(a) - Df(a)(p_m - a)| =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{\|p_m - a\|\,|r(p_m - a)|}{\sqrt{\|p_m - a\|^2 + (f(p_m)-f(a))^2}} = 0, \text{ bo}$$

$$0 \le \frac{\|p_m - a\|}{\sqrt{\|p_m - a\|^2 + (f(p_m)-f(a))^2}} \cdot |r(p_m - a)| \le |r(p_m - a)| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

Stąd $t = Df(a)w$, a zatem $s = Df(a)v$.
To kończy dowód 1) ⇒ 2).

2) ⇒ 1).

<u>Zadanie z GALu</u>: Jeżeli $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ jest n-wymiarową podprzestrzenią liniową nie zawierającą wektora $(0,0,\dots,0,1)$, to istnieje $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ~~tak~~ liniowe takie, że $V = \{(v, Tv) : v \in \mathbb{R}^n\}$, tj V jest wykresem T.

Rozwiązanie tego zadania zostawiam czytelnikom.

My wykażemy, że

$$\lim_{p\to a} \frac{|f(p)-f(a)-T(p-a)|}{\|p-a\|} = 0, \quad (\star)$$

a więc że f jest różniczkowalna w a i $Df(a) = T$.

Załóżmy przeciwnie, że granica w $(\star)$ nie jest równa zeru. Istnieje wówczas ciąg $p_m \to a$ i $\delta > 0$ takie, że dla wszystkich $m \in \mathbb{N}$ $p_m \neq a$

$$\frac{|f(p_m)-f(a)-T(p_m-a)|}{\|p_m-a\|} > \delta$$

Oznaczmy $q_m = (p_m, f(p_m))$. Punkty q_m należą do wykresu G_f, a punkty $\xi_m = \dfrac{q_m-(a,f(a))}{\|q_m-(a,f(a))\|}$ do sfery jednostkowej $S^n(0,1)$ w $\mathbb{R}^{n+1}$.
Ta ostatnia jest zbiorem zwartym, możemy więc z ciągu (ξ_m) wybrać podciąg (ξ_{m_k}) zbieżny do pewnego $\tilde{\xi} = (v,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$; $\tilde{\xi} \in S^n(0,1)$.

Oznaczając, jak w pierwszej części dowodu,

$\lambda_{m_k} = \| q_{m_k} - (a, f(a)) \|$, mamy $v = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{p_{m_k} - a}{\lambda_{m_k}}$,

$$s = \lim_{k\to\infty} \frac{f(p_{m_k}) - f(a)}{\lambda_{m_k}}.$$

Z definicji stożka stycznego wiemy, że

$\tilde{\xi} = (v, s) \in T_{(a, f(a))} G_f$, a zatem $s = Tv$.

Stąd

$$0 = |s - Tv| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{f(p_{m_k}) - f(a)}{\lambda_{m_k}} - T\frac{p_{m_k} - a}{\lambda_{m_k}} \right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\| p_{m_k} - a \|}{\lambda_{m_k}} \cdot \underbrace{\left| \frac{f(p_{m_k}) - f(a) - T(p_{m_k} - a)}{\| p_{m_k} - a \|} \right|}_{\text{to jest, dla każdego } k \in \mathbb{N}, \text{ większe od } \delta > 0}$$

Stąd

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\| p_{m_k} - a \|}{\lambda_{m_k}} = 0$$

$$\|$$

$$\| v \|$$

To oznacza, że $v = 0$, ale wówczas $s = Tv = 0$.

Z drugiej strony $(v, s) = \tilde{\xi} \in S^n(0, 1)$, więc $\|(v, s)\| = 1$.

Sprzeczność $\lightning$, która kończy dowód implikacji $2) \Rightarrow 1)$

<u>Twierdzenie:</u> Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwarty.
Załóżmy, że $f: U \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $a \in U$ i ciągła w pewnej kuli $B(a,r) \subset U$.
i że $\nabla f(a) \neq 0$.
Wówczas $T_a M_a = \{ w \in \mathbb{R}^n : \langle w, \nabla f(a) \rangle = 0 \}$ $\quad M_a = \{x \in U : f(x) = f(a)\}$
(a więc ~~przes~~ stożek styczny do M_a w a składa się z wszystkich wektorów prostopadłych do $\nabla f(a)$; w szczególności jest podprzestrzenią liniową).

<u>Dowód</u> Musimy udowodnić 2 rzeczy:

① jeżeli $\langle w, \nabla f(a) \rangle = 0$, to w jest styczny do M_a w a,

② każdy wektor styczny $w \in T_a M_a$ jest prostopadły do $\nabla f(a)$.

