Drugie twierdzenie o wartości średniej

Niech $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$, f monotoniczna, g całk. w s.R.
Wówczas istnieje $\xi \in [a,b]$ takie, że

$$(*) \quad \int_a^b f(t)g(t)dt = f(a)\int_a^\xi g(t)dt + f(b)\int_\xi^b g(t)dt$$

~~Lem~~ Uwaga: Możemy założyć, dowodząc powyższe twierdzenie, że f jest nierosnąca (w przeciwnym razie $-f$ jest nierosnąca, a z $(*)$ wypisanego z $-f$ w miejsce f wynika już $(*)$ w takiej postaci, jak wyżej).

Lemat: Niech f i g będą jak w powyższym twierdzeniu i załóżmy dodatkowo, że f jest nieujemna. Wówczas istnieje $\xi \in [a,b]$ takie, że

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a)\int_a^\xi g(t)dt.$$

Dowód lematu

Niech P_n będzie podziałem $[a,b]$ na n równych odcinków, $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)dt =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[f(x_{i-1}) + (f(t) - f(x_{i-1}))\right] g(t)dt$$

$$= \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(t)dt + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(t) - f(x_{i-1}))g(t)dt$$

$$= \qquad I_n \qquad + \qquad J_n$$

Zacznijmy od oszacowania J_n:

$$|J_n| = \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(t) - f(x_{i-1})) g(t)\,dt \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t) - f(x_{i-1})|\,|g(t)|\,dt$$

funkcja g jest całk. w s.R. na $[a,b]$, jest więc ograniczona. Niech $L>0$ t.ż. $\forall_{t\in[a,b]} |g(t)| \leq L$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x_{i-1}) - f(x_i)) \cdot L\,dt$$

bo f nierosnąca

$$= L \sum_{i=1}^{n} (f(x_{i-1}) - f(x_i))(x_i - x_{i-1})$$

$$= L \cdot \left[\overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) \right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

stąd $\lim_{n\to\infty} J_n = 0$.

Teraz I_n:

Niech $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$. Wiemy, że G jest ciągła na $[a,b]$;

niech $m = \min_{[a,b]} G$, $M = \max_{[a,b]} G$.

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \left[G(x_i) - G(x_{i-1}) \right]$$

$$= f(x_0)\left[G(x_1) - G(x_0)\right] + f(x_1)\left[G(x_2) - G(x_1)\right] + \ldots + f(x_{n-1})\left[G(x_n) - G(x_{n-1})\right]$$

przekszt. Abela

$$= -f(x_0)G(x_0) + \left[f(x_0) - f(x_1)\right] G(x_1) + \ldots + \left[f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})\right] G(x_{n-1}) + f(x_{n-1}) G(x_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \left[f(x_{i-1}) - f(x_i)\right] G(x_i) + f(x_{n-1}) G(b) = \star$$

$G(x_0) = G(a) = 0$

Funkcja f jest nierosnąca, więc $\left[f(x_{i-1}) - f(x_i)\right] \geq 0$.

stąd, dla każdego $i \in \{1, \dots, n-1\}$,

(1) $$m\left[f(x_{i-1}) - f(x_i)\right] \le G(x_i)\left[f(x_{i-1}) - f(x_i)\right] \le M\left[f(x_{i-1}) - f(x_i)\right]$$

i również

(2) $$m\, f(x_{n-1}) \le f(x_{n-1}) \cdot G(b) \le M\, f(x_{n-1})$$

bo f jest nieujemna na $[a,b]$

Dodając stronami (1) dla $i = 1, 2, \dots, n-1$ oraz (2)

dostajemy, że ~~$I_n \Rightarrow \star \le$~~

$$m\left[\sum_{i=1}^{n-1}\left[f(x_{i-1}) - f(x_i)\right] + f(x_{n-1})\right] \le \star = I_n \le M\left[\sum_{i=1}^{n-1}\left[f(x_{i-1}) - f(x_i)\right] + f(x_{n-1})\right]$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$m\, f(x_0) = m f(a) \qquad\qquad \cancel{\le}\, M f(x_0) = M f(a)$$

Skoro funkcja $G(x)$ jest ciągła na $[a,b]$, to również

$\tilde{G}(x) = f(a)\, G(x)$ jest ciągła, $\min\limits_{[a,b]} \tilde{G} = m f(a)$, $\max\limits_{[a,b]} \tilde{G} = M f(a)$

~~Liczba I_n leży pomiędzy~~

Mamy też

$$m f(a) + J_n \le \int_a^b f(t) g(t)\, dt = I_n + J_n \le M f(a) + J_n$$

$$\Big\downarrow {\scriptstyle n \to \infty} \qquad\qquad\qquad\qquad \Big\downarrow {\scriptstyle n \to \infty}$$

$$m f(a) \qquad\qquad\qquad\qquad M f(a)$$

czyli $$m f(a) \le \int_a^b f(t) g(t)\, dt \le M f(a).$$

Z własności Darboux dla funkcji $\tilde{G}$ istnieje $\xi \in [a,b]$

takie, że

$$\int_a^b f(t) g(t)\, dt = \tilde{G}(\xi) = f(a)\, G(\xi) = f(a) \int_a^\xi g(t)\, dt. \qquad \square$$

Dowód II twierdzenia o wartości średniej.

