Całka Riemanna

Uwaga: Tę część wykładu prowadziłem z zeszłorocznych notatek; są drobne różnice notacji, w szczególności $S_f(\nu,\xi) = S(f,\nu,\xi)$

~~Przypomnienie~~ Definicja: Funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest na $[a,b]$ całkowalna w sensie Riemanna $\Leftrightarrow$

$\exists_{I\in\mathbb{R}}$ t.ż. dla dowolnego podziału ν odcinka $[a,b]$ z punktowaniem ξ (też dowolnym)

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\quad \delta(\nu)<\delta \Rightarrow |S_f(\nu,\xi)-I|<\varepsilon$$

$$S_f(\nu,\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$$

Przykład: Udowodniliśmy, że funkcje ciągłe na $[a,b]$ są całk. w sensie Riemanna.

Przykład: Funkcja Dirichleta

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

nie jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a,b]$ dla dowolnych $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. (Dlaczego?)

Uwaga: Jeżeli f jest całkowalna na $[a,b]$, to jest na $[a,b]$ ograniczona.

Dowód: (NWprost) Załóżmy, że f jest całkowalna, mamy więc $\forall_{\varepsilon>0}$ podział ν na tyle drobny $(\delta(\nu)<\delta)$, by dla dowolnego punktowania ξ suma całkowa $S_f(\nu,\xi)$ spełniała $I-\varepsilon \le S_f(\nu,\xi)\le I+\varepsilon$.

Wiemy jednak, że f jest nieograniczona na $[a,b]$, a więc jest nieograniczona na którymś z przedziałów $[x_i, x_{i+1}]$. Wybierając zatem odpowiednio $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ możemy (nie ruszając pozostałych składników $S_f(V,\xi)$) uczynić $f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$ dowolnie dużym (co do modułu) – sprzeczność z nierównościami.

Twierdzenie: f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a,b]$ $\Longleftrightarrow$ miara zewnętrzna Jordana zbioru punktów nieciągłości f na $[a,b]$ jest zero.

(uwaga ~~przypomnienie~~: miara zewn. $|A|$ to $\inf \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|$, gdzie I_j - odcinki domknięte niezdeg. do punktu takie, że $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$

czyli pokrywamy A odcinkami, sumujemy ich długości i bierzemy infimum takich sum po wszystkich możliwych pokryciach).

<u>Wniosek</u> z tw. charakteryzującego:
suma i iloczyn funkcji całkowalnych w.s.R ~~jest~~ są całkowalne w s.R.

<u>Dowód:</u> zbiór punktów nieciągłości N_{f+g} / $N_{f\cdot g}$ sumy i iloczynu ~~f~~ dwóch funkcji zawiera się w sumie zbiorów punktów nieciągłości obu tych funkcji $(N_f \cup N_g)$

$$|N_{f+g}| \le \cancel{|N_f|+|N_g|} \; |N_f \cup N_g| \le |N_f| + |N_g| = 0+0=0.$$

i tak samo $|N_{f\cdot g}|$.

<u>Własności całki Riemanna</u>

1. Liniowość

$$\int_a^b [\alpha f(t)+\beta g(t)]dt = \alpha\int_a^b f(t)\,dt + \beta\int_a^b g(t)\,dt$$

oczywiste, bo $S_{\alpha f+\beta g}(\nu,\xi) = \alpha S_f(\nu,\xi) + \beta S_g(\nu,\xi)$.

2. Jeżeli $f(t) \le g(t)$ dla $t\in[a,b]$,
to $\int_a^b f(t)dt \le \int_a^b g(t)dt$ (bo analogiczna nierówność zachodzi dla sum całkowych).

3. $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ dla dow. $c\in(a,b)$

<u>Dowód:</u> Z tw. charakteryzującego f jest całkowalna na $[a,c]$ i na $[c,b]$.

Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że jeżeli μ_1 jest podziałem $[a,c]$, $\delta(\mu_1) < \delta$
μ_2 ——— " ——— $[c,b]$, $\delta(\mu_2) < \delta$
to dla dowolnych punktowań ξ_1, ξ_2

$$\left| S_f(\mu_1, \xi_1) - \int_a^c f(t)dt \right| < \varepsilon/3$$

$$\left| S_f(\mu_2, \xi_2) - \int_c^b f(t)dt \right| < \varepsilon/3$$

i dla dowolnego podziału ν odcinka $[a,b]$ t.że. $\delta(\nu) < \delta$ i punktowania ξ

$$\left| S_f(\nu, \xi) - \int_a^b f(t)dt \right| < \varepsilon/3 \quad (*).$$

Weźmy $\nu = \mu_1 \cup \mu_2$, $\xi = \xi_1 \cup \xi_2$ ← spełniają warunek $\delta(\nu) < \delta$, więc zachodzi $(*)$;

Stąd $S_f(\nu,\xi) = S_f(\mu_1,\xi_1) + S_f(\mu_2,\xi_2)$.

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \int_a^c f(t)dt - \int_c^b f(t)dt \right| \le$$

$$\le \left| \int_a^b f(t)dt - S_f(\nu,\xi) \right| + \left| S_f(\nu,\xi) - \int_a^c f(t)dt - \int_c^b f(t)dt \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \left| S_f(\mu_1,\xi_1) - \int_a^c f(t)dt \right| +$$

$$+ \left| S_f(\mu_2,\xi_2) - \int_c^b f(t)dt \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

ε było dowolne > 0, więc

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

<u>Umowa</u>: jeżeli $a > b$, to $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$.

<u>Uwaga</u>: dla dow. $x, y, z \in [a,b]$

$$\int_x^y f(t)dt = \int_x^z f(t)dt + \int_z^y f(t)dt$$

(my na razie wiemy to dla $z \in (x,y)$)

<u>Dowód</u> — ćwiczenie.

Twierdzenia o wartości średniej

<u>Pierwsze całkowe tw. o w. śr.</u>

Niech $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła

$g: [a,b] \to \mathbb{R}$ całk. w s. R. i nieujemna.

Wówczas istnieje $c \in [a,b]$ tż.

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt \qquad (*)$$

<u>Dowód</u>: Niech $m = \inf_{[a,b]} f \quad \left(= \min_{[a,b]} f\right)$

$$M = \sup_{[a,b]} f$$

$$\forall_{t \in [a,b]} \quad m \leq f(t) \leq M$$

$$\Downarrow$$

$$m g(t) \leq f(t)g(t) \leq M g(t)$$

$$\Downarrow \int_a^b$$

$$m\int_a^b g(t)dt \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq M\int_a^b g(t)dt$$

Jeżeli $\int_a^b g(t)dt = 0$, to równość zachodzi $\forall_{c \in [a,b]}$

4. Jeżeli f jest całkowalna na $[a,b]$,
to $|f|$ też i $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$

(znów ta sama nierówność zachodzi dla sum całkowych, np dla

$$S_f(\nu_n, \xi_n) \quad (\text{np } \xi_n = x_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_f(\nu_n, \xi_n) = \int_a^b f(t)\,dt$$

$$\begin{array}{ccc} |S_f(\nu_n,\xi_n)| & \leq & S_{|f|}(\nu_n,\xi_n) \\ \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle n\to\infty} \\ \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| & \leq & \int_a^b |f(t)|\,dt \end{array}$$

całkowalność $|f|$ – z tw. charakteryzującego.

5. f monotoniczna na $[a,b]$,
to f całkowalna w s. R.

<u>Dowód</u>: zbiór N_f punktów nieciągłości f jest przeliczalny; weźmy $\varepsilon>0$ i niech $N_f = \{y_i : i\in\mathbb{N}\}$. Niech

$$I_1 = \left[y_1 - \frac{\varepsilon}{4}, y_1 + \frac{\varepsilon}{4}\right],\quad I_2 = \left[y_2 - \frac{\varepsilon}{8}, y_2 + \frac{\varepsilon}{8}\right], \dots,$$

$$I_i = \left[y_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, y_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right]$$

Oczywiście $N_f \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \dots = \varepsilon$

stąd $|N_f| < \varepsilon$, a że ε dowolne >0,
to $|N_f| = 0$.

