Konstrukcja miary Lebesgue'a.

Niech $x, y \in \mathbb{R}^n$. <u>Przedziałem</u> $(x,y)_n \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór $(x,y)_n = \{z \in \mathbb{R}^n : z_i \in (x_i, y_i) \ : i = 1, .., n\}$, analogicznie

$$[x,y]_n = \{z \in \mathbb{R}^n : z_i \in [x_i, y_i] \ : i = 1, ..., n\}.$$

Niech $P = [x,y]_n \subset \mathbb{R}^n$. Definiujemy <u>objętość</u> P jako $\mathrm{vol}(P) = \prod_{i=1}^{n} (y_i - x_i)$.

<u>Def:</u> ~~Niech~~ Miarą zewnętrzną (n-wymiarową) Lebesgue'a zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy $\lambda_n^*(A) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}(P_j) : \{P_j\}$ jest rodziną przedziałów takich, że $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\}$

<u>Twierdzenie:</u> λ_n^* (rzeczywiście) jest miarą zewnętrzną na $\mathbb{R}^n$.

<u>Dowód:</u> Jedyna nieoczywista część dowodu to przeliczalna subaddytywność λ_n^*.

Rozważmy rodzinę $A_1, A_2, \ldots$ podzbiorów $\mathbb{R}^n$. Ustalmy $\varepsilon > 0$

Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ znajdziemy taką pokrycie A_k rodzinę przedziałów $(P_{k,j})_{j \in \mathbb{N}}$, że

$$\lambda_n^*(A_k) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}(P_{k,j}) \leq \lambda_n^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Rodzina $(P_{k,j})_{k,j\in\mathbb{N}}$ pokrywa $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, więc

$$\lambda_n^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k,j=1}^{\infty} \mathrm{vol}(P_{k,j}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n^*(A_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n^*(A_k) + \varepsilon$$

Z dowolności $\varepsilon>0$ otrzymujemy

$$\lambda_n^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n^*(A_k) \quad (*)$$

W powyższym rachunku trochę się prześlizgnęliśmy nad przypadkiem, gdy $\lambda_n^*(A_k)=+\infty$ dla pewnego k; wtedy jednak $(*)$ zachodzi — obie strony są równe $+\infty$.

<u>Twierdzenie</u>: λ_n^* jest miarą zewnętrzną metryczną.

<u>Dowód</u>: Niech $A, B \subset \mathbb{R}^n$ będą takie, że $\mathrm{dist}(A,B) = \delta > 0$. Ustalmy $\varepsilon>0$ i wybierzmy pokrycie $\{P_i\}$ zbioru $A\cup B$ przedziałami takie, że $\lambda_n^*(A\cup B) \leq \sum_i \mathrm{vol}(P_i) \leq \lambda_n^*(A\cup B)+\varepsilon$.

<u>Obserwacja</u>: Każdy przedział $P\subset\mathbb{R}^n$ możemy podzielić na skończenie wiele przedziałów Q_j, stykających się tylko brzegami, tak, że $\mathrm{Vol}(P) = \sum_j \mathrm{Vol}(Q_j)$ i takich, (tym) że średnica każdego z Q_j ($\text{tj } \underbrace{\max(\|x-y\| : x,y\in Q_j)}_{=\operatorname{diam} Q_j}$) jest mniejsza niż δ. (wystarczy każdą krawędź P podzielić na k równych części, dla dost. dużego k).

Podzielmy zatem każdy z przedziałów P_i na mniejsze przedziały $\{Q_{i,j}\}$ tak, by $\operatorname{diam} Q_{ij} < \delta \quad \forall i,j$;

$$\sum_{i,j} \operatorname{vol}(Q_{i,j}) = \sum_i \operatorname{vol}(P_i) \leq \lambda_n^*(A \cup B) + \varepsilon$$

Zauważmy teraz, że żaden z $Q_{i,j}$ nie zawiera równocześnie punktów z A i z B, bo jeżeli $x \in A$, $y \in B$, to $\|x-y\| \geq \operatorname{dist}(A,B) = \delta > \operatorname{diam} Q_{i,j}$.

