Całka Riemanna

Przypomnienie: Funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest na $[a,b]$ całkowalna w sensie Riemanna $\Leftrightarrow$

$\exists_{I\in\mathbb{R}}$ t. że dla dowolnego podziału ν odcinka $[a,b]$ z punktowaniem ξ (też dowolnym)

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\quad \delta(\nu)<\delta \Rightarrow |S_f(\nu,\xi)-I|<\varepsilon$$

$$S_f(\nu,\xi)=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$$

Przykład: Udowodniliśmy, że funkcje ciągłe na $[a,b]$ są całk. w sensie Riemanna.

Przykład: Funkcja Dirichleta

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

nie jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a,b]$ dla dowolnych $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. (Dlaczego?)

Uwaga: Jeżeli f jest całkowalna na $[a,b]$, to jest na $[a,b]$ ograniczona.

Dowód (NWprost): Załóżmy, że f jest całkowalna, mamy więc $\cancel{\forall_{\varepsilon>0}}$ podział ν na tyle drobny ($\delta(\nu)<\delta$), by dla dowolnego punktowania ξ suma całkowa $S_f(\nu,\xi)$ spełniała $I-\varepsilon\le S_f(\nu,\xi)\le I+\varepsilon$.

Wiemy jednak, że f jest nieograniczona na $[a,b]$, a więc jest nieograniczona na którymś z przedziałów $[x_i, x_{i+1}]$. Wybierając zatem odpowiednio $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ możemy (nie ruszając pozostałych składników $S_f(V,\xi)$) uczynić $f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$ dowolnie dużym (co do modułu) – sprzeczność z nierównościami.

Twierdzenie: f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ miara zewnętrzna Jordana zbioru punktów nieciągłości f na $[a,b]$ jest zero.

(uwaga – przypomnienie: miara zewn. $|A|$ to $\inf \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|$, gdzie I_j - odcinki domknięte niezdeg. do punktu takie, że $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$

czyli pokrywamy A odcinkami, sumujemy ich długości i bierzemy infimum takich sum po wszystkich możliwych pokryciach).

Wniosek z tw. charakteryzującego:

suma i iloczyn funkcji całkowalnych w.s.R ~~jest~~ są całkowalne w s.R.

Dowód: zbiór punktów nieciągłości $N_{f+g} / N_{f\cdot g}$ sumy i iloczynu dwóch funkcji zawiera się w sumie zbiorów punktów nieciągłości obu tych funkcji $(N_f \cup N_g)$

$$|N_{f+g}| \le \cancel{|N_f| + |N_g|}\ |N_f \cup N_g| \le |N_f| + |N_g| = 0+0=0.$$

i tak samo $|N_{f\cdot g}|$.

Własności całki Riemanna

1. Liniowość

$$\int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)]dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt$$

oczywiste, bo $S_{\alpha f+\beta g}(\nu, \xi) = \alpha S_f(\nu,\xi) + \beta S_g(\nu,\xi)$.

2. Jeżeli $f(t) \le g(t)$ dla $t \in [a,b]$,

to $\int_a^b f(t)dt \le \int_a^b g(t)dt$ (bo analogiczna nierówność zachodzi dla sum całkowych).

3. $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ dla dow. $c \in (a,b)$

Dowód: Z tw. charakteryzującego f jest całkowalna na $[a,c]$ i na $[c,b]$.

Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że jeżeli μ_1 jest podziałem $[a,c]$, $\delta(\mu_1) < \delta$

μ_2 ——— " ——— $[c,b]$, $\delta(\mu_2) < \delta$

to dla dowolnych punktowań ξ_1, ξ_2

$$\left| S_f(\mu_1, \xi_1) - \int_a^c f(t)dt \right| < \varepsilon/3$$

$$\left| S_f(\mu_2, \xi_2) - \int_c^b f(t)dt \right| < \varepsilon/3$$

i dla dowolnego podziału ν odcinka $[a,b]$ t.ż. $\delta(\nu) < \delta$ i punktowania ξ

$$\left| S_f(\nu, \xi) - \int_a^b f(t)dt \right| < \varepsilon/3 \quad (*).$$

Weźmy $\nu = \mu_1 \cup \mu_2$, $\xi = \xi_1 \cup \xi_2$ ← spełniają warunek $\delta(\nu) < \delta$, więc zachodzi $(*)$;

Stąd $\quad S_f(\nu, \xi) = S_f(\mu_1, \xi_1) + S_f(\mu_2, \xi_2)$.

