# Całkowanie funkcji mierzalnych (niekoniecznie nieujemnych).

Niech $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ będzie mierzalna.

Będziemy oznaczać $f_+ = \max(f, 0)$
$f_- = -\min(f, 0)$.

(„część dodatnia" i „część ujemna" $f$).

Oczywiście $f_+ - f_- = f$, funkcje $f_+$ i $f_-$ są mierzalne i nieujemne.

Definiujemy całkę wzgl. miary $\mu$:

Dla każdego $E \in \mathcal{F}$

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f_+ \, d\mu - \int_E f_- \, d\mu$$

o ile przynajmniej jedna z całek $\int_E f_+$, $\int_E f_-$ jest skończona.

(w przeciwnym razie mówimy, że $\int_E f \, d\mu$ nie istnieje).

Od ręki sprawdzamy, że

① jeżeli $f$ jest stała na $E$, $f = c = \text{const}$, to $\int_E f \, d\mu = c\mu(E)$

② jeżeli $\mu(E) = 0$, to dla każdej funkcji mierzalnej $f$ mamy $\int_E f \, d\mu = 0$

**Def:** Mówimy, że $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ mierzalna jest <u>całkowalna</u> na $E \in \mathcal{F}$, jeżeli $\int_E f \, d\mu$ istnieje i jest skończona.

③ ważny, choć prosty

**Fakt:** Funkcja $f$ jest całkowalna na $E \in \mathcal{F}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|f|$ jest całkowalny na $E$.

**Dowód:** $|f| = f_+ + f_-$. Jeżeli całka

$$\int_E f \, d\mu = \underbrace{\int_E f_+ \, d\mu - \int_E f_- \, d\mu}$$ istnieje i jest skończona,

to <u>OBIE</u> całki po prawej stronie są skończone,

więc $\int_E |f| \, d\mu = \int_E f_+ \, d\mu + \int_E f_- \, d\mu \in \mathbb{R}$.

Odwrotna implikacja idzie tak samo.

④ funkcja $f$ całkowalna na $E \in \mathcal{F}$ jest na $E$ skończona $\mu$-p.w.

(w przeciwnym razie bądź $\{x \in E : f(x) = +\infty\}$, bądź $\{x \in E : f(x) = -\infty\}$ byłby dodatniej miary; w pierwszym przypadku $\int_E f_+ \, d\mu$, a w drugim $\int_E f_- \, d\mu$ byłaby $+\infty$).

⑤ jeżeli $f \leq g$ na $E \in \mathcal{F}$, to $\int_E f\,d\mu \leq \int_E g\,d\mu$

⑥ $\forall_{E \in \mathcal{F}}$ $\inf_E f \cdot \mu(E) \leq \int_E f\,d\mu \leq \sup_E f \cdot \mu(E)$

⑦ $\left| \int_E f\,d\mu \right| \leq \int_E |f|\,d\mu$.

Zauważmy, że $(-f)_+ = f_-$, $(-f)_- = f_+$,

skąd $\int_E (-f)\,d\mu = -\int_E f\,d\mu$;

dla każdego $x \in X$ $\quad f(x) \leq |f(x)|$

$$-f(x) \leq |f(x)|$$

$$\Downarrow$$

$$\int_E f(x)\,d\mu \leq \int_E |f(x)|\,d\mu \quad \text{oraz} \quad -\int_E f(x)\,d\mu$$

$$\parallel$$

$$\int_E (-f)\,d\mu \leq \int_E |f|\,d\mu$$

$$\Rightarrow \left| \int_E f\,d\mu \right| \leq \int_E |f|\,d\mu.$$

⑧ jeżeli $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, $E_i$ mierzalne i parami rozłączne, (tzn. $\in \mathcal{F}$)

to $\int_E f\,d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f\,d\mu$

Twierdzenie: Jeżeli istnieją $\int_E f\,d\mu$ i $\int_E g\,d\mu$ oraz funkcja $f+g$ jest dobrze określona, ~~to~~ i suma całek po prawej stronie ma sens, to

$$\int_E (f+g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu$$

Dowód:

Zauważmy, że $(f+g)_+$ niekoniecznie jest równe $f_+ + g_+$, ~~b.~~ podobnie z $(f+g)_-$, więc teza nie wynika od razu z definicji.