Stąd przedziały $Q_{i,j}$ możemy podzielić na 3 rozłączne rodziny:

- $\mathcal{Q}_A$ – te przedziały $Q_{i,j}$, które mają punkty wspólne z A
- $\mathcal{Q}_B$ – te, które mają punkty wspólne z B
- $\mathcal{Q}_0$ – te, które nie mają punktów wspólnych ani z A, ani z B.

Oczywiście $A \subset \bigcup \mathcal{Q}_A$, $B \subset \bigcup \mathcal{Q}_B$

więc

$$\lambda_n^*(A \cup B) \leq \lambda_n^*(A) + \lambda_n^*(B)$$
$$\leq \sum_{Q \in \mathcal{Q}_A} \operatorname{vol}(Q) + \sum_{Q \in \mathcal{Q}_B} \operatorname{vol}(Q) \leq \sum_{i,j} \operatorname{vol}(Q_{i,j}) =$$
$$= \sum_i \operatorname{vol}(P_i) \leq \lambda_n^*(A \cup B) + \varepsilon$$

i z dowolności $\varepsilon > 0$

$$\lambda_n^*(A \cup B) = \lambda_n^*(A) + \lambda_n^*(B).$$

$\square$.

Z tw. Caratheodory'ego miara Lebesgue'a jest więc borelowska.

Nietrudno też zauważyć, że λ_n^* jest miarą Radona: jeżeli $K \subset \mathbb{R}^n$ jest zwarty, to jest ograniczony $\Rightarrow \exists_{M>0}\ K \subset [-M,M]^n$,

więc $\lambda_n^*(K) \le \lambda_n^*([-M,M]^n) \le (2M)^n < \infty$.

Uwaga! nie wiemy jeszcze, czy tu jest równość!

Pozostaje więc sprawdzić, że jest borelowsko regularna.

~~Dla każdego~~

Niech $A \subset \mathbb{R}^n$. Jeżeli $\lambda_n^*(A) = \infty$, to $B = \mathbb{R}^n \supset A$ jest borelowski i $\lambda_n^*(A) = \lambda_n^*(B) = +\infty$.

Załóżmy zatem, że $\lambda_n^*(A) < \infty$.

Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje rodzina $\{P_{i,k}\}$ przedziałów ~~den~~ pokrywających A, tż.

$$\lambda_n^*(A) \le \sum_i \mathrm{vol}(P_{i,k}) \le \lambda_n^*(A) + \frac{1}{k}.$$

Niech $B_k = \bigcup_i P_{i,k}$, wtedy $\forall_k\ A \subset B_k$, $\cancel{\lambda_n^*(B_k)}$

$$\lambda_n^*(B_k) \le \sum_i \mathrm{vol}(P_{i,k}) \le \lambda_n^*(A) + \frac{1}{k}$$

Rozważmy zstępującą rodzinę $C_1 = B_1$, $C_2 = B_1 \cap B_2$, ...

$C_k = B_1 \cap \dots \cap B_k$. $C_1 \supset C_2 \supset \dots$, ale $A \subset C_k$ dla każdego k.

Stąd $A \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$ i $\lambda_n^*(A) \le \lambda_n^*\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k\right) = \lim_{k\to\infty} \lambda_n^*(C_k) \le$

$$\le \lim_{k\to\infty}\left(\lambda_n^*(A) + \frac{1}{k}\right) = \lambda_n^*(A)$$

bo $C_k \subset B_k \Rightarrow \lambda_n^*(C_k) \le \lambda_n^*(B_k) \le \lambda_n^*(A) + \frac{1}{k}$

To dowodzi, że $\lambda_n^*\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k\right)=\lambda_n^*(A)$,
a zbiór $\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$ jest borelowski. $\square$.

