Różniczkowalność funkcji uwikłanej

Twierdzenie Niech, jak poprzednio, X, Y, Z będą przestrzeniami Banacha, $\Omega \subset X \times Y$ otwarty, $f : \Omega \to Z$. Tym razem jednak nie zakładamy ciągłości f na Ω.

Załóżmy teraz, że dla pewnych zbiorów otwartych $A \subset X$, $B \subset Y$ tż $A \times B \subset \Omega$ istnieje funkcja uwikłana $g(x) = y$ będąca rozwiązaniem równania
$$f(x,y) = c$$
(czyli $\forall_{x \in A}$ $f(x, g(x)) = c$ dla $g : A \to B$)

Dalej, załóżmy że dla pewnych $(a,b) \in A \times B$ zachodzi $b = g(a)$, funkcja f jest różniczkowalna w (a,b) i pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \in B(Y,Z)$ jest odwracalna.

Wówczas jeżeli g jest ciągła w a, to jest w a różniczkowalna i zachodzi wzór
$$(*) \qquad g'(a) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b).$$

Uwagi 1. Mamy tu słabsze założenia niż w twierdzeniu o istnieniu i ciągłości funkcji uwikłanej.

Przy tamtych założeniach: ~~(istnienie i) ciągłość~~
- istnienie i ciągłość $\frac{\partial f}{\partial y}$ w otoczeniu a
- ciągłość f na Ω

ciągłość funkcji g w punkcie a mamy zagwarantowaną automatycznie.

2. Jeżeli wiemy, że g jest różniczkowalna w a,

to jej pochodna musi być dana wzorem(*).
Wynika to z twierdzenia o pochodnej złożenia
Zauważmy, że funkcja $F(x) = f(x, g(x))$
jest stale równa c na A, więc

$$0 = DF(a) = Df(x, g(x))\cdot(1, g'(x))\Big|_{x=a} =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)), \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)\cdot(1, g'(x))\Big|_{x=a} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot g'(a)$$

skąd $\quad g'(a) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)^{-1}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(a,b).$

(powinienem raczej pisać $Dg(a)$, nie $g'(a)$, ale z przyzwyczajenia...)

<u>Dowód:</u>

Dla $(x,y)\in\Omega$ mamy $f(x,y) - f(a,b) = Df(a,b)(x-a, y-b) + R(x,y)$,

gdzie $\dfrac{R(x,y)}{\|x-a\| + \|y-b\|} \xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{} 0$.

Stąd, dla $x\in A$,

$$0 = f(x, g(x)) - f(a,b) = Df(a,b)(x-a, g(x)-b) + R(x, g(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(g(x)-b) + R(x, g(x))$$

Dla uproszczenia rachunków będę dalej pisał

$P = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $\quad Q = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$

Mamy zatem $0 = P\cdot(x-a) + Q(g(x)-b) + R(x,g(x))$,

skąd $g(x) - \underset{g(a)}{\overset{\shortparallel}{b}} = -Q^{-1}P(x-a) - Q^{-1}R(x,g(x))$. $\boxtimes$

Jeżeli uda nam się wykazać, że $r(x) = -Q^{-1}R(x,g(x))$ spełnia $\dfrac{r(x)}{\|x-a\|} \xrightarrow[x\to a]{} 0$, to będziemy wiedzieli, że g jest różniczkowalna w a oraz $-Q^{-1}P$ to jej pochodna w a.

Zauważmy najpierw, że, dzięki ciągłości g w a, $(x,g(x)) \xrightarrow[x\to a]{} (a,b)$, skąd $\dfrac{R(x,g(x))}{\|x-a\|+\|g(x)-b\|} \xrightarrow[x\to a]{} 0$, w szczególności istnieje $\varepsilon>0$ takie, że jeżeli tylko $\|x-a\|<\varepsilon$, to $\dfrac{|||Q^{-1}|||\,\|R(x,g(x))\|}{\|x-a\|+\|g(x)-b\|} < \dfrac{1}{2}$.