Jeżeli f jest nierosnąca (a możemy to, na mocy uwagi, założyć), to $\tilde{f}(x) = f(x) - f(b)$ jest nierosnąca i nieujemna na $[a,b]$.

Na mocy Lematu istnieje $\xi \in [a,b]$ takie, że

$$\int_a^b \tilde{f}(t)g(t)\,dt \overset{\text{Lemat}}{=} \tilde{f}(a)\int_a^{\xi} g(t)\,dt = [f(a) - f(b)]\int_a^{\xi} g(t)\,dt$$

$$\int_a^b [f(t) - f(b)]g(t)\,dt = \int_a^b f(t)g(t)\,dt - f(b)\int_a^b g(t)\,dt.$$

Stąd

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_a^{\xi} g(t)\,dt + f(b)\left[\int_a^b g(t)\,dt - \int_a^{\xi} g(t)\,dt\right]$$

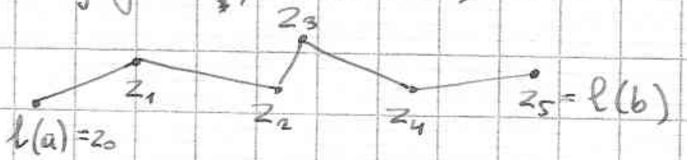
$$= f(a)\int_a^{\xi} g(t)\,dt + f(b)\int_{\xi}^b g(t)\,dt. \quad \square$$

Długość krzywej

Def: Krzywą (bez samoprzecięć) w $\mathbb{R}^m$ nazywamy ciągłe i różnowartościowe przekształcenie $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}^m$.

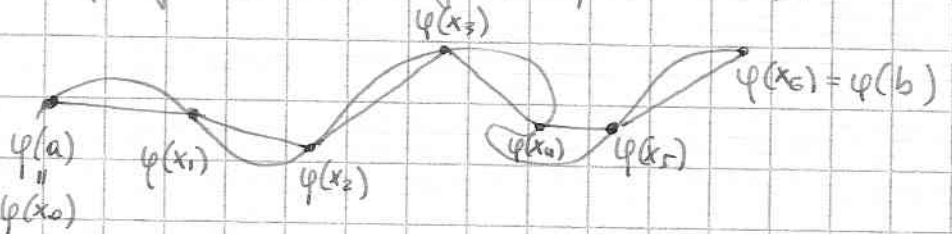
Jak zdefiniować (i jak obliczać) długość krzywych?

1. Umiemy obliczać długość łamanych (a więc takich krzywych ℓ, które są kawałkami liniowe).



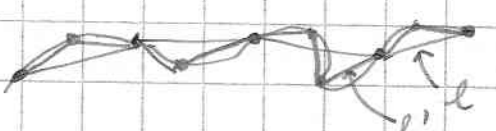
$$d(\ell) = \sum_{i=1}^{5} \|z_i - z_{i-1}\|$$

2. Jeżeli obraz φ nie jest łamaną, to wpisujemy w krzywą φ łamaną ℓ



Widzimy, że:

- jak byśmy (byle sensownie) nie zdefiniowali długości krzywej φ, długość łamanej ℓ jest od niej nie większa.
- wybór łamanej ℓ to inaczej wybór podziału P_ℓ odcinka $[a,b]$ $P_\ell = \{x_0, x_1, \dots, x_6\}$; możemy utożsamiać łamaną z podziałem.
- z nierówności trójkąta natychmiast wynika, że jeżeli $P_\ell \subset P_{\ell'}$ (tj podział $P_{\ell'}$ jest rozdrobnieniem podziału P_ℓ), to $d(\ell) \le d(\ell')$:



- im mniejszą średnicę ma podział P_ℓ, tym lepiej łamana ℓ przybliża krzywą φ (a więc długość ℓ przybliża niezdefiniowaną jeszcze długość φ).