W rzeczywistości nie trzeba się bardzo napracować, by wykazać, że dla każdego $A\subset\mathbb{R}^n$ istnieje zbiór G typu G_δ (tj część wspólna przeliczalnie wielu zbiorów otwartych) taki, że $A\subset G$, $\lambda_n^*(A)=\lambda_n^*(G)$. Wynika to wprost z tw. o ~~aproksymacji~~ miarach Radona:

$$\lambda_n^*(A)=\inf\left(\lambda_n^*(\mathcal{U}) : \mathcal{U}\supset A,\ \mathcal{U} \text{ otwarty}\right),$$

możemy więc wybrać $\mathcal{U}_k$, $k=1,2,\dots$
t.ż. $\lambda_n^*(A)\le\lambda_n^*(\mathcal{U}_k)\le\lambda_n^*(A)+\frac{1}{k}$
i kopiując poprzednie rozumowanie
wziąć $C_1=\mathcal{U}_1$, $C_2=\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2$, ... $\leftarrow$ to są zbiory otwarte
Wtedy $A\subset\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = G$ $\leftarrow$ to jest G_δ

$$\lambda_n^*(A)\le\lambda_n^*(G)=\lim_{k\to\infty}\lambda_n^*(C_k)\le\lim_{k\to\infty}\left(\lambda_n^*(A)+\frac{1}{k}\right)=\lambda_n^*(A)$$

Co się dzieje, gdy tak przybliżamy zbiór Vitaliego?
Co możemy powiedzieć o $\lambda_n^*(G\setminus A)$?

Skoro λ_n^* jest miarą Radona, to dla każdego $A \subset \mathbb{R}^n$

(*) $\lambda_n^*(A) = \inf\{\lambda_n^*(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \supset A,\ \mathcal{U} \text{ otwarty}\}$,

a gdy $A \in \mathcal{F}(\lambda_n^*) =: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$,

(**) $\lambda_n^*(A) = \sup\{\lambda_n^*(K) : A \supset K,\ K \text{ zwarty}\}$.

<u>Twierdzenie</u>: Następujące warunki są równoważne:

1. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$
2. $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\mathcal{U}\supset A}$ otwarty tż. ~~A~~ $\lambda_n^*(\mathcal{U}\setminus A) < \varepsilon$
3. $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{F\subset A}$ domknięty tż. $\lambda_n^*(A\setminus F) < \varepsilon$
4. $\exists_{G\supset A}$ typu G_δ tż $\lambda_n^*(G\setminus A) = 0$
5. $\exists_{F\subset A}$ typu F_σ tż $\lambda_n^*(A\setminus F) = 0$

<u>Dowód</u>

1.⇒2. Jeżeli $\lambda_n^*(A) < \infty$, to 2. wynika niemal od razu z (*): istnieje $\mathcal{U} \supset A$ otwarty tż $\lambda_n^*(\mathcal{U}) < \lambda_n^*(A) + \varepsilon$, więc ~~$\lambda_n^*$~~

$$\lambda_n^*(\mathcal{U}) = \lambda_n^*(\mathcal{U}\setminus A) + \lambda_n^*(A) < \lambda_n^*(A) + \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \lambda_n^*(\mathcal{U}\setminus A) < \varepsilon.$$

ale tylko gdy $\lambda_n^*(A) < \infty$

Jeżeli $\lambda_n^*(A) = +\infty$, to dzielimy A na kawałki:

$A_m = A \cap (B(0,m) \setminus B(0,m-1))$

i dobieramy $\mathcal{U}_m \supset A_m$ otwarte takie, że $\cancel{\lambda_n^*(\mathcal{U}_m)}$

$$\lambda_n^*(\mathcal{U}_m) < \lambda_n^*(A_m) + \varepsilon/2^m \Rightarrow \lambda_n^*(\mathcal{U}_m \setminus A_m) < \varepsilon/2^m.$$