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \int_a^c f(t)dt - \int_c^b f(t)dt \right| \le$$

$$\le \left| \int_a^b f(t)dt - S_f(\nu, \xi) \right| + \left| S_f(\nu, \xi) - \int_a^c f(t)dt - \int_c^b f(t)dt \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \left| S_f(\mu_1, \xi_1) - \int_a^c f(t)dt \right| +$$

$$+ \left| S_f(\mu_2, \xi_2) - \int_c^b f(t)dt \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

ε było dowolne > 0, więc

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

4. Jeżeli f jest całkowalna na $[a,b]$,
to $|f|$ też i $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt$

(znów ta sama nierówność zachodzi
dla sum całkowych, np dla
$$S_f(\nu_n, \xi_n) \quad (\text{np } \xi_n = x_n)$$
$$\lim_{n\to\infty} S_f(\nu_n,\xi_n) = \int_a^b f(t)\,dt$$

$$\begin{array}{ccc} |S_f(\nu_n,\xi_n)| & \le & S_{|f|}(\nu_n,\xi_n) \\ \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle n\to\infty} \\ \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| & \le & \int_a^b |f(t)|\,dt \end{array}$$
całkowalność $|f|$ – z tw. charakteryzującego.

5. f monotoniczna na $[a,b]$,
to f całkowalna w s. R.

<u>Dowód</u>: zbiór N_f punktów nieciągłości f
jest przeliczalny; weźmy $\varepsilon > 0$ i
niech $N_f = \{y_i : i \in \mathbb{N}\}$. Niech
$$I_1 = \left[y_1 - \frac{\varepsilon}{4}, y_1 + \frac{\varepsilon}{4}\right],\quad I_2 = \left[y_2 - \frac{\varepsilon}{8}, y_2 + \frac{\varepsilon}{8}\right], \dots,$$
$$I_i = \left[y_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, y_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right]$$
Oczywiście $N_f \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \dots = \varepsilon$
stąd $|N_f| < \varepsilon$, a że ε dowolne > 0,
to $|N_f| = 0$.

<u>Wniosek z 2.</u>: $\int_a^b f(t)\,dt \le \sup_{[a,b]} f\,(b-a)$
$\ge \inf_{[a,b]} f \cdot (b-a)$. $\Rightarrow \int_a^a f(t)\,dt = 0$.

Umowa: jeżeli $a > b$, to $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$.

Uwaga: dla dow. $x, y, z \in [a,b]$

$$\int_x^y f(t)dt = \int_x^z f(t)dt + \int_z^y f(t)dt$$

(my na razie wiemy to dla $z \in (x,y)$)

Dowód – ćwiczenie.

Twierdzenia o wartości średniej

Pierwsze całkowe tw. o w. śr.

Niech $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła

$g: [a,b] \to \mathbb{R}$ całk. w s. R. i nieujemna.

Wtedy istnieje $c \in [a,b]$ t.ż.

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt \qquad (*)$$

Dowód: Niech $m = \inf_{[a,b]} f \quad (= \min_{[a,b]} f)$

$$M = \sup_{[a,b]} f$$

$$\forall_{t \in [a,b]} \quad m \leq f(t) \leq M$$

$$\Downarrow$$

$$mg(t) \leq f(t)g(t) \leq Mg(t)$$

$$\Downarrow$$

$$m\int_a^b g(t)dt \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq M\int_a^b g(t)dt$$

Jeżeli $\int_a^b g(t)dt = 0$, to równość zachodzi $\forall_{c \in [a,b]}$

Jeżeli $\int_a^b g(t)dt \neq 0$, to

$$\underset{\displaystyle f(x_m)}{\overset{\shortparallel}{m}} = \min_{[a,b]} f \leq \frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt} \leq \max_{[a,b]} f = \underset{\displaystyle f(x_M)}{\overset{\shortparallel}{M}}$$

i z własności Darboux istnieje $c \in [a,b]$

tż. $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt}$.

Wniosek: $g \equiv 1$, to $\int_a^b f(t)dt = f(c)\cdot(b-a)$ dla pewnego $c \in [a,b]$.

Zasadnicze tw. R.R.i C. (uogólnienie tw. Barrowa).