Zaczniemy od ②: Jeżeli $w = 0$, to nic nie trzeba dowodzić. Załóżmy, że $w \neq 0$.
Skoro $w \in T_a M_a$, to istnieje ciąg punktów $x_m \in M_a$, $x_m \neq a$, tż. $\frac{x_m - a}{\|x_m - a\|} \longrightarrow \frac{w}{\|w\|}$

Mamy

$$\underbrace{f(a) = f(x_m)}_{\text{bo } x_m \in M_a} = f(a) + Df(a)(x_m - a) + \overbrace{\|x_m - a\| r(x_m - a)}^{o(\|x_m - a\|)}.$$

Stąd

$$\underset{\langle \nabla f(a), x_m - a \rangle}{\underset{\|}{Df(a)(x_m - a)}} = - \|x_m - a\| r(x_m - a) = o(\|x_m - a\|)$$

92) W takim razie

$$\lim_{x_m \to a} \frac{\langle \nabla f(a), x_m - a \rangle}{\| x_m - a \|} = 0$$

ale

$$\parallel$$

$$\lim_{x_m \to a} \left\langle \nabla f(a), \frac{x_m - a}{\| x_m - a \|} \right\rangle = \left\langle \nabla f(a), \frac{w}{\|w\|} \right\rangle$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{\|w\|} \langle \nabla f(a), w \rangle$$

Stąd $\langle \nabla f(a), w \rangle = 0$

Zauważmy, że do ② ciągłość f w $B(a,r)$ nie była potrzebna.

Z ① jest trudniej: mając (niezerowy - - dla $w=0$ znów nie ma nic do dowodzenia) wektor w prostopadły do $\nabla f(a)$ musimy wskazać ciąg punktów $x_m \in M_a \setminus \{a\}$ t.ż. $x_m \to a$, $\frac{x_m - a}{\|x_m - a\|} \to \frac{w}{\|w\|}$.

Na początek zauważmy, że gdy przesuwamy się z punktu a w kierunku wskazanym przez $v = \nabla f(a)$, to wartości funkcji f rosną, a gdy w kierunku $-v$, to maleją:

$$f(a+tv) = f(a) + Df(a)tv + o(\|tv\|) =$$

$$= f(a) + \langle \nabla f(a), v \rangle t + o(\|tv\|) =$$

$$= f(a) + t\|v\|^2 + o(t)$$

Dla małych t $o(t)$ jest dużo mniejsze niż $t\|v\|^2$, więc o znaku $f(a+tv)-f(a) = t\|v\|^2 + o(t)$ decyduje znak $t\|v\|^2$ – a ten jest taki jak znak t.

Istnieje więc t_0 tż dla $t\in(0,t_0)$ mamy $f(a+tv) > f(a)$, a dla $t\in(-t_0,0)$ mamy $f(a+tv) < f(a)$. i f jest ciągła w $B(a, t\|v\|)$.

Niech więc $p_m = a + \frac{1}{m}v$, $q_m = a - \frac{1}{m}v$. dla $m > \frac{1}{t_0}$

Funkcja f jest ciągła, więc dla każdego $m > \frac{1}{t_0}$ znajdziemy $r_m > 0$ tż.

$$\forall_{y\in B(p_m, r_m)} f(y) > f(a)$$

$$\forall_{y\in B(q_m, r_m)} f(y) < f(a).$$

i wszystkie te kule leżą $B(a,r)$.

Wybierzmy dla każdego m liczbę $s_m > 0$ tak, by $\cancel{p_m + s_m w = a + \frac{1}{m}v + s_m w}$ [illegible]

~~oraz~~ $\cancel{q_m + s_m w = a - \frac{1}{m}v + s_m w}$

$s_m\|w\| < r_m$. Wtedy
$$p_m + s_m w \in B(p_m, r_m) \subset B(a,r)$$
$$q_m + s_m w \in B(q_m, r_m) \subset B(a,r)$$

$$f(p_m + s_m w) = f(a + \tfrac{1}{m}v + s_m w) > f(a)$$
$$f(q_m + s_m w) = f(a - \tfrac{1}{m}v + s_m w) < f(a)$$
i f jest ciągła na odcinku $[p_m + s_m w, q_m + s_m w]$.

94) Niech zatem $g_m: [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}] \to \mathbb{R}$

$$g_m(t) = f(a + tv + s_m w)$$

Oczywiście g jest ciągła (bo $a+tv+s_m w \in B(a,r)$)

Mamy
$$g_m\left(\tfrac{1}{m}\right) = f(p_m + s_m w) > f(a)$$
$$g_m\left(-\tfrac{1}{m}\right) = f(q_m + s_m w) < f(a)$$

więc z tw. Bolzano-Cauchy'ego o wł. Darboux znajdziemy $t_m \in (-\frac{1}{m}, \frac{1}{m})$ takie, że

$$f(a + t_m v + s_m w) = g_m(t_m) = f(a)$$

Zauważmy, że $a + t_m v + s_m w \neq a$, bo v i w są liniowo niezależne i $s_m > 0$.