Wtedy $\mathcal{U} = \bigcup_m \mathcal{U}_m$, $A = \bigcup_m A_m$,

$$\mathcal{U} \setminus A \subset \bigcup_m (\mathcal{U}_m \setminus A_m), \text{ więc } \lambda_n^*(\mathcal{U} \setminus A) < \varepsilon \sum_m \frac{1}{2^m} = \varepsilon$$

2. $\Rightarrow$ 3. Dobieramy $\mathcal{U}$ do zbioru mierzalnego $\mathbb{R}^n \setminus A$, $\mathcal{U} \supset (\mathbb{R}^n \setminus A)$, tak, by $\lambda_n^*(\mathcal{U} \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A)) < \varepsilon$.

Wtedy $F = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{U}$ spełnia $F \subset A$, $A \setminus F =$

$= A \cap \mathcal{U} = \mathcal{U} \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A)$, więc $\lambda_n^*(A \setminus F) < \varepsilon$.

2. $\Rightarrow$ 4. Bierzemy dla każdego k $\mathcal{U}_k \supset A$ otwarte takie, że $\lambda_n^*(\mathcal{U}_k \setminus A) < \frac{1}{k}$, wtedy $G = \bigcap_k \mathcal{U}_k$ jest typu G_δ,

$A \subset G$ i $\lambda_n^*(A) \le \lambda_n^*(G) \underset{\uparrow}{=} \lambda_n^*(G \setminus A) + \lambda_n^*(A) \le$

bo A, G mierzalne

$$\le \lambda_n^*(\mathcal{U}_k \setminus A) + \lambda_n^*(A) \le \frac{1}{k} + \lambda_n^*(A)$$

dla każdego k

i stąd $\lambda_n^*(G \setminus A) = 0$.

4. $\Rightarrow$ 5. Dobieramy G typu G_δ do $\mathbb{R}^n \setminus A$, wtedy $F = \mathbb{R}^n \setminus G$ jest typu F_σ, $A \setminus F = G \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A)$.

$5. \Rightarrow 1.$ $A = F \cup (A \setminus F)$; zbiór F jest mierzalny, bo jest borelowski; $\lambda_n^*(A \setminus F) = 0$, więc $A \setminus F$ też jest mierzalny. Stąd $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Brakująca implikacja $3 \Rightarrow 5$ idzie tak samo jak $2 \Rightarrow 4$, można też $3 \Rightarrow 2$ w ten sam sposób, jak $2 \Rightarrow 3$ i $4 \Rightarrow 5$. Zostawiam to jako ćwiczenie. $\square$.

Wniosek: każdy zbiór mierzalny jest sumą zbioru borelowskiego (F_σ) i zbioru miary zero.

Twierdzenie 1 $|\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)| = \mathfrak{c}$

Szkic dowodu: Niech Ω będzie zbiorem dobrze uporządkowanym, $|\Omega| = \mathfrak{c}$, takim, że $\forall_{x \in \Omega}$ zbiór $\{y \in \Omega : y < x\}$ jest przeliczalny.

Oznaczmy: $1 = \inf \Omega$, $N(x)$ — następnik x;

Jeżeli $\mathcal{A} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$, to $\mathcal{A}^c = \{$dopełnienia zbiorów z $\mathcal{A}\}$

$\mathcal{A}_\sigma = \{$przeliczalne sumy zbiorów z $\mathcal{A}\}$

i niech $\mathcal{F}_1 = \{$otwarte i domknięte podzbiory $\mathbb{R}^n\}$.

Dalej definiujemy $\mathcal{F}_x$ dla $x \in \Omega$ przez indukcję (pozaskończoną):

- jeżeli $x = N(y)$, to $\mathcal{F}_x = (\mathcal{F}_y)_\sigma \cup ((\mathcal{F}_y)_\sigma)^c$
- jeżeli x jest graniczny, to $\mathcal{F}_x = \bigcup_{y<x} \mathcal{F}_y$.