Niech $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. (f całkowalna na $[a,b]$).

Wówczas

a) F jest lipszycowska na $[a,b]$

b) jeżeli f jest ciągła w $\xi \in [a,b]$, to $F'(\xi) = f(\xi)$.

Dowód: Niech M – ogr. górne f na $[a,b]$

a). $|F(x) - F(y)| = \left|\int_y^x f(t)dt\right| \leq \int_y^x |f(t)|dt \leq M(x-y)$.

b) Niech f będzie ciągła w $\xi \in [a,b]$.

$$\left|\frac{F(\xi+h)-F(\xi)}{h} - f(\xi)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_\xi^{\xi+h}(f(t)-f(\xi))\right| \leq \sup_{t:|\xi-t|\leq h}(|f(t)-f(\xi)|)$$

Jeżeli $h\to 0$, to $\sup_{|t-\xi|\leq h}|f(t)-f(\xi)| \to 0$.

Kryterium całkowalności w s. R.

Niech $\nu = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ będzie podziałem $[a,b]$

Oscylację ω_i funkcji f na odcinku $[x_i, x_{i+1}]$ nazywamy

$$\omega_i = \sup_{[x_i,x_{i+1}]} f - \inf_{[x_i,x_{i+1}]} f .$$

Tw. Funkcja ograniczona f jest całkowalna w.s.R. na $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0}$ tż. dla dowolnego podziału ν jeżeli $\delta(\nu)<\delta$, to

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i (x_{i+1}-x_i) < \varepsilon .$$

Dowód:

$\Rightarrow$ wiemy, że dla dowolnego podziału ν spełniającego $\delta(\nu)<\delta$ i dowolnych $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i) - \int_a^b f(t)dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

oznaczmy $M_i = \sup_{[x_i,x_{i+1}]} f$, $m_i = \inf_{[x_i,x_{i+1}]} f$

$$A = \left| \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1}-x_i) - \int_a^b f(t)dt \right| \le \frac{\varepsilon}{3}$$

$$B = \left| \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1}-x_i) - \int_a^b f(t)dt \right| \le \frac{\varepsilon}{3} .$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i (x_{i+1}-x_i) \right| \le A + B \le \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon .$$

W drugą stronę trudniej: załóżmy, że δ t.ż. $\sum \omega_i (x_{i+1}-x_i) < \varepsilon/3$

(powtarzamy w zasadzie dowód tego, że funkcje ciągłe są całk. w sensie R.).

Niech ν_n, jak poprzednio - podział równy na 2^n odcinków.

$$\overline{S}_f(\nu_n) \searrow \quad , \quad \underline{S}_f(\nu_n) \nearrow ,$$

$$\overline{S}_f(\nu_n) \geq \underline{S}_f(\nu_n)$$

więc istnieją $\overline{S}_f = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_f(\nu_n)$

$$\underline{S}_f = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_f(\nu_n)$$

z warunku ~~z zadania~~ $\sum \omega_i (x_{i+1}-x_i) < \varepsilon$

$$\overline{S}_f(\nu_n) - \underline{S}_f(\nu_n) < \varepsilon \text{ o ile } n \text{ dost. duże}$$

$$\Rightarrow \overline{S}_f = \underline{S}_f = I.$$

Weźmy teraz dowolny podział ν, $\delta(\nu) < \delta$. Znajdziemy n takie, że $\delta(\nu_n) < \delta$ wtedy $\mu = \nu \cup \nu_n$, $\delta(\mu) < \delta$.

$$\overline{S}_f(\nu) \geq \overline{S}_f(\mu) \geq \underline{S}_f(\mu) \geq \underline{S}_f(\nu)$$

$$\overline{S}_f(\nu_n) \geq \overline{S}_f(\mu) \geq \underline{S}_f(\mu) \geq \underline{S}_f(\nu_n)$$

$$\Rightarrow |\overline{S}_f(\mu) - I| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow I \in \left[\underline{S}_f(\nu) - \frac{\varepsilon}{3}, \overline{S}_f(\nu) + \frac{\varepsilon}{3}\right]$$

$$|\underline{S}_f(\mu) - I| < \frac{\varepsilon}{3}. \text{ i z warunku z treści}$$

długość tego odcinka jest $< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon$

Drugie tw. o wartości średniej

Niech f monotoniczna w $[a,b]$,
g całkowalna w s. R.