Załóżmy na początek, że $f$ i $g$ są całkowalne na $E$ (tzn. $\int_E f\,d\mu$ i $\int_E g\,d\mu$ są skończone)

Mamy
$$0 \le \int_E |f+g|\,d\mu \le \int_E (|f|+|g|)\,d\mu \le \int_E |f|\,d\mu + \int_E |g|\,d\mu < \infty,$$

co dowodzi że $f+g$ jest całkowalna na $E$.

Mamy dalej

$$f_+ - f_- + g_+ - g_- = f+g = (f+g)_+ - (f+g)_-,$$ czyli

$$f_+ + g_+ - (f+g)_+ \overset{(*)}{=} f_- + g_- - (f+g)_-$$

i obie strony tej równości są, co łatwo widać, nieujemne.

Stąd

$$\int_E f_+ \, d\mu + \int_E g_+ \, d\mu = \int_E (f_+ + g_+) \, d\mu \overset{*}{=}$$

$$= \int_E \big( (f_- + g_- - (f+g)_-) + (f+g)_+ \big) \, d\mu$$

$$= \int_E (f+g)_+ \, d\mu + \int_E (f_- + g_- - (f+g)_-) \, d\mu$$

Analogicznie

$$\int_E f_- \, d\mu + \int_E g_- \, d\mu = \int_E (f+g)_- \, d\mu + \int_E (f_+ + g_+ - (f+g)_-) \, d\mu$$

i odejmując obie równości stronami dostajemy tezę.

Został nam w takim razie przypadek, gdy któraś z funkcji $f, g$ (być może obie) nie jest całkowalna.

$\Big\{$ $\int_E f \, d\mu = +\infty$, $\int_E g \, d\mu = -\infty$ jest wykluczony przez założenia

Mamy kilka możliwych przypadków:

a) $\int_E f \, d\mu = +\infty$ $\quad \left| \int_E g \, d\mu \right| < \infty$ $\qquad$ b) $\int_E f \, d\mu = +\infty$ $\quad \int_E g \, d\mu = +\infty$

c) $\left| \int_E f \, d\mu \right| < \infty$ $\quad \int_E g \, d\mu = +\infty$ $\quad$ + przypadki a'), b'), c'), w których $+\infty$ zastępujemy $-\infty$.

Przypadki a) i c) są symetryczne ze względu na zamianę $f$ i $g$, przypadki a'), b') i c') dostajemy z a), b) i c) zmieniając znaki $f$ i $g$. Stąd wystarczy rozpatrzeć a) i b).

Przypadek a)

$$\int_E f\,d\mu = +\infty \Rightarrow \int_E f_+\,d\mu = +\infty, \quad \int_E f_-\,d\mu < \infty$$

$$\left|\int_E g\,d\mu\right| < \infty \Rightarrow \int_E g_+\,d\mu < \infty, \quad \int_E g_-\,d\mu < \infty$$

Wiemy, że $f_- + g_- - (f+g)_- = f_+ + g_+ - (f+g)_+ \geq 0$,

więc $f_- + g_- \geq (f+g)_- \geq 0$

$$\infty > \int_E f_-\,d\mu + \int_E g_-\,d\mu = \int_E (f_- + g_-)\,d\mu \geq \int_E (f+g)_-\,d\mu,$$

czyli $\int_E (f+g)_-\,d\mu < \infty$.