Wykażemy, że $\bigcup_{x \in \Omega} \mathcal{F}_x = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Oczywiście $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$;
jeżeli $\forall_{y<x} \mathcal{F}_y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, to z def. $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,
więc na mocy zasady indukcji $\forall_{x\in\Omega} \mathcal{F}_x \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,
a zatem $\bigcup_{x\in\Omega} \mathcal{F}(x) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Z drugiej strony wykażemy, że $\bigcup_{x\in\Omega} \mathcal{F}_x$ jest σ-ciałem.
~~Jeżeli bowiem z A_n~~
Sprawdzimy, że jeżeli $A_1, A_2, \ldots \in \bigcup_{x\in\Omega} \mathcal{F}_x$, to $\bigcup_i A_i \in \bigcup_{x\in\Omega} \mathcal{F}_x$
pozostałe własności dowodzi się tak samo (lub łatwiej).

Dla $i \in \mathbb{N}$ niech $A_i \in \mathcal{F}_{x_i}$. Zbiór $\{x_1, x_2, \ldots\}$ jest przeliczalny, więc w Ω istnieje z większy/równy od wszystkich x_i: $\exists_{z\in\Omega} \forall_i\ x_i \leq z$.

Wtedy $\forall_i\ A_i \in \mathcal{F}_z$, skąd $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in (\mathcal{F}_z)_\sigma \subset \mathcal{F}_{N(z)} \subset \bigcup_{x\in\Omega} \mathcal{F}_x$

Tak więc $\bigcup_{x\in\Omega} \mathcal{F}_x = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$; skoro $|\Omega| = \aleph_1$ i $\underbrace{\forall_{x\in\Omega} |\mathcal{F}_x| = \mathfrak{c}}_{\text{prosta indukcja}}$,

to $|\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)| = \mathfrak{c}$. $\square$.

Twierdzenie 2

Zbiorów miary zero jest $2^{\mathfrak{c}}$.

Dowód: Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem miary zero mocy continuum. Dla $n > 1$ możemy przyjąć za A hiperpłaszczyznę, dla $n=1$ np. zbiór Cantora.
Wtedy każdy podzbiór A jest miary zero, więc zbiorów miary zero w $\mathbb{R}^n$ jest co najmniej $|2^A| = 2^{\mathfrak{c}}$, a więcej być oczywiście nie może.

__Wniosek__ Zbiorów mierzalnych jest $2^{\mathfrak{c}}$, jest ich więc znacznie więcej niż borelowskich.

__Twierdzenie__: Jeżeli P jest prostopadłościanem domkniętym w $\mathbb{R}^n$, to $\lambda_n^*(P) = \mathrm{vol}(P)$.

__Dowód__: Oczywiście $\lambda_n^*(P) \leq \mathrm{vol}(P)$, bo P pokrywa sam siebie.

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy rodzinę prostopadłościanów $\{R_i\}$ taką, że $P \subset \bigcup_i R_i$, $\sum_i \mathrm{vol}(R_i) \leq \lambda_n^*(P) + 2\varepsilon$.

Zastąpmy każdy z R_i minimalnie większym prostopadłościanem otwartym $\tilde{R}_i \supset R_i$, $\mathrm{vol}(\tilde{R}_i) = \mathrm{vol}(R_i) = \varepsilon/2^i$.

Wtedy $\sum_i \mathrm{vol}(\tilde{R}_i) \leq \lambda_n^*(P) + \varepsilon$.

Rodzina $\{\tilde{R}_i\}$ tworzy (otwarte) pokrycie zbioru P, który jest zwarty, możemy więc z $\{\tilde{R}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ wybrać podpokrycie $\{\tilde{R}_1, \ldots, \tilde{R}_m\}$ skończone.

Niech $d > 0$ będzie liczbą Lebesgue'a tego pokrycia.