Wówczas istnieje $\xi \in [a,b]$ tż:

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_a^\xi g(t)\,dt + f(b)\int_\xi^b g(t)\,dt.$$

Dowód:

Najpierw wykażemy, że jeżeli f jest nierosnąca ~~malejąca~~ i nieujemna, to $\exists\, \xi \in [a,b]$ tż.

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_a^\xi g(t)\,dt$$

~~Jak zwykle ν_n - podział równy na 2^n odcinków~~
~~$\nu_n = \{x_0, x_1, \dots, x_{2^n}\}$.~~

Niech $\mu_n = \{x_0, \dots, x_n\}$ będzie podziałem równym $[a,b]$ na n odcinków.

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)g(t)\,dt = \cancel{\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x_i) + (f(t}$$

~~z I tw. o wart. śred~~

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x_i) + (f(t) - f(x_i))]\,g(t)\,dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(t)\,dt + \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(t) - f(x_i))\,g(t)\,dt =$$

$$= I_1 + I_2$$

Zaczniemy od oszacowania I_2. Ustalmy $\varepsilon>0$

Wiemy, że g jest całkowalna

$\Rightarrow$ ograniczona, $|g(t)|\leq L$ dla $t\in[a,b]$.

$$|I_2|\leq\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|f(t)-f(x_i)||g(t)|dt$$

$$\leq L\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\underbrace{(f(x_i)-f(x_{i+1}))}_{\omega_i}(x_{i+1}-x_i)$$

ω_i oscylacja f na $[x_i,x_{i+1}]$

$$=L\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(x_{i+1}-x_i)$$

z kryterium całkowalności, jeżeli ~~????~~ n dost. duże, $n>n_0$, to $\sum_{i=0}^{n}\omega_i(x_{i+1}-x_i)<\frac{\varepsilon}{2L}$

czyli $|I_2|<\frac{\varepsilon}{2}$ o ile $n>n_0$

Teraz I_1: Oznaczmy $G(x)=\int_a^x g(t)dt$

$$I_1=\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)(G(x_{i+1})-G(x_i))=f(x_0)G(x_1)-f(x_0)G(x_0)$$
$$+f(x_1)G(x_2)-f(x_1)G(x_1)+\dots+f(x_n)G(x_n)-f(x_n)G(x_{n-1})$$
$$=\sum_{i=1}^{n-1}G(x_i)[f(x_{i-1})-f(x_i)]+f(x_{n-1})G(b)$$

$G(x)$ jest ciągła na $[a,b]$, zatem istnieją x_m i x_M takie, że
$$G(x_m)=m=\min_{[a,b]}G(x)$$
$$G(x_M)=M=\max_{[a,b]}G(x)$$

$f(x_{i-1}) - f(x_i) \geq 0$, więc

$$m\left(f(x_{i-1}) - f(x_i)\right) \leq G(x_i)\left(f(x_{i-1}) - f(x_i)\right) \leq M\left(f(x_{i-1}) - f(x_i)\right)$$

podobnie $f(x_{n-1}) \geq 0$

$$m f(x_{n-1}) \leq G(b) f(x_{n-1}) \leq M f(x_{n-1})$$

stąd

$$m\underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n-1}\left(f(x_{i-1}) - f(x_i)\right) + f(x_{n-1})\right]}_{= f(a)} \leq I_1 \leq M\underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n-1}\left(f(x_{i-1}) - f(x_i)\right) + f(x_{n-1})\right]}_{= f(a)}$$

~~Funkcja $f(a)G(x)$ jest ciągła,~~

$$\cancel{\min_{[a,b]}\left[G f(a)\right] \leq I_2 \leq M f(a) = \max_{[a,b]}\left[G \xi f(a)\right]}$$

~~więc z tw. Darboux $\exists\, \xi \in (a,b)$ tż:~~

$$I_2 = f(a) G(\xi)$$

wiemy, że $\lim_{n\to\infty} I_2 = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} I_1 = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$

stąd

$$m f(a) \leq \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leq M f(a)$$

z tw. Darboux istnieje $\xi \in (a,b)$ tż

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = G(\xi) f(a)$$

czyli $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_a^\xi g(t)\,dt$

~~Analogicznie gdy~~

Odrzućmy teraz założenie, że $f \geq 0$.