Definicja: Długość krzywej $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ to supremum długości wpisanych w nią łamanych, a więc jeżeli $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x))$, to

$$d(\varphi) = \sup_{\substack{P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\} \\ \text{podział } [a,b]}} \sum_{i=1}^{n} \|\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})\|$$

$$= \sup_P \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\varphi_1(x_i)-\varphi_1(x_{i-1})]^2 + [\varphi_2(x_i)-\varphi_2(x_{i-1})]^2 + \ldots + [\varphi_m(x_i)-\varphi_m(x_{i-1})]^2}$$

Dla uproszczenia dalej będziemy rozważać krzywe płaskie (tj $m=2$); rachunki dla $m>2$ są dokładnie takie same, tylko zajmują więcej miejsca.

Załóżmy, że $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ jest klasy C^1, tj φ_1 i φ_2 są różniczkowalne, a ich pochodne są ciągłe. Wówczas zachodzi

Twierdzenie: Jeżeli $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ jest różnowartościowa i klasy C^1, to

$$d(\varphi) = \int_a^b \sqrt{\varphi_1'(x)^2 + \varphi_2'(x)^2}\,dx$$

(dla $m>2$ pod pierwiastkiem trzeba dodać $\varphi_3'(x)^2 + \varphi_4'(x)^2 + \ldots + \varphi_m'(x)^2$).

Dowód: Wybierzmy dowolny podział P odcinka $[a,b]$. Jest z nim związana łamana l_P wpisana w φ;

$$d(l_P) = \sum_{i=1}^{n} \|\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})\| = \quad \Big\{ P=\{x_0,\ldots,x_n\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi_1(x_i)-\varphi_1(x_{i-1}))^2 + (\varphi_2(x_i)-\varphi_2(x_{i-1}))^2} = (*)$$

i z tw. Lagrange'a o wartości średniej istnieją ξ_i i $\zeta_i \in (x_{i-1}, x_i)$ takie, że

$$(*) = \cancel{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi_1'(\xi_i)^2 + \varphi_2'(\zeta_i)^2}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi_1'(\xi_i)^2(x_i-x_{i-1})^2 + \varphi_2'(\zeta_i)^2(x_i-x_{i-1})^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi_1'(\xi_i)^2 + \varphi_2'(\zeta_i)^2}\,(x_i-x_{i-1})$$

Wielkość $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi_1'(\xi_i)^2 + \varphi_2'(\zeta_i)^2}\,(x_i - x_{i-1}) = (*)$

przypomina sumę całkową $S(f, P, ?)$

dla funkcji $f(x) = \sqrt{\varphi_1'(x)^2 + \varphi_2'(x)^2}$, ale mamy nie jeden, ale dwa punkty z przedziału $[x_{i-1}, x_i]$: ξ_i oraz ζ_i.

Niech $v(x) = \sqrt{\varphi_1'(x)^2 + \varphi_2'(x)^2}$; $I = \int_a^b v(x)\,dx$.

Ustalmy $\varepsilon > 0$.

Wykażemy, że istnieje takie rozdrobnienie Q podziału P, że

$$① \quad d(l_P) \overset{\text{n. } \Delta}{\leq} d(l_Q) < I + \varepsilon$$

oraz

$$② \quad |I - d(l_Q)| < \varepsilon.$$

Z ① i dowolności ε wynika, że $d(l_P) \leq I$

(a więc $d(\varphi) = \sup_{P'} d(l_{P'}) \leq I$, bo P był wybrany dowolnie)

zaś z ② widzimy, że istnieją podziały Q t.ż. $d(l_Q)$ jest dowolnie bliskie I

Stąd ~~sup~~ $d(\varphi) = I$.

Zauważmy, że nierówność $d(l_Q) < I + \varepsilon$ w ① wynika z ②, wystarczy zatem wykazać ②.

Funkcja v jest, jako ciągła, całkowalna w s.R. na $[a,b]$, istnieje więc δ_1 takie, że dla dowolnego podziału $\tilde{P}$ o średnicy mniejszej niż δ_1

$$\overline{S}(v, \tilde{P}) - \underline{S}(v, \tilde{P}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wiemy też, że φ_2' jest ciągła na $[a,b]$, a więc jednostajnie ciągła: istnieje δ_2 t.ż. $|x-y| < \delta_2 \Rightarrow |\varphi_2'(x) - \varphi_2'(y)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$

Niech teraz $Q = \{y_0, y_1, \dots, y_N\}$ będzie jakimkolwiek rozdrobnieniem P spełniającym $\delta(Q) < \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Powtarzając rachunek, który wykonaliśmy dla podziału P, widzimy, że

$$d(\ell_Q) = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\varphi_1'(x_i)^2 + \varphi_2'(\lambda_i)^2}\,(y_i - y_{i-1}),$$

gdzie x_i oraz λ_i należą do odcinka $[y_{i-1}, y_i]$.