Stąd $y_m = a + t_m v + s_m w \in M_a \setminus \{a\}$. Ciąg (y_m) to prawie poszukiwany przez nas ciąg (x_m).

Niech bowiem $\xi_m = \dfrac{y_m - a}{\|y_m - a\|} \in S^{n-1}(0,1) \subset \mathbb{R}^n$.

Nie mamy gwarancji, że ciąg (ξ_m) ma granicę w $\mathbb{R}^n$, ale, ze zwartości sfery $S^{n-1}(0,1)$, znajdziemy podciąg (ξ_{m_k}) taki, że $\xi_{m_k} \to \tilde{\xi} \in S^{n-1}(0,1)$.

Widzimy też, że $\xi_{m_k} = \dfrac{t_m}{\|t_m v + s_m w\|} v + \dfrac{s_m}{\|t_m v + s_m w\|} w \in Lin(v,w)$.

Przestrzeń rozpięta przez wektory v i w jest domknięta, więc również $\tilde{\xi} = \lim_{k\to\infty} \xi_{m_k}$ do niej należy, $\tilde{\xi} = \alpha v + \beta w$.

95) Wektor $\tilde{\xi}$ jest styczny do M_a w a, więc z (2) wiemy, że $\langle \tilde{\xi}, v \rangle = 0$

$$0 = \langle \tilde{\xi}, v \rangle = \alpha \overset{\|v\|^2}{\overset{\shortparallel}{\langle v, v \rangle}} + \beta \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\langle w, v \rangle}} = \alpha \|v\|^2.$$

Stąd $\alpha = 0$ (bo $\|v\| \neq 0$) i $\tilde{\xi} = \beta w$; do tego β nie może być równe 0, bo $\tilde{\xi} \in S^{n-1}(0,1)$, więc $\tilde{\xi} \neq 0$.

Przypomnienie

Niech $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ będzie klasy C^1.
Wówczas obraz γ to krzywa w $\mathbb{R}^n$, której długość wyraża się wzorem

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2 + \ldots + (\gamma_n'(t))^2}\, dt =$$

$$= \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

Niech $h : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ będzie ciągła.
Umówmy się, że przez $\int_a^b h(t)\,dt$ rozumiemy wektor $\left(\int_a^b h_1(t)\,dt, \int_a^b h_2(t)\,dt, \ldots, \int_a^b h_m(t)\,dt\right)$.

Zachodzi wówczas

Lemat: $\left\| \int_a^b h(t)\,dt \right\| \leq \int_a^b \|h(t)\|\,dt$

Dowód

$$\left\|\int_a^b h(t)\,dt\right\| = \left\|\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} h\left(\frac{j}{k}\right)\right\| \overset{\text{ciągłość normy}}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \left\|\sum_{j=1}^{k} h\left(\frac{j}{k}\right)\right\|$$

$$\underset{n.\Delta}{\leq} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \left\|h\left(\frac{j}{k}\right)\right\| = \int_a^b \|h(t)\|\,dt.$$

97)

Twierdzenie (o wartości średniej).

Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, $f : U \to \mathbb{R}^m$ i $\gamma : [a,b] \to U$ niech będą klasy C^1. Oznaczmy $x = \gamma(a)$, $y = \gamma(b)$. Wówczas

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \sup_{t \in [a,b]} |||Df(\gamma(t))||| \cdot l(\gamma),$$

gdzie $l(\gamma)$ jest długością krzywej γ.

Dowód

Niech $h(t) = f(\gamma(t))$. Mamy $h'(t) = Df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$;

$$h(a) = f(x), \quad h(b) = f(y).$$

$$\|f(x) - f(y)\| = \|h(a) - h(b)\| = \left\| \int_a^b h'(t)\,dt \right\| =$$

$$= \left\| \int_a^b Df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt \right\| \underset{\text{Lemat}}{\leq} \int_a^b \|Df(\gamma(t))\,\gamma'(t)\|\,dt$$

$$\leq \int_a^b |||Df(\gamma(t)))||| \cdot \|\gamma'(t)\|\,dt \leq \sup_{t \in [a,b]} |||Df(\gamma(t))||| \cdot \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt$$

$$= l(\gamma) \cdot \sup_{t \in [a,b]} |||Df(\gamma(t))|||.$$

Wniosek:

Jeżeli $x, y \in \mathcal{U}$ i odcinek $[x,y]$ zawiera się w $\mathcal{U}$, to

$$\|f(x)-f(y)\| \leq \|x-y\| \sup_{t\in[0,1]} |||Df(x+t(y-x))|||$$

Dowód wniosku

Zastosujemy twierdzenie do $\gamma(t) = x+t(y-x)$. $\gamma : [0,1] \to \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$. Wtedy $\ell(\gamma) = \|x-y\|$, skąd od razu otrzymujemy tezę.