Dzielimy P na k^n małych prostopadłościanów, dzieląc każdą krawędź P na k równych części; dla dostatecznie dużych k średnica każdego małego prostopadłościanu P_j jest mniejsza niż d, więc $\exists_{i(j)}\ P_j \subset \tilde{R}_{i(j)}$.

niektóre P_j być może liczymy wielokrotnie

Stąd $$\mathrm{vol}(P) = \sum_{j=1}^{k^n} \mathrm{vol}(P_j) \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{\{j : P_j \in \tilde{R}_i\}} \mathrm{vol}(P_j) \leq \sum_{i=1}^{m} \mathrm{vol}(\tilde{R}_i) \leq \lambda_n^*(P) + \varepsilon.$$

bo prostopadłościany P_j w R_i stykają się co najwyżej ścianami i z dowolności $\varepsilon>0$ $\quad vol(P) \leq \lambda_n^*(P)$.

<u>Twierdzenie</u>: Jeżeli μ^* jest miarą zewnętrzną borelowską na $\mathbb{R}^n$ taką, że dla wszystkich (niezdegenerowanych) przedziałów P $\quad 0<\mu^*(P)<\infty$ oraz $\forall_{x\in\mathbb{R}^n}$ $\mu^*(A)=\mu^*(A+x)$, to $\mathcal{F}(\mu^*)=\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ oraz istnieje ~~c~~ $c>0$ tż $\mu^* = c\cdot\lambda_n^*$.

<u>Dowód</u>

Najpierw <u>definicja</u>: kostka diadyczna to kostka w $\mathbb{R}^n$, której wszystkie wierzchołki leżą w punktach o współrzędnych $\frac{k}{2^m}$, $k\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, a krawędź ma długość $\frac{1}{2^m}$

<u>Lemat 1</u>: Każdy otwarty podzbiór U przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest sumą przeliczalnej rodziny kostek diadycznych o wnętrzach parami rozłącznych.

Dowód zostawiam jako <u>ćwiczenie</u>

<u>Ćwiczenie 2</u>: Kula domknięta <u>nie jest</u> sumą przelicz. rodziny kostek diadycznych.

<u>Lemat 2</u> Jeżeli $H\subset\mathbb{R}^n$ jest $(n-1)$-wymiarową podprzestrzenią liniową, to $\mu^*(H)=0$.

<u>Dowód</u>: Niech $H_m = H\cap B(0,m)$ i niech $\|v\|=1$, $v\perp H$.

$$H_{m,q} = H_m+q.$$

Łatwo można sprawdzić, że $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} H_{m,q} \subset B(0,m+1) \subset [-(m+1), m+1]^n =$

Z założenia $\mu^*([-(m+1), m+1]^n) < \infty$, ale ta kostka zawiera przeliczalnie wiele zbiorów $H_{m,q}$ i oczywiście $\mu^*(H_{m,q}) = \mu^*(H_m)$ i $H_{m,q}$ są rozłączne. To dowodzi, że $\mu^*(H_{m,q}) = \mu^*(H_m) = 0$.
Na koniec $\mu^*(H) = \lim_{m\to\infty} \mu^*(H_m) = 0$. $\square$

Przystąpmy do dowodu twierdzenia.

Niech $\xi^* = \frac{\mu^*}{\mu^*([0,1]^n)}$. Wykażemy, że $\xi^* = \lambda_n^*$, na $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

- z definicji ξ^* mamy $\xi^*([0,1]^n) = 1 = \lambda_n^*([0,1]^n)$
- Podzielmy $[0,1]^n$ na 2^{nk} kostek diadycznych o krawędzi $\frac{1}{2^k}$, dzieląc każdą krawędź na 2^k równych części. Kostki te stykają się tylko brzegami, które na mocy Lematu 2 są miary zero.
~~Stąd~~ Oczywiście każdą kostkę diadyczną o krawędzi $\frac{1}{2^k}$ możemy dostać przesuwając $[0,\frac{1}{2^k}]^n$; stąd

$$\underbrace{\xi^*([0,1]^n)}_{=1} = 2^{nk}\,\xi^*([0,\tfrac{1}{2^k}]^n) \Rightarrow \xi^*([0,\tfrac{1}{2^k}]^n) = \underbrace{\frac{1}{2^{nk}}}_{=\lambda_n^*([0,\frac{1}{2^k}]^n)}$$

W ten sposób wykazaliśmy, że λ_n^* i ξ^* są równe na kostkach diadycznych.