<u>Wniosek z 2.</u>: $\int_a^b f(t)\,dt \leq \sup_{[a,b]} f\,(b-a)$
$\geq \inf_{[a,b]} f\cdot(b-a)$. $\Rightarrow \int_a^a f(t)\,dt = 0.$

Kryterium całkowalności w s. R.

Niech $\nu = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ będzie podziałem $[a,b]$

Oscylacją ω_i funkcji f na odcinku $[x_i, x_{i+1}]$ nazywamy

$$\omega_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f - \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f .$$

Tw. Funkcja ograniczona f jest całkowalna w s. R. na $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0}$ tż. dla dowolnego podziału ν jeżeli $\delta(\nu)<\delta$, to

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i (x_{i+1} - x_i) < \varepsilon .$$

Dowód:

$\Rightarrow$ wiemy, że dla dowolnego podziału ν spełniającego $\delta(\nu)<\delta$ i dowolnych $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i) - \int_a^b f(t)\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

oznaczmy $M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f$, $m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f$

$$A = \left| \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1}-x_i) - \int_a^b f(t)\,dt \right| \le \frac{\varepsilon}{3}$$

$$B = \left| \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1}-x_i) - \int_a^b f(t)\,dt \right| \le \frac{\varepsilon}{3} .$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i (x_{i+1}-x_i) \right| \le A+B \le \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon .$$

Jeżeli $\int_a^b g(t)\,dt \neq 0$, to

$$m = \min_{[a,b]} f(t) \leq \frac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt} \leq \max_{[a,b]} f = M$$

$$\ f(x_m) \qquad\qquad\qquad\qquad f(x_M)$$

i z własności Darboux istnieje $c \in [a,b]$

t.ż. $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt}$.

<u>Wniosek</u>: $g \equiv 1$, to $\int_a^b f(t)\,dt = f(c)\cdot(b-a)$ dla pewnego $c \in [a,b]$.

<u>Zasadnicze tw. R.R.i C.</u> (uogólnienie tw. Barrowa).

Niech $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. (f całkowalna na $[a,b]$).

Wówczas

a) F jest lipszycowska na $[a,b]$

b) jeżeli f jest ciągła w $\xi \in [a,b]$, to $F'(\xi) = f(\xi)$.

<u>Dowód:</u> Niech M – ogr. górne f na $[a,b]$

a). $|F(x) - F(y)| = \left|\int_y^x f(t)\,dt\right| \leq \int_y^x |f(t)|\,dt \leq M(x-y)$.

b) Niech f będzie ciągła w $\xi \in [a,b]$.

$$\left|\frac{F(\xi+h) - F(\xi)}{h} - f(\xi)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_\xi^{\xi+h} (f(t) - f(\xi))\right| \leq \sup_{t:\,|\xi - t| \leq h} (|f(t) - f(\xi)|)$$

Jeżeli $h \to 0$, to $\sup_{|t-\xi| \leq h} |f(t) - f(\xi)| \to 0$.

Drugie twierdzenie o wartości średniej

Niech f będzie monotoniczna na $[a,b]$, g – całkowalna w s.R. na tym przedziale. Istnieje wówczas $\xi \in [a,b]$ takie, że

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_a^{\xi} g(t)\,dt + f(b)\int_{\xi}^b g(t)\,dt$$

Dowód

Załóżmy na początek, że f jest nierosnąca i nieujemna. Wykażemy, że w tym przypadku istnieje $\xi \in [a,b]$ takie, że

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_a^{\xi} g(t)\,dt.$$

Niech μ_n będzie podziałem $[a,b]$ na n równych odcinków, $\mu_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[f(x_{i-1}) + (f(t)-f(x_{i-1}))\right]g(t)\,dt$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(t)\,dt}_{I_1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(t)-f(x_{i-1}))\,g(t)\,dt}_{I_2}$$

Najpierw oszacujmy I_2: { funkcja g, jako całkowalna, jest na $[a,b]$ ograniczona przez L:

$$|I_2| \leq \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(t)-f(x_{i-1})|\,|g(t)|\,dt \leq L\cdot\sum_{i=1}^{n}\underbrace{(f(x_{i-1})-f(x_i))}_{\omega_i}(x_i - x_{i-1})$$

bo f nierosnąca

$$= L\cdot\sum_{i=1}^{n}\omega_i\,(x_i - x_{i-1})$$

z kryterium całkowalności funkcji f (a f jest, jako monotoniczna, całkowalna w s. R.) wiemy, że gdy μ_n jest dost. drobny (a więc n dost. duże), to $\sum \omega_i (x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2L}$, zatem $|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ (dla $n > n_0$)

Teraz I_1. Oznaczmy $G(x) = \int_a^x g(t)dt$.