$$|d(\ell_Q) - S(v, Q, x)| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \left[\sqrt{\varphi_1'(x_i)^2 + \varphi_2'(\lambda_i)^2} - \sqrt{\varphi_1'(x_i)^2 + \varphi_2'(x_i)^2} \right] (y_i - y_{i-1}) \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \sqrt{\varphi_1'(x_i)^2 + \varphi_2'(\lambda_i)^2} - \sqrt{\varphi_1'(x_i)^2 + \varphi_2'(x_i)^2} \right| (y_i - y_{i-1}) = (*)$$

Oszacujmy ~~potęgowy wyn~~ różnicę pierwiastków:

$$\star = \left| \sqrt{\varphi_1'(x_i)^2 + \varphi_2'(\lambda_i)^2} - \sqrt{\varphi_1'(x_i)^2 + \varphi_2'(x_i)^2} \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{\varphi_1'(x_i)^2 + \varphi_2'(\lambda_i)^2 - \varphi_1'(x_i)^2 - \varphi_2'(x_i)^2}{\sqrt{\varphi_1'(x_i)^2 + \varphi_2'(\lambda_i)^2} + \sqrt{\varphi_1'(x_i)^2 + \varphi_2'(x_i)^2}} \right|$$

chyba, że mianownik jest 0, ale wtedy oba pierwiastki są 0, więc $\star < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$

$$\leq |\varphi_2'(\lambda_i) - \varphi_2'(x_i)| \underbrace{\left| \frac{|\varphi_2'(\lambda_i)| + |\varphi_2'(x_i)|}{\sqrt{\varphi_1'(x_i)^2 + \varphi_2'(\lambda_i)^2} + \sqrt{\varphi_1'(x_i)^2 + \varphi_2'(x_i)^2}} \right|}_{\text{to jest } \leq 1}$$

$$\leq |\varphi_2'(\lambda_i) - \varphi_2'(x_i)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \text{ bo } |\lambda_i - x_i| < \delta(Q) < \delta_2.$$

Stąd $(*) \leq \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{4(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{4}$

Ostatecznie $|d(\ell_Q) - I| \leq |d(\ell_Q) - S(v, Q, x)| + |S(v, Q, x) - I|$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4} + \overline{S}(v, Q) - \underline{S}(v, Q) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

$\square$.

~~Długość okręgu~~

Wniosek: Długość krzywej będącej wykresem funkcji $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, klasy C^1, to $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

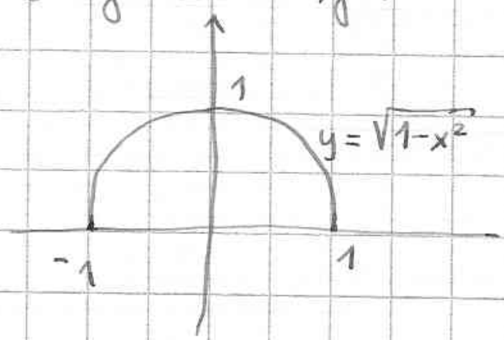
Dowód: Wykres to krzywa $x \xmapsto{\varphi} (x, f(x))$

czyli $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = f(x)$

$$d(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(x))^2 + \varphi_2'(x)^2}\,dx$$

$$= \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Długość okręgu



Metoda 1

Długość półkola to długość wykresu $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ od -1 do 1

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{1+f'(x)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

długość okręgu 1

$$L = 2\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t\,dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = 2\pi$$

$x = \sin t$

$dx = \cos t\,dt$

$x=-1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$

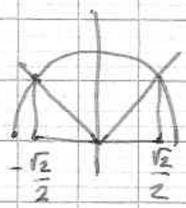
$x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

Uwaga: Oszukaliśmy, choć wynik dobry.

Funkcja $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ nie jest ograniczona na $(-1,1)$, nie jest więc całkowalna!

Metoda 2 To samo, ale obliczymy długość ćwiartki okręgu:

$$L = 4\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dt = 2\pi$$



Tu już nie ma oszustwa – $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ jest ciągła na $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Metoda 3: Okrąg to krzywa $t \xmapsto{\varphi} (\cos t, \sin t)$

Jeżeli chcemy dostać cały okrąg, to $t \in [0, 2\pi]$

Kłopot: $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$, więc nie jest różnowartościowa

To tylko 1 punkt, bez wpływu na długość, więc rachunek daje dobry wynik:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi_1'(x)^2 + \varphi_2'(x)^2}\, dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x}\, dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi$$

Żeby jednak być w pełni w zgodzie z definicjami, możemy obliczyć długość półokręgu ($x \in [0, \pi]$):

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{\varphi_1'(x)^2 + \varphi_2'(x)^2}\, dx = 2\int_0^{\pi} dx = 2\pi.$$