Całka Newtona

Def: Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, a $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ jej (jakąkolwiek) funkcją pierwotną. Całką Newtona (całką oznaczoną) funkcji f od a do b nazywamy liczbę $F(b) - F(a)$ i oznaczamy

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \overset{\text{ozn}}{=}: F(x)\Big|_a^b$$

Uwaga: Powyższa definicja jest poprawna, tj. nie zależy od wyboru funkcji pierwotnej F.
Niech bowiem $\tilde{F}$ będzie inną funkcją pierwotną f na odcinku $[a,b]$. Wtedy $\tilde{F} - F \equiv C = \text{const}$ na $[a,b]$, skąd

$$\tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) = F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

Własności całki Newtona

1. **Liniowość:** Niech $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ciągłe, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Wówczas
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Dowód: wprost z ~~def~~ liniowości całki nieoznaczonej.

2. **Wzór na całkowanie przez podstawienie**

Niech $g : [a,b] \to [g(a), g(b)]$ ~~ciągła~~ klasy C^1, $f : [g(a), g(b)] \to \mathbb{R}$ ciągła. Wówczas

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt = F(g(b)) - F(g(a)),$$

gdzie F jest jakąkolwiek funkcją pierwotną funkcji f na $[g(a), g(b)]$.

Dowód: $[F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$

więc $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))\Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$.

3. Wzór na całkowanie przez części

Niech $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ będą klasy C^1, wtedy

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

Dowód: $f(x)g(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, więc

$$\int_a^b [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b$$

4. Niech $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ dla $x \in [a,b]$.

Wówczas $G'(x) = f(x)$.

Dowód: Niech F będzie funkcją pierwotną f na $[a,b]$.

Wtedy $G(x) = F(x) - F(a)$, więc $G'(x) = F'(x) = f(x)$.

5. Monotoniczność całki

Niech $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ciągłe i $\forall_{x\in[a,b]}\ f(x) \geq g(x)$.

Wówczas $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

Jeżeli dodatkowo $f(x) > g(x)$ na (a,b), to

$$\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$$

Dowód: Niech $H : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją pierwotną funkcji $f-g$ na $[a,b]$. Wiemy, że $\forall_{x\in[a,b]}\ H'(x) = f(x) - g(x) \geq 0$, więc H jest niemalejąca na $[a,b]$, a jeżeli $f(x) > g(x)$ dla

$x \in (a,b)$, to H jest na $[a,b]$ rosnąca.
stąd $H(b) \geq H(a)$ (odpowiednio $H(b) > H(a)$),

$$\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx = H(x)\Big|_a^b = H(b)-H(a) \geq 0 \quad (\text{odp.} > 0)$$

skąd od razu otrzymujemy tezę.

Z tego prostego twierdzenia wynikają ważne wnioski:

6. Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ będzie ciągła, wtedy

$$\min_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \max_{[a,b]} f$$

Dowód:

$$\forall_{x\in[a,b]} \quad f(x) \geq \min_{[a,b]} f \cancel{\geq 0}, \quad \cancel{\text{więc} \int_a^b (f(x)-\min_{[a,b]} f)\,dx \geq \int_a^b 0\,dx = 0}$$

stąd

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b \min_{[a,b]} f\,dx = (b-a)\min_{[a,b]} f$$

$\min_{[a,b]} f$ to stała, więc $\int_a^b \min_{[a,b]} f\,dx = \min_{[a,b]} f \cdot x\Big|_a^b =$

$$= (b-a)\min_{[a,b]} f$$

analogicznie $\forall_{x\in[a,b]} \quad \max_{[a,b]} f \geq f(x)$, więc

$$(b-a)\max_{[a,b]} f = \int_a^b \max_{[a,b]} f\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx.$$

7. <u>Pierwsze twierdzenie (całkowe) o wartości średniej</u> (a właściwie zerowe)
Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ będzie ciągła, to
istnieje $\xi\in(a,b)$ takie, że

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)$$

Dowód:

Zauważmy najpierw, że z poprzedniego punktu możemy od razu dostać, dzięki własności Darboux funkcji f, nieco słabszą wersję twierdzenia:

$$\underset{\xi\in[a,b]}{\exists} \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)$$

tu jest różnica: $\xi\in[a,b]$, a nie do (a,b)

gdyż liczba $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ leży pomiędzy $\min\limits_{[a,b]} f$ a $\max\limits_{[a,b]} f$.