Funkcja G jest ciągła na $[a,b]$; niech $m = \min_{[a,b]} G$, $M = \max_{[a,b]} G$.

$$I_1 = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})[G(x_i) - G(x_{i-1})] \overset{\text{przekszt. Abela!}}{=}$$

$$= f(x_0)[G(x_1) - G(x_0)] + f(x_1)[G(x_2) - G(x_1)] + \dots$$
$$+ f(x_{n-1})[G(x_n) - G(x_{n-1})] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} G(x_i) \underbrace{[f(x_{i-1}) - f(x_i)]}_{\substack{\geq 0 \\ \text{bo } f \text{ nierosnąca}}} + \underbrace{f(x_{n-1}) G(x_n)}_{= f(x_{n-1}) G(b)}$$

$$m[f(x_{i-1}) - f(x_i)] \leq G(x_i)[f(x_{i-1}) - f(x_i)] \leq M[f(x_{i-1}) - f(x_i)]$$

$$m f(x_{n-1}) \leq G(b) f(x_{n-1}) \leq M f(x_{n-1}) \quad \text{bo } f(x_{n-1}) \geq 0$$

dodając otrzymujemy

$$\underbrace{m\left[\sum_{i=1}^{n-1}(f(x_{i-1}) - f(x_i)) + f(x_{n-1})\right]}_{= m f(a)} \leq I_1 \leq \underbrace{M\left[\sum_{i=1}^{n-1}(f(x_{i-1}) - f(x_i)) + f(x_{n-1})\right]}_{= M f(a)}$$

Ostatecznie dla każdego $\varepsilon > 0$

$$m f(a) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_a^b f(t)g(t)\,dt = I_1 + I_2 \leq M f(a) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Przechodząc z ε do 0 otrzymujemy

$$m f(a) \leq \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leq M f(a)$$

z własności Darboux dla funkcji G istnieje zatem $\xi \in [a,b]$ takie, że

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = \cancel{\xi}\, f(a)\, G(\xi) = f(a) \int_a^{\xi} g(t)\,dt .$$

Załóżmy teraz, że f jest nierosnąca, ale niekoniecznie nieujemna. Wtedy $\tilde{f}(x) = f(x) - f(b)$ jest nierosnąca i nieujemna, zatem istnieje $\xi \in [a,b]$ tż.

$$\int_a^b \tilde{f}(t)g(t)\,dt = \tilde{f}(a)\int_a^{\xi} g(t)\,dt = [f(a) - f(b)] \int_a^{\xi} g(t)\,dt$$

$$\| $$

$$\int_a^b [f(t) - f(b)]\, g(t)\,dt$$

skąd

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_a^{\xi} g(t)\,dt + f(b)\left[\int_a^b g(t)\,dt - \int_a^{\xi} g(t)\,dt\right] =$$

$$= f(a)\int_a^{\xi} g(t)\,dt + f(b)\int_{\xi}^b g(t)\,dt .$$

Pozostaje nam przypadek f niemalejącej.
Niech $\tilde{f} = -f$, wtedy $\tilde{f}$ nierosnąca, zatem istnieje $\xi \in [a,b]$ tż.

$$\int_a^b \tilde{f}(t)\,g(t)\,dt = \tilde{f}(a)\int_a^{\xi} g(t)\,dt + \tilde{f}(b)\int_{\xi}^{b} g(t)\,dt$$

$$\parallel \qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$$

$$-\int_a^b f(t)g(t)\,dt \qquad\qquad -f(a)\int_a^{\xi} g(t)\,dt - f(b)\int_{\xi}^{b} g(t)\,dt$$

$\Box$.