Q^{-1} jest ciągłe

Dalej, dla $\|x-a\|<\varepsilon$, mamy z $\boxtimes$

$$\|g(x)-b\| \le |||Q^{-1}|||\,|||P|||\cdot\|x-a\| + $$
$$+ \frac{|||Q^{-1}|||\,\|R(x,g(x))\|}{\|x-a\|+\|g(x)-b\|}\cdot(\|x-a\|+\|g(x)-b\|)$$
$$\le |||Q^{-1}|||\cdot|||P|||\cdot\|x-a\| + \frac{1}{2}\|x-a\| + \underbrace{\frac{1}{2}\|g(x)-b\|}_{\text{to na drugą stronę nierówności}}$$

skąd

$$\|g(x)-b\| \le \left(2|||Q^{-1}|||\cdot|||P|||+1\right)\|x-a\| \quad \odot$$

Oszacujmy zatem $\dfrac{\|r(x)\|}{\|x-a\|}$ dla x bliskich a

(w szczególności możemy założyć, że $\|x-a\|<\varepsilon$).

$$\frac{\|r(x)\|}{\|x-a\|} \leq |||Q^{-1}||| \cdot \frac{\|R(x,g(x))\|}{\|x-a\|} =$$

$$= |||Q^{-1}||| \cdot \frac{\|R(x,g(x))\|}{\|x-a\|+\|g(x)-b\|} \cdot \frac{\|x-a\|+\|g(x)-b\|}{\|x-a\|}$$

korzystam z $\odot$

$$\leq |||Q^{-1}||| \cdot \underbrace{\frac{\|R(x,g(x))\|}{\|x-a\|+\|g(x-b)\|}}\left(2|||Q^{-1}|||\cdot|||P|||+2\right)$$

i to dąży do zera gdy $x \to a$.

Stąd $\frac{r(x)}{\|x-a\|} \to 0$ przy $x \to a$, co mieliśmy wykazać $\square$.

<u>Lemat</u>: Jeżeli $S \in B(X,X)$, $|||S|||<1$, to $Id+S$ jest odwracalny.

<u>Dowód</u>: Wykażemy, że $(Id+S)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} S^n \cdot (-1)^n$ ← n-krotne złożenie S.

• po pierwsze, ten szereg ma sens: jest bezwzględnie zbieżny w $B(X,X)$, bo $|||S^n||| \leq |||S|||^n$, a $|||S|||<1$, więc szereg norm szacuje się przez szereg geometryczny. W dowodzie, że szereg bezwzgl. zbieżny jest zbieżny potrzebny był tylko warunek Cauchy'ego, a ten działa w przestrzeniach Banacha, bo są zupełne.

Po drugie, $(Id+S)\sum_{n=0}^{\infty} S^n (-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(S^n+S^{n+1})(-1)^n =$

$= (Id + \cancel{S} - \cancel{S} - \cancel{S^2} + \cancel{S^2} + \cancel{S^3} - \cancel{S^3} - S^4 + \ldots) = Id$

(formalnie należałoby sprawdzić ten rachunek na sumach częściowych:

$$\sum_{n=0}^{k}(S^n+S^{n+1})(-1)^n = Id + \underbrace{(-1)^k S^{k+1}}_{\text{i to dąży do 0 przy } k\to\infty}$$)

<u>Lemat</u>: Niech X, Y będą Banacha. Oznaczmy przez $\mathcal{U}$ (odp. $\mathcal{U}^{-1}$) zbiór wszystkich odwracalnych przekształceń liniowych ciągłych z X w Y (odp. z Y w X).