$\tilde{f}(t) = f(t) - f(b)$ jest nierosnąca i ≥ 0, więc $\exists_\xi$

$$\int_a^b \tilde{f}(t) g(t)\, dt = \tilde{f}(a) \int_a^\xi g(t)\, dt$$

$$\int_a^b f(t) g(t)\, dt - f(b) \int_a^b g(t)\, dt = \big(f(a) - f(b)\big) \int_a^\xi g(t)\, dt$$

stąd

$$\int_a^b f(t) g(t)\, dt = f(a) \int_a^\xi g(t)\, dt + f(b) \underbrace{\left[\int_a^b g(t)\, dt - \int_a^\xi g(t)\, dt\right]}_{= \int_\xi^b g(t)\, dt}$$

Jeżeli teraz f jest niemalejąca, to $\overset{\approx}{f} = -f$ jest ~~rosnąca~~, nierosnąca

$$\int_a^b \overset{\approx}{f}(t) g(t)\, dt = \overset{\approx}{f}(a) \int_a^\xi g(t)\, dt + \overset{\approx}{f}(b) \int_\xi^b g(t)\, dt$$

i zmieniając znaki obu stron usuwamy $\approx$.

Def: Mówimy, że rodzina przedziałów otwartych $\{I_t : t\in T\}$ jest pokryciem zbioru A, jeżeli $A \subset \bigcup_{t\in T} I_t$.

Def: średnicą zbioru A nazywamy $\sup_{x,y\in A} |x-y|$; oznaczamy ją $\operatorname{diam} A$

Henri Lebesgue
1875–1941
niezwykle błyskotliwy matematyk francuski; pracował w Rennes, Poitiers i w Paryżu. Znany przede wszystkim z teorii miary i całkowania (doktorat!) i uogólniania i rozszerzenia teorii szeregów Fouriera.

Twierdzenie (o liczbie Lebesgue'a)
Niech $\{I_t : t\in T\}$ będzie pokryciem zbioru zwartego $A\subset \mathbb{R}$ odcinkami otwartymi. Istnieje wówczas $\lambda > 0$ (zwana liczbą Lebesgue'a pokrycia) taka, że każdy podzbiór A o średnicy $\leq \lambda$ leży w pewnym odcinku I_t

$(B\subset A,\ \operatorname{diam} B \leq \lambda \Rightarrow \exists_{t\in T}\ B\subset I_t)$.

Dowód:
Załóżmy przeciwnie – wówczas $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \exists_{B_n}\ \emptyset\neq B_n\subset A$, $\operatorname{diam} B_n \leq \frac{1}{n}$ i $\forall_{t\in T}\ B_n \not\subset I_t$ $(I_t\setminus B\neq\emptyset)$. Niech teraz $b_n\in B_n$; z ciągu $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ możemy wybrać podciąg $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ zbieżny do $b\in A$.

Odcinki $\{I_t\}_{t\in T}$ pokrywają $A \Rightarrow \exists_{t_b\in T} I_{t_b}\ni b$.

Odcinek I_{t_b} jest otwarty $\Rightarrow \exists_{\delta>0}\ (b-\delta, b+\delta)\subset I_{t_b}$.

Z drugiej strony dla dost. dużych k $|b_{n_k}-b|<\frac{\delta}{2}$, więc (skoro $\operatorname{diam} B_{n_k}\leq \frac{1}{n_k}$) $\forall_{x\in B_{n_k}}\ |x-b|\leq |x-b_{n_k}|+|b_{n_k}-b| \leq$

$$\leq \frac{1}{n_k} + \frac{\delta}{2}$$

dla dost. dużych k $\frac{1}{n_k}<\delta/2$, wówczas $|x-b|\leq\delta \Rightarrow B_{n_k}\subset(b-\delta, b+\delta)$ ⨳

więc $B_{n_k} \subset I_{t_b}$ ↯.

