Analiza matematyczna
II.1 z gwiazdką

Zasady zaliczania

ćwiczenia	30 punktów
kolokwium	30 punktów
egzamin pisemny	40 punktów
	100 punktów

a po tym wszystkim i tak będzie egzamin ustny...

Literatura:

skrypty: Pawła Strzeleckiego i Michała Krycha

podręczniki: Andrzeja Birkholca
Analiza matematyczna. Funkcje wielu zmiennych

Grigorija M. Fichtenholza
Rachunek różniczkowy i całkowy

Waltera Rudina
Podstawy analizy matematycznej
oraz Analiza rzeczywista i zespolona

Krzysztofa Maurina Analiza. Elementy

Laurenta Schwartza
Kurs analizy matematycznej

Halseya Roydena i Patricka Fitzpatricka
Real analysis

Eliasa Steina i Ramiego Shakarchiego
Real Analysis: measure theory, integration and Hilbert spaces.

Zbiory zadań: Demidowicz, zadania z książki Birkholca, dawna Jawna Jula, zadania w książkach Roydena i Steina.

Rachunek różniczkowy wielu zmiennych

Większą część tego semestru zajmie nam rachunek różniczkowy wielu zmiennych, a więc badanie metodami analizy matematycznej funkcji określonych na podzbiorach skończenie- i nieskończenie wymiarowych przestrzeni liniowych.

Zajmować się będziemy przede wszystkim funkcjami określonymi na podzbiorach n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ razy}} \ni (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x,$$

ale warto mieć też w pamięci ważne przykłady przestrzeni nieskończenie wymiarowych:

- przestrzenie ciągowe
  - ℓ^p, $1 \le p < \infty$, przestrzeń wszystkich ciągów rzeczywistych $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takich, że $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty$
  - ℓ^∞ przestrzeń wszystkich ciągów rzeczywistych ograniczonych
  - c przestrzeń wszystkich zbieżnych ciągów rzeczywistych
  - c_0 przestrzeń wszystkich ciągów rzeczywistych zbieżnych do zera.

Analogicznie, biorąc ciągi o wyrazach w $\mathbb{C}$, definiujemy przestrzenie $l^p(\mathbb{C})$, $l^\infty(\mathbb{C})$, $c(\mathbb{C})$ i $c_0(\mathbb{C})$.

– przestrzenie funkcyjne:

- dla dowolnego $\Omega \subset \mathbb{R}$ rozważamy

  $C(\Omega)$ – przestrzeń funkcji ciągłych na Ω

  $C_b(\Omega)$ – przestrzeń funkcji ciągłych i ograniczonych na Ω

  $C_0(\Omega)$ – przestrzeń funkcji ciągłych o nośniku zwartym, zawartym w Ω.

{Przypomnienie: nośnik f, ozn. $\operatorname{supp} f$, to zbiór
$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$ to oznacza domknięcie }

- jeżeli Ω jest otwarty, możemy mówić o

  $C^k(\Omega)$ – funkcje k-krotnie różniczkowalne na Ω

  $C^\infty(\Omega)$ – funkcje ∞-wiele razy różniczkowalne na Ω

  $C^\omega(\Omega)$ – funkcje analityczne na Ω.

Inną ważną klasę przestrzeni funkcyjnych – – przestrzenie Lebesgue'a – poznamy pod koniec semestru.

<u>Zadanko</u>: Gdy $q<p$, to $l^q \subsetneq l^p \subsetneq c_0 \subsetneq c \subsetneq l^\infty$.

Niech X będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$.

Iloczynem skalarnym na X nazywamy formę dwuliniową, symetryczną i dodatnio określoną,

tzn. $\langle \cdot , \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ liniowa w każdej z dwóch zmiennych

$\forall_{x,y \in X} \quad \langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$ symetria

$\forall_{x \in X} \quad \langle x,x \rangle \geq 0$ oraz $\langle x,x \rangle = 0 \iff x = 0$

(dodatnia określoność).

Z GALu wiemy, że każda forma dwuliniowa ma macierz, skąd od razu wynika, że każdy iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^n$ jest postaci $\langle x,y \rangle = x^T \cdot A \cdot y$, gdzie $A \in M_{n \times n}$ jest macierzą symetryczną i dodatnio określoną.