Aby dostać $\xi\in(a,b)$ skorzystamy z tw. Lagrange'a o wartości średniej: niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f. Wówczas

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{z tw. Lagrange'a} \\ \text{istnieje } \xi\in(a,b)}}{=} F'(\xi) = f(\xi).$$

8. <u>Umowa</u>: Dotąd obliczaliśmy $\int_a^b f(x)\,dx$ tylko w sytuacji, gdy $[a,b]$ jest przedziałem, a więc $a<b$. Gdy $b<a$, przyjmujemy

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

(w ten sposób w dalszym ciągu prawdziwy jest wzór $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$ dla F – funkcji pierwotnej f, gdyż $F(x)\Big|_a^b = -F(x)\Big|_b^a$)

oczywiście $\int_a^a f(x)\,dx = -\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

9. Niech P będzie przedziałem, $f : P \to \mathbb{R}$ ciągła, $a, b, c \in P$. Wówczas

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

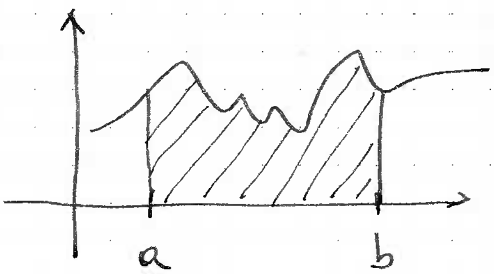
tę własność nazywamy addytywnością całki względem przedziału całkowania.

Dowód: Niech F będzie funkcją pierwotną f na P.

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) =$$
$$= \int_a^b f(x)dx .$$

Całka jako pole

Problem:



Niech f będzie nieujemną funkcją ciągłą na $[a, b]$. Jak zmierzyć pole pod wykresem funkcji f?

Problem jest poważny — w łatwy sposób umiemy obliczać jedynie pola prostych figur:

prostokątów (iloczyn boków)

trójkątów prostokątnych (bo to połowa prostokąta:

)

dowolnych trójkątów (bo każdy można podzielić na 2 trójkąty prostokątne )

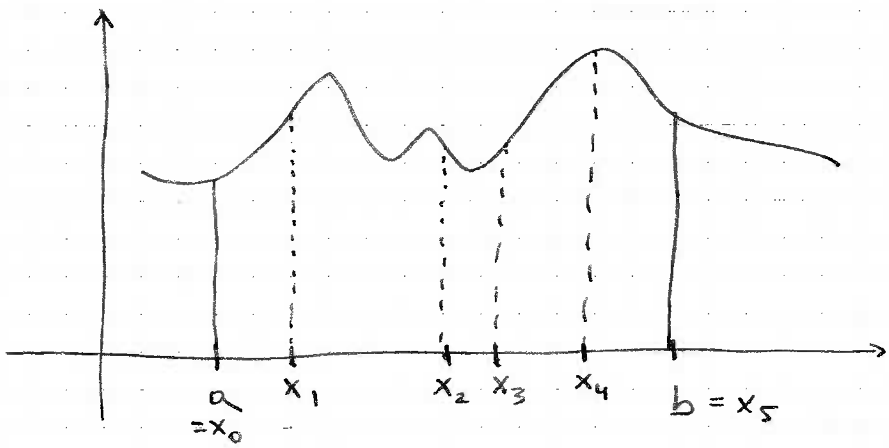
dowolnych wielokątów (bo możemy je podzielić przekątnymi na trójkąty)

Archimedes, przybliżając koło (od środka i od zewnątrz) wielokątami foremnymi zrozumiał, jak obliczać pole koła (ale wymagało to wprowadzenia nowej stałej – π – znanej tylko poprzez przybliżenia. Archimedes wykazał, że ta sama stała pojawia się we wzorze na długość okręgu.)

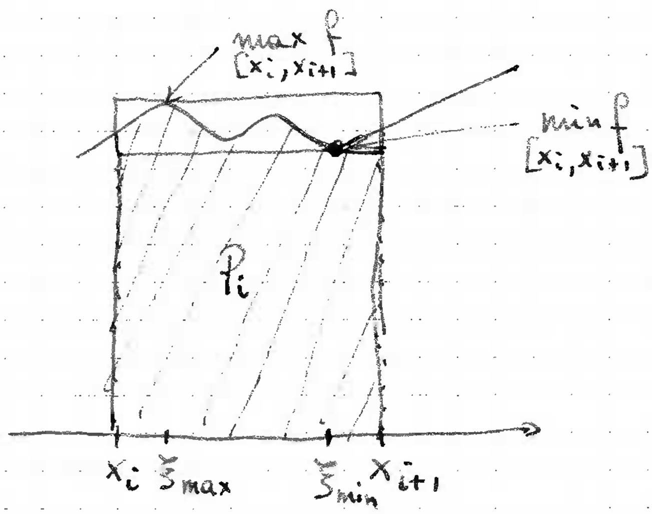
Z czego korzystał Archimedes? Z jakich własności pola?