<u>Tw.</u> (Heine-Borela o pokryciach)
Z każdego pokrycia $\{I_t : t \in T\}$ odcinka domkniętego (zbioru zwartego) $[a,b]$ można wybrać pokrycie skończone, tj. Jeżeli $[a,b] \subset \bigcup_{t\in T} I_t$, I_t - otwarty, ~~więc~~

to istnieją $t_1, t_2, \dots, t_k \in T$ takie, że

$$[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{k} I_{t_i}$$

<u>Dowód</u>: Niech λ będzie liczbą Lebesgue'a pokrycia $\{I_t\}_{t\in T}$; $n > \frac{1}{\lambda}$. Podzielmy $[a,b]$ na n równych odcinków $[x_i, x_{i+1}]$, ~~$x_i = a + \frac{i}{|b-a|}$~~

$x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}$. Mamy $|x_{i+1} - x_i| < \lambda$, więc istnieje t_{i+1} t.że $[x_i, x_{i+1}] \subset I_{t_{i+1}}$. Wówczas

$$[a,b] \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}] \subset I_{t_1} \cup I_{t_2} \cup \dots \cup I_{t_n}.$$

Def: Oscylacją funkcji f w punkcie x nazywamy
$$\omega_f(x) = \inf_{\delta>0}\left(\sup_{[x-\delta,x+\delta]} f - \inf_{[x-\delta,x+\delta]} f\right)$$

Uwaga: f ciągła w x $\Leftrightarrow$ $\omega_f(x) = 0$.

Dowód tw. charakteryzującego: f ograniczona oraz
(f całkowalna w s. R $\Leftrightarrow$ miara zewn. zbioru punktów jej nieciągłości jest równa 0).

$\Rightarrow$

② z kryt. całkowalności

$\forall_{m\in\mathbb{N}} \exists \delta>0$ t.ż. dla każdego podziału ν z $\delta(\nu)<\delta$

mamy $\sum\limits_{\text{dla } \nu} \omega_j (x_{j+1}-x_j) < \frac{1}{m}$ $(*)$

Niech $\cancel{n_m = \left[\frac{1}{\delta}\right]+1}$ (tak, by $\frac{1}{n_m} < \delta$) ~~Wówczas~~ i by mieć pewność, że $n_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \infty$.

~~podział równy~~

$$n_m = \max\left(m, \left[\frac{1}{\delta}\right]+1\right)$$

Wówczas podział μ_m równy na n_m odcinków spełnia $(*)$.

Ustalmy teraz $\alpha>0$; niech $\sigma_m(\alpha)$ – suma długości tych odcinków $[x_i, x_{i+1}]$ z μ, dla których $\omega_i > \alpha$. Mamy

$$\alpha\cdot\sigma_m(\alpha) < \underbrace{\sum}_{\substack{\text{tylko tam, gdzie } \omega_i>\alpha \\ \{j:\, \omega_j>\alpha\}}} \omega_j (x_{j+1}-x_j) \le \sum_{j=0}^{n_m-1} \omega_j (x_{j+1}-x_j) < \frac{1}{m}$$

$\Rightarrow \sigma_m(\alpha) < \frac{1}{m\alpha}$ i widać, że $\sigma_m(\alpha) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$.

Teraz zauważmy, że jeżeli $y \in (x_i, x_{i+1})$, to $\omega_f(y) \le \omega_i$. Niech N^α oznacza zbiór tych punktów $[a,b]$, dla których $\omega_f(y) \ge \alpha$

$y \in N_{\alpha} \Rightarrow$ albo $y = x_i$ dla jakiegoś i,
albo $y \in (x_i, x_{i+1})$. W tym ostatnim przypadku $\omega_i \geq \omega_f(y) \geq \frac{1}{k}\alpha$

$$\Rightarrow N_\alpha \subset \{x_0, \dots, x_n\} \cup \bigcup_{\{i : \omega_i > \alpha\}} [x_i, x_{i+1}]$$

$$|N_\alpha| \leq 0 + \sigma_n(\alpha) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ zbiór N_α ma miarę 0 $\quad \forall_{\alpha > 0}$

$\Rightarrow$ zbiór punktów nieciągłości $N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_{\frac{1}{k}}$

$$|N| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |N_{\frac{1}{k}}| = 0$$

$\Longleftarrow$

Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ograniczona, $C = [a,b] \setminus N$ zbiór punktów ciągłości f, N – nieciągłości; $\forall_x |f(x)| \leq M$, $M > 0$. Wykażemy, że jeżeli $|N| = 0$, to f całk. w s. R.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. (1) Z ciągłości $\forall_{y \in C} \exists_{\delta_y} \forall_{x \in (y-\delta_y, y+\delta_y)}$
$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

(2) z def. miary zewn. $= 0$ istnieją przedziały domkn. $I