Wtedy 1) zbiory $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}^{-1}$ są otwarte w $B(X,Y)$ i $B(Y,X)$

2) przekształcenie $F : \mathcal{U} \to \mathcal{U}^{-1}$, które przekształceniu $T \in B(X,Y)$ przypisuje $F(T) = T^{-1} \in B(Y,X)$ jest różniczkowalne i dla $T \in B(X,Y)$ mamy $DF(T) : B(X,Y) \to B(Y,X)$,

$$DF(T)S = -S^{-1} \circ T \circ S^{-1}.$$

<u>Dowód</u>: Punkt 1) łatwo wynika z poprzedniego lematu. Jeżeli $T \in \mathcal{U}$, zaś $h \in B(X,Y)$ spełnia $|||h||| < |||T^{-1}|||$, to $T^{-1}h \in B(X,X)$ spełnia $|||T^{-1}h||| \leq |||T^{-1}||| \cdot |||h||| < 1$, więc $Id + T^{-1}h$ jest odwracalne w $B(X,X)$.

Stąd $(T+h)^{-1} = (T \circ (Id + T^{-1}h))^{-1} = (Id + T^{-1}h)^{-1} \circ T^{-1}$, a więc elementy $B(X,Y)$ leżące w odległości ~~Mamy zatem~~ mniejszej niż $|||T^{-1}|||^{-1}$ od T są odwracalne (czyli kula $B(T, |||T^{-1}|||^{-1}) \subset \mathcal{U}$).

Mamy też

$$\underbrace{(T+h)^{-1} - T^{-1}}_{F(T+h) - F(T)} = (Id + T^{-1}h)^{-1} \circ T^{-1} - T^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (T^{-1}h)^n - Id\right) T^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (T^{-1}h)^n \cdot T^{-1},$$

czyli
$$F(T+h)-F(T) = \overbrace{-T^{-1}\cdot h\cdot T^{-1}}^{DF(T)h} + \overbrace{\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}(T^{-1}h)^n\cdot T^{-1}(-1)^n}_{\text{to jest kandydat na resztę}}}^{R(h)}$$

Oszacujmy $|||R(h)|||$:

$$|||R(h)||| \le \sum_{n=2}^{\infty} |||T^{-1}|||^{n+1}\cdot |||h|||^{n} = \Big\}\ \text{suma szeregu geometrycznego}$$

$$= \frac{|||T^{-1}|||^3\,|||h|||^2}{1-|||T^{-1}|||\cdot|||h|||},$$ skąd od razu widać, że $\frac{|||R(h)|||}{|||h|||}\xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

Stąd $DF(T)h = -T^{-1}hT^{-1}$ $\square$.

Uwaga: Zadanie : ~~Wykazać, że w przestrzeniach skończenie wymiarowo~~

Rozważmy przypadek skończenie wymiarowy:

niech $F: GL_n \to GL_n$

$$F(M) = M^{-1}$$

($GL_n \subseteq B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ to grupa wszystkich odwracalnych macierzy $n\times n$).

Wykazać, że F jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna we wszystkich punktach GL_n.

Wniosek

Niech $\mathcal{U} \subset X$ będzie otwarty, $f: \mathcal{U} \to B(Y,Z)$. Załóżmy, że f jest różniczkowalna i dla każdego $x \in \mathcal{U}$ przekształcenie $f(x) \in B(Y,Z)$ jest odwracalne. Wówczas funkcja $g: \mathcal{U} \to B(Z,Y)$ dana wzorem $g(x) = (f(x))^{-1}$ jest różniczkowalna i

$$Dg(x): X \to B(Z,Y)$$

$$Dg(x)y = - g(x) \circ (Df(x)y) \circ g(x) =$$
$$= -(f(x))^{-1} \circ Df(x)y \circ (f(x))^{-1}.$$

Jeżeli X jest skończenie wymiarowa i f jest klasy C^k, to g też jest klasy C^k (to już wniosek z zadania).

No to ostatnia już wersja twierdzenia o różniczkowaniu funkcji uwikłanych.

Twierdzenie: Załóżmy, że X, Y, Z są Banacha, $\Omega \subset X \times Y$ otwarty, $A \subset X$, $B \subset Y$ otwarte takie, że $A \times B \subset \Omega$.