- z tego, że umiemy obliczać pole prostokąta
- i z „warunku przyzwoitości", który powinna spełniać każda sensowna definicja pola: jeżeli umiemy obliczać pole figur A i B i $A \subset B$, to $P(A) \le P(B)$; $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

My zrobimy podobnie



Podzielimy odcinek $[a,b]$ na kilka mniejszych i nad każdym z nich będziemy przybliżać pole pod wykresem przez prostokąt



Prostokąt o podstawie $[x_i, x_{i+1}]$ i wysokości $\max\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f$ ~~przybliża~~ szacuje pole pod wykresem z góry, a o wysokości $\min\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f$ – z dołu.

Ustalmy w przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ punkt ξ_{i+1}, wtedy prostokąt o podstawie $[x_i, x_{i+1}]$ i wysokości $f(\xi_{i+1})$ przybliża pole P_i

Suma wszystkich takich pól to $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$.
Pora sformalizować te intuicje

Def: Podziałem P odcinka $[a,b]$ nazywamy skończony zbiór punktów $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ taki, że

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Def: Punktowanie podziału $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ to wybór punktów $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ takich, że $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

(Uwaga: ~~może się za~~ oczywiście $\xi_i \leq \xi_j$, ale może się zdarzyć, że w dwóch sąsiednich przedziałach, $[x_{i-1}, x_i]$ i $[x_i, x_{i+1}]$, wybierzemy ten sam punkt:

$$\xi_i = x_i \,, \quad \xi_{i+1} = x_i \,.$$

Def. Suma całkowa funkcji f związana z podziałem P i punktowaniem ξ to

$$S(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Def: Średnica $\delta(P)$ podziału P to $\min \{(x_i - x_{i-1}) : i = 1, \dots, n\}$

Twierdzenie: Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła.
$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0}$ dla dowolnego podziału P z punktowaniem ξ jeżeli $\delta(P) < \delta$, to $\left| S(f, P, \xi) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$.

(a więc sumy całkowe dobrze przybliżają całkę)

Dowód: Skoro f jest ciągła na $[a,b]$, to jest jednostajnie ciągła: $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x,y \in [a,b]} \; |x-y| < \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Oszacujmy $\left|\int_a^b f(x)dx - S(f,P,\xi)\right|$: niech P: $\delta(P)<\delta$

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S(f,P,\xi)\right| = \left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f(x) - f(\xi_i)\right) dx\right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \underbrace{|f(x) - f(\xi_i)|}_{|x-\xi_i|<\delta} dx$$

$$< \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) = \varepsilon. \qquad \square$$

~~i z dowolności~~

Jeżeli w podziale P wybierzemy takie punktowanie ξ, że $\forall_{i\in\{1,\dots,n\}} \; f(\xi_i) = \max_{[x_{i-1},x_i]} f$, to $S(f,P,\xi)$ nazywamy sumą całkową górną związaną z podziałem P i oznaczamy

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^n \max_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Analogicznie definiujemy sumę całkową dolną

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^n \min_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Wiemy, że pole $\mathbb{P}$ pod wykresem f na $[a,b]$ leży między $\underline{S}(f,P)$ a $\overline{S}(f,P)$, dla dowolnego podziału P:

$$\underline{S}(f,P) \leq \mathbb{P} \leq \overline{S}(f,P)$$

równocześnie $\overline{S}(f,P) \leq \int_a^b f(x)dx + \varepsilon$, o ile $\delta(P)<\delta$

i $\underline{S}(f,P) \geq \int_a^b f(x)dx - \varepsilon$, ——— " ———

stąd $\int_a^b f(x)dx - \varepsilon \leq \mathbb{P} \leq \int_a^b f(x)dx + \varepsilon$

i z dowolności ε $\quad \mathbb{P} = \int_a^b f(x)dx$.