Z drugiej strony $\int_E (f_+ + g_+ - (f+g)_+)\,d\mu = \int_E (f_- + g_- - (f+g)_-)\,d\mu$

$$\int_E (f_+ + g_+ - (f+g)_+)\,d\mu \geq \int_E (f_+ - (f+g)_+)\,d\mu$$

$$\int_E (f_- + g_- - (f+g)_-)\,d\mu = \int_E f_-\,d\mu + \int_E g_-\,d\mu - \int_E (f+g)_-\,d\mu < \infty$$

Gdyby $\int_E (f+g)_+\,d\mu < \infty$, to

$$\int_E f_+\,d\mu = \int_E (f_+ - (f+g)_+)\,d\mu + \int_E (f+g)_+\,d\mu < \infty$$

wbrew założeniu.

Stąd $\int_E (f+g)_+\,d\mu = +\infty \Rightarrow \int_E (f+g)\,d\mu = +\infty = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu$

Przypadek b)

$$\int_E f\,d\mu = +\infty = \int_E g\,d\mu \quad \Rightarrow \quad \int_E f_+\,d\mu = +\infty \qquad \int_E g_+\,d\mu = +\infty$$

$$\cancel{-\infty <} \int_E f_-\,d\mu < \infty,$$

$$\cancel{-\infty <} \int_E g_-\,d\mu < \infty.$$

$$0 \leq (f+g)_- \leq f_- + g_- \quad \Rightarrow \quad \int_E (f+g)_-\,d\mu < \infty$$

$$\Downarrow$$

$$\int_E \left(f_+ + g_+ - (f+g)_+\right) d\mu = \int_E \left(f_- + g_- - (f+g)_-\right) d\mu < \infty$$

Jak poprzednio wnioskujemy, że $\int_E (f+g)_+\,d\mu = +\infty$, w przeciwnym razie dostalibyśmy $\int f_+\,d\mu \leq \int (f_+ + g_+)\,d\mu < \infty$.

Stąd $\int_E (f+g)\,d\mu = \int_E (f+g)_+\,d\mu - \int_E (f+g)_-\,d\mu = +\infty = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu$.

$\square$.

## Lemat Fatou

Niech $f_j : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $j = 1, 2, \dots$ będzie ciągiem funkcji mierzalnych, nieujemnych na pewnym $E \in \mathcal{F}$. Wówczas

$$\int_E \liminf_{j\to\infty} f_j \, d\mu \leq \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j \, d\mu$$

Dowód: $\liminf\limits_{j\to\infty} f_j = \lim\limits_{j\to\infty} \inf\limits_{m\geq j} f_m$.

Oznaczmy $g_j = \inf\limits_{m \geq j} f_m$. Funkcje $g_j : X \to \overline{\mathbb{R}}$ są, dla $j = 1, 2, \dots$, mierzalne i tworzą ciąg niemalejący.

Mamy też oczywistą nierówność $f_j \geq g_j$.

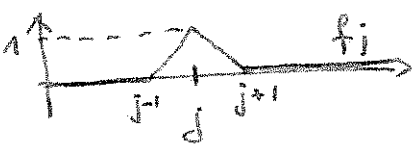
Stąd

$$\int_E \liminf_{j\to\infty} f_j \, d\mu = \int_E \lim_{j\to\infty} g_j \, d\mu \overset{\text{tw. Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej}}{=} \lim_{j\to\infty} \int_E g_j \, d\mu =$$

$$= \liminf_{j\to\infty} \int_E g_j \, d\mu \underset{\text{bo } g_j \leq f_j}{\leq} \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j \, d\mu .$$

$\square$.

Uwaga: Niech $f_j(x) = \max(0, 1 - |x - n|)$, $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^1)$, $\mu = \lambda_1$




Wtedy $\forall_{x\in\mathbb{R}} \lim\limits_{j\to\infty} f_j(x) = \liminf\limits_{j\to\infty} f_j(x) = 0$, ale $\forall_j \int_{\mathbb{R}} f_j \, d\lambda_1 = 1$, stąd w Lemacie Fatou jest w tym przypadku ostra nierówność.

No i trzecie, bodaj najczęściej stosowane (bo niewymagające nieujemności $f_j$) twierdzenie o przejściu do granicy pod znakiem całki.

Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej

Niech $f_j : X \to \overline{\mathbb{R}}$ będzie ciągiem funkcji mierzalnych takim, że dla pewnego $E \in \mathcal{F}$ i $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mierzalnej

(1) $f_j(x) \longrightarrow f(x)$ dla $\mu$-p.w. $x \in E$

(2) istnieje $g : X \to [0,\infty]$ całkowalna i taka, że $\forall_j \quad |f_j| \leq g \quad \mu$-p.w. na $E$

(taką $g$ nazywamy majorantą ciągu $f_j$ na $E$)

Wtedy $\int_E |f_j - f|\, d\mu \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ i $\int_E f_j\, d\mu \to \int_E f\, d\mu$.

Dowód: Teza twierdzenia nie ulegnie zmianie, gdy $E$ zmienimy o zbiór miary zero. Możemy zatem założyć, że własności (1) i (2) są spełnione we wszystkich (a nie $\mu$-p.w.) punktach $E$.

Z (2) wynika, że $g \pm f_j \geq 0$ na $E$ dla $j = 1, 2, \ldots$

$$\Rightarrow g \pm \lim f_j = g \pm f \geq 0 \text{ na } E.$$

Mamy

$$\int_E g\, d\mu + \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j\, d\mu = \liminf_{j\to\infty} \int_E (g+f_j)\, d\mu \overset{\text{Lemat Fatou}}{\geq} \int_E \liminf_{j\to\infty} (g+f_j)\, d\mu =$$

$$= \int_E (g+f)\, d\mu = \int_E g\, d\mu + \int_E f\, d\mu,$$

skąd (dzięki temu, że $\int_E g\,d\mu \in \mathbb{R}$)

$$\liminf_{j\to\infty} \int_E f_j\,d\mu \geq \int_E f\,d\mu$$

Analogicznie

$$\int_E g\,d\mu - \limsup_{j\to\infty} \int_E f_j\,d\mu \overset{\text{bo } b-\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty}(b-a_n)}{=} \liminf_{j\to\infty} \int_E (g-f_j)\,d\mu \overset{\text{Lemat Fatou}}{\geq}$$

$$\geq \int_E \liminf_{j\to\infty} (g-f_j)\,d\mu = \int_E (g-f)\,d\mu = \int_E g\,d\mu - \int_E f\,d\mu$$

skąd $\int_E f\,d\mu \geq \limsup\limits_{j\to\infty} \int_E f_j\,d\mu$.

Ostatecznie
$$\int_E f\,d\mu \geq \limsup_{j\to\infty} \int_E f_j\,d\mu \geq \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j\,d\mu \geq \int_E f\,d\mu,$$

więc $\lim\limits_{j\to\infty} \int_E f_j\,d\mu$ istnieje i jest równa $\int_E f\,d\mu$. $\square$.

Udowodnimy teraz ważną własność całki Lebesgue'a, zwaną absolutną (lub bezwzględną) ciągłością.

<u>Twierdzenie</u>: Niech $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ będzie całkowalna na $E \in \mathcal{F}$. Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ t.ż.

$$\forall_{\substack{A \subset E \\ A \in \mathcal{F}}} \quad \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f|\,d\mu < \varepsilon.$$

Na początek udowodnimy prosty, choć ważny lemat.

Lemat Jeżeli $f$ jest całkowalna na $E$, to
$$\lim_{N\to\infty} N\cdot\mu(\{x\in E : |f(x)|\geq N\}) = 0.$$
oraz $\int_{E_N} |f|\,d\mu \to 0$

Dowód

Oznaczmy $E_N = \{x\in E : |f(x)|\geq N\}$.

Wiemy, że $E\supset E_1 \supset \ldots$ oraz że $\bigcap_{N=1}^{\infty} E_N$ jest zbiorem miary ($\mu$) równej zero, bo $f$ jest skończona $\mu$-p.w. na $E$. Nie wiemy jednak, czy $\mu(E)<\infty$.