Najważniejszy przykład to tzw. iloczyn standardowy na $\mathbb{R}^n$, odpowiadający $A = id$.

$$\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Inne przykłady: na ℓ^2: $\langle a,b \rangle_{\ell^2} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$

na $C([a,b])$ możemy wprowadzić

$$\langle f,g \rangle_{L^2} = \int_a^b f(t) g(t)\, dt.$$

Uwaga: Gdy rozważamy przestrzenie liniowe nad $\mathbb{C}$, wprowadzamy, zamiast iloczynu skalarnego, tak zwany iloczyn hermitowski. Nie jest on formą dwu-, tylko tzw. półtoraliniową; skośnie symetryczną

- $\langle a+b,c\rangle = \langle a,c\rangle + \langle b,c\rangle$; $\langle a,b+c\rangle = \langle a,b\rangle + \langle a,c\rangle$,
- $\langle \lambda a,b\rangle = \lambda\langle a,b\rangle$, ale $\langle a,\lambda b\rangle = \overline{\lambda}\langle a,b\rangle$ dla $\lambda\in\mathbb{C}$

a więc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ jest liniowy względem pierwszej zmiennej

półtoraliniowość

- $\langle a,b\rangle = \overline{\langle b,a\rangle}$ } skośna symetria.

Na $\mathbb{C}^n$ standardowy iloczyn hermitowski to

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}.$$

Inne ważne pojęcie to <u>norma</u>

<u>Def</u>: <u>Normą</u> na przestrzeni liniowej X nazywamy funkcję $\|\cdot\|: X \to [0,\infty)$, spełniającą

- $\|a\|=0 \Leftrightarrow a=0$ (dodatniość normy)
- $\forall_{\substack{\lambda\in\mathbb{R}\\ a\in X}} \|\lambda a\| = |\lambda|\|a\|$ (dodatnia jednorodność)
- $\|a+b\|\leq\|a\|+\|b\|$ dla wszystkich $a,b\in X$ (wypukłość normy / nierówność trójkąta)

Bez trudu możemy sprawdzić, że jeżeli $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest iloczynem skalarnym na X, to $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ jest normą, mówimy wówczas, że norma $\|\cdot\|$ pochodzi od iloczynu skalarnego $\langle \cdot, \rangle$.

Przykłady norm:

w $\mathbb{R}^n$:

- norma euklidesowa $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

  pochodzi od standardowego iloczynu skalarnego

- p-normy $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$ dla $p \geq 1$

- norma supremum: $\|x\|_\infty = \sup\limits_{i=1,2,\dots,n} |x_i|$

Zadanko: $\|\cdot\|_\infty$ nie pochodzi od żadnego iloczynu skalarnego, $\|\cdot\|_p$ pochodzi od iloczynu skalarnego wtedy i tylko wtedy, gdy $p=2$.

Normy na innych przestrzeniach:

na ℓ^p : $\|a\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_i|^p\right)^{1/p}$

na ℓ^∞, c, c_0 : $\|a\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$

jeżeli K jest zwarty, to

na $C(K)$ $\|f\|_\infty = \sup_K |f|$

I jeszcze jedno ważne pojęcie:

<u>metryką</u> w zbiorze A nazywamy funkcję $d: A \times A \to [0,\infty)$ spełniającą dla dowolnych $x,y,z \in A$

- $d(x,y) = 0 \iff x = y$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Bez trudu można sprawdzić, że jeżeli $\|\cdot\|$ jest normą na X, to $d(x,y) = \|x-y\|$ zadaje metrykę na X. Nie każda jednak metryka powstaje w ten sposób.

<u>Zadanie</u>: Sprawdzić, że $d(x,y) = \begin{cases} |x_1 - y_1| & \text{gdy } x_2 = y_2 \\ |x_1| + |y_1| + |x_2 - y_2| & \text{gdy } x_2 \neq y_2 \end{cases}$ zadaje metrykę na $\mathbb{R}^2$ i wykazać, że nie pochodzi ona od żadnej normy.

Mając na X normę $\|\cdot\|$ lub metrykę d możemy mówić o ciągach zbieżnych:

ciąg (a_n) elementów przestrzeni X jest zbieżny do $b \in X$, jeżeli

$$\|a_n - b\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad (\text{ew. } d(a_n, b) \xrightarrow{n\to\infty} 0).$$

Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem Cauchy'ego, jeżeli $\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0}{\exists}\ \underset{n,m>n_0}{\forall}\ \|a_n - a_m\| < \varepsilon$

$(d(a_n, a_m) < \varepsilon)$

Mówimy, że przestrzeń unormowana $(X, \|\cdot\|)$ (ew. p-ń metryczna (X, d)) jest <u>zupełna</u>, jeżeli każdy ciąg Cauchy'ego w X jest zbieżny.

<u>Przykłady</u>: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ jest zupełna (poprzedni rok).

· przyjrzyjmy się $\mathbb{R}^n$ z normą euklidesową.