• Z Lematu 1 każdy zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^n$ możemy przedstawić jako sumę przeliczalnej rodziny kostek diadycznych, stykających się co najwyżej brzegami (które z Lematu 2 są miary zero),

$U = \bigcup_i P_i$.

Stąd $\xi^*(U) = \sum_i \xi^*(P_i) = \sum_i \lambda_n^*(P_i) = \lambda_n^*(U)$.

• Niech $G \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie typu G_δ i ograniczony. Wtedy istnieje ciąg <u>zstępujący</u> (dlaczego?) zbiorów otwartych U_k t.ż. $G = \bigcap_{k=1}^\infty U_k$, t.ż. U_1 jest ograniczony, więc

$$\xi^*(G) = \lim_{k\to\infty} \xi^*(U_k) = \lim_{k\to\infty} \lambda_n^*(U_k) = \lambda_n^*(G).$$

• Niech $Z \subset \mathbb{R}^n$ będzie ograniczony i miary Lebesgue'a zero. Wtedy $\xi^*(Z) = 0$, bo ~~Dowodzi~~ $\forall_{\varepsilon > 0}$ istnieje G typu G_δ t.ż. $Z \subset G$,

$\lambda_n^*(G) = \lambda_n^*(Z) = 0$. Możemy też bso założyć, że G jest ograniczony, bo jeżeli $Z \subset B(0,m)$, to w miejsce G możemy wziąć $G' = G \cap B(0;m)$ – – to też jest zbiór typu G_δ, $G' \supset Z$.

Ostatecznie $\xi^*(Z) \leq \xi^*(G) = \lambda_n^*(G) = 0$.

• niech $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ będzie ograniczony,
wtedy A jest mierzalny wzgl. ξ^*, bo jest
postaci $G \setminus Z$, gdzie G jest typu G_δ
(a więc jest borelowski, a z zał. ξ^* jest borelowska)
a zbiór $Z = G \setminus A$ jest miary ξ^* zero, więc
jest ξ^*-mierzalny.
Mamy zatem, biorąc $G \supset A$ t.że $\lambda_n^*(G) = \lambda_n^*(A)$
(możemy bso przyjąć, że G ograniczony)

$$\xi^*(A) + \underbrace{\xi^*(G \setminus A)}_{\substack{=0,\text{ bo} \\ \text{na zbiorach ogr.} \\ \text{miary 0 } \xi^* = \lambda_n^*}} = \xi^*(G)$$

$$\xi^*(G) = \lambda_n^*(G) = \underbrace{\lambda_n^*(G \setminus A)}_{=0} + \lambda_n^*(A)$$

i stąd $\xi^* = \lambda_n^*$ na A mierzalnych
i ograniczonych.
Na koniec, jeżeli $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, to $A_m = A \cap B(0,m)$
to wstępująca rodzina zbiorów mierzalnych, więc

$$\xi^*(A) = \lim_{m \to \infty} \xi^*(A_m) = \lim_{m \to \infty} \lambda_n^*(A_m) = \lambda_n^*(A).$$

Stąd $\xi^* = \lambda_n^*$ na $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \mathcal{F}(\xi^*) = \mathcal{F}(\lambda_n^*) = \mathcal{L}(\mathbb{R}$

i $\mu^* = \mu^*([0,1]^n) \cdot \lambda_n^*$.

$\square$.