Rozważmy zatem $\nu(A) = \int_A |f|\,d\mu$; to jest miara zewn. na $E$.

$\nu(E) = \int_E |f|\,d\mu < \infty$, więc $\lim_{N\to\infty} \nu(E_N) = \nu(\bigcap_{N=1}^{\infty} E_N) =$
$$= \int_{\bigcap_{N=1}^{\infty} E_N} |f|\,d\mu = 0.$$
Mamy też $\nu(E_N) = \int_{E_N} |f|\,d\mu \geq N\mu(E_N) \geq 0$, bo $|f|\geq N$ na $E_N$

Z tw. o 3 ciągach $\lim_{N\to\infty} N\mu(E_N) = 0$. $\square$

Dowód twierdzenia

Wybierzmy $N$ tak duże, by $\int_{E_N} |f|\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$

Wtedy jeżeli $\mu(A) < \delta = \frac{\varepsilon}{2N}$, to
$$\int_A |f|\,d\mu = \int_{A\cap E_N} |f|\,d\mu + \int_{A\setminus E_N} |f|\,d\mu \leq \int_{E_N} |f|\,d\mu + N\cdot\mu(A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

Wróćmy na chwilę do Analizy I.2 i do całki Riemanna.

Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie całkowalna w sensie Riemanna. Czy $f$ jest mierzalna wzgl. $\lambda_1$? Czy jest całkowalna względem $\lambda_1$? (jako miary na $\mathcal{L}([a,b])$)? Czy całki są równe?

1. <u>$f$ jest mierzalna</u>

Niech $N \subset [a,b]$ będzie zbiorem punktów nieciągłości funkcji $f$; wiemy, że $\lambda_1(N) = 0$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i $t \in \mathbb{R}$.

Niech $\mathcal{U} \supset N$ będzie otwarty w $\mathbb{R}^n$, $\lambda_1(\mathcal{U}) < \varepsilon$.

$$A_t = \{x \in [a,b] : f(x) > t\}$$

$$\tilde{V}_t = \{x \in [a,b] \setminus \mathcal{U} : f(x) > t\}$$

to jest zbiór otwarty w $[a,b] \setminus \mathcal{U}$, więc istnieje $V_t \subset \mathbb{R}$ otwarty tż $\tilde{V}_t = V_t \cap ([a,b] \setminus \mathcal{U})$.

oczywiście $\tilde{V}_t \subset A_t$, więc $(V_t \cap [a,b]) \setminus A_t \subset \mathcal{U}$, zbiór $V_t \cap [a,b]$ jest otwarty w $[a,b]$, podobnie

$W_t = (V_t \cup \mathcal{U}) \cap [a,b]$. Mamy też $A_t \subset W_t$,

$\lambda_1(W_t \setminus A_t) \leq \lambda_1(\mathcal{U}) < \varepsilon$.

Stąd $A_t$ jest mierzalny.

2. $f$ jest całkowalna wzgl. $\lambda_1$, bo jest ograniczona,

$$\int_{[a,b]} |f|\, d\lambda_1 \leq \sup_{[a,b]} |f| \cdot (b-a).$$

3. $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\, d\lambda_1$$

Weźmy dowolny podział $P: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$. Niech $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ dla $j = 1, \ldots, m$. Wtedy $\{I_1, \ldots, I_m\}$ jest rozbiciem odcinka $[a,b]$, mamy też

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup_{I_i} f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_1(I_i) \cdot \sup_{I_i} f$$

$$\geq \sum_{i=1}^{m} \int_{I_1} f\, d\lambda_1 = \int_{[a,b]} f\, d\lambda_1 \geq \sum_{i=1}^{m} \lambda_1(I_1) \cdot \inf_{I_i} f$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf_{I_i} f = \underline{S}(f,P)$$

czyli dla każdego podziału $P$

$$\overline{S}(f,P) \geq \int_{[a,b]} f\, d\lambda_1 \geq \underline{S}(f,P)$$

skąd $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\, d\lambda_1 .$$