Co oznacza, że (a_m) – ciąg elementów $\mathbb{R}^n$ – dąży do $b \in \mathbb{R}^n$?

$a_m = (a_m^1, \dots, a_m^n)$, $b = (b^1, \dots, b^n)$

współrzędne

$$\| a_m - b \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_m^i - b^i|^2} \to 0$$

$$\begin{array}{c} \| a_m - b \| \\ \geq \\ |a_m^i - b^i| \quad \text{dla } i = 1, \dots, n \\ \geq \\ 0 \end{array}$$

więc $\| a_m - b \| \to 0 \implies |a_m^i - b^i| \to 0$ dla $i = 1, \dots, n$

(jest też $\Leftarrow$)

a więc zbieżność w $\mathbb{R}^n$ jest po współrzędnych.

Jeżeli (a_m) jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathbb{R}^n$,

tzn. $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0} \forall_{m,k > n_0} \; \| a_m - a_k \| < \varepsilon$, to od razu

sprawdzamy, że $|a_m^i - a_k^i| < \varepsilon$ dla $i = 1, \dots, n$

o ile $m, k > n_0$,

więc taki ciąg na każdej współrzędnej ma

ciąg Cauchy'ego o wyrazach w $\mathbb{R}$,

więc na każdej współrzędnej jest ciąg zbieżny.

Skoro zbieżność w $\mathbb{R}^n$ jest po współrzędnych,

to (a_m) jest zbieżny. Tak wykazaliśmy,

że $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$ jest zupełna.

Definicja Przestrzeń liniową X, wyposażoną w normę $\|\cdot\|_X$ taką, że X z tą normą jest zupełna, nazywamy *przestrzenią Banacha*

Wykazaliśmy, że $\mathbb{R}^n$ z normą standardową jest przestrzenią Banacha. Podobnie, jeżeli $K \subset \mathbb{R}$ jest zwarty, to $C(K)$ z normą $\|\cdot\|_\infty$ jest przestrzenią Banacha: warunek Cauchy'ego w normie $\|\cdot\|_\infty$ to nic innego jak jednostajny warunek Cauchy'ego, więc każdy ciąg Cauchy'ego w $C(K)$ jest (jednostajnie, czyli w normie $\|\cdot\|_\infty$) zbieżny, a granica jest funkcją ciągłą na K.

Jeżeli na przestrzeni liniowej X mamy zadany iloczyn skalarny $\langle \cdot , \cdot \rangle_X$ taki, że w normie $\|x\|_X = \langle x, x \rangle^{1/2}$ pochodzącej od tego iloczynu przestrzeń X jest zupełna (czyli jest przestrzenią Banacha) to X nazywamy *przestrzenią Hilberta*.

Przykłady: • $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym jest przestrzenią Hilberta

• przestrzeń ℓ^2 z iloczynem skalarnym

$$\langle a, b \rangle_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$ jest przestrzenią Hilberta (ćwiczenia).

Pozostałe przestrzenie ℓ^p są przestrzeniami Banacha.

W przestrzeniach Banacha możemy uprawiać sensowną analizę. Na początek jeszcze trochę topologii:

Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie p-nią Banacha.

<u>Def:</u>

kula otwarta o środku w $x \in X$ i prom. $r \geq 0$ to $B(x,r) = \{ y \in X : \|x-y\| < r \}$

kula domknięta

$$\overline{B(x,r)} = \{ y \in X : \|x-y\| \leq r \}$$

- $A \subset X$ jest <u>zbiorem otwartym</u>, gdy
$$\forall_{x \in A} \exists_{r > 0} \; B(x,r) \subset A$$

- $A \subset X$ jest <u>zbiorem domkniętym</u>, gdy dla każdego ciągu (a_n) elementów zbioru A, jeżeli $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ (czyli $\|a_n - b\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$), to $b \in A$

<u>Zadanko</u>: $A \subset X$ jest domknięty $\Leftrightarrow$ $X \setminus A$ jest otwarty.

- $K \subset X$ jest <u>zwarty</u>, gdy z każdego ciągu elementów zbioru K można wybrać podciąg zbieżny.

łatwo sprawdzamy (proszę sobie przypomnieć dowód tw. Arzeli - Ascolego), że zbiór zwarty musi być domknięty i ograniczony.

W $\mathbb{R}^n$ te 2 warunki wystarczają, każdy zbiór domknięty i ograniczony jest zwarty, ale (jak mówi twierdzenie A.-A.) na przykład w $\left(C(K), \|\cdot\|_\infty\right)$ już nie.

Pytanie: Które podzbiory przestrzeni ℓ^p są zwarte?