Załóżmy, że $f: \Omega \to Z$ jest klasy C^1

1). Jeżeli istnieje $g: A \to B$ ciągłe takie, że $\forall_{x \in A}\ f(x, g(x)) = c$ oraz $\forall_{x \in A}\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))$ jest odwracalna, to funkcja g jest klasy C^1

2). Załóżmy, że dla pewnych $(a,b) \in \Omega$ zachodzi $f(a,b) = c$. Jeżeli $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ jest odwracalna, to istnieją zbiory otwarte $A' \subset X$, $B' \subset Y$ tż $a \in A'$, $b \in B'$, $A' \times B' \subset \Omega$ i takie, że dla każdego $x \in A'$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $y = g(x) \in B'$ równania $f(x,y) = c$, ~~że~~ a funkcja $g: A' \to B'$ zdefiniowana w ten sposób jest różniczkowalna w sposób ciągły (tj $g \in C^1(A', B')$)

Dowód: 1) Z twierdzenia z początku wykładu wiemy, że g jest różniczkowalna we wszystkich punktach A i

$$\forall_{x \in A} \quad g'(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))$$

Z założeń g, $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ są funkcjami ciągłymi, również przekształcenie $T \mapsto T^{-1}$ jest ciągłe. Stąd g' jest, jako iloczyn i złożenie funkcji ciągłych, funkcją ciągłą, a zatem $g \in C^1$

~~Zadanie: Jeżeli X, Y, Z są skończenie wymiarowe f i g są klasy~~

Zadanie: Jeżeli przestrzenie są skończenie wymiarowe i f jest klasy C^k, to g też jest klasy C^k.

2) istnienie zbiorów A', B' i funkcji g oraz ciągłość g wynika z twierdzenia o istnieniu i ciągłości funkcji uwikłanej. Wtedy jednak możemy zastosować punkt 1).

$\square$

Warto jeszcze zwrócić uwagę na szczególny przypadek twierdzenia o funkcji uwikłanej:

~~gdy~~ Twierdzenie o funkcji odwrotnej

Załóżmy, że X, Y ~~jest~~ są Banacha, $\Omega \subset X$ otwarty $f \in C^1(\Omega, Y)$ i dla pewnego $a \in \Omega$ $Df(a) \in B(X,Y)$ jest odwracalna.

Wówczas istnieją takie $\mathcal{U} \subset \Omega$ otwarte, $a \in \mathcal{U}$, że $f(\mathcal{U}) \subset Y$ jest też otwarte, $f: \mathcal{U} \to f(\mathcal{U})$ jest bijekcją i funkcja $f^{-1}: f(\mathcal{U}) \to \mathcal{U}$ jest klasy C^1.

Dowód: Rozważmy funkcję $F: Y \times \cancel{X}\,\Omega \to Y$ $F(y,x) = f(x) - y \in Y$. i równanie $F(y,x) = 0$.

Mamy $\frac{\partial F}{\partial x}(a, f(a)) = Df(a) \leftarrow$ to jest odwracalne,

$$F(a, f(a)) = 0,$$

więc istnieją $A \subset Y$, $B \subset X$ (a nawet $B \subset \Omega$) otwarte i funkcja $g: A \to B$ klasy C^1 taka, że $F(y, g(y)) = 0$, Zatem $f(g(y)) = y$ dla wszystkich $y \in A$, czyli $f = g^{-1}$, $g = f^{-1}$ i f jest bijekcją między $g(A)$ i A. O zbiorze A już wiemy, że jest otwarty i $f(a) \in A$, $g(A) = f^{-1}(A)$, funkcja f jest ciągła, a przeciwobraz zbioru otwartego w funkcji ciągłej jest zawsze zbiorem otwartym.

Biorąc zatem $\mathcal{U} = f^{-1}(A)$ dostajemy tezę.

Łatwo też możemy wywnioskować, że gdy f jest klasy C^k, to również $g = f^{-1}$ jest klasy C^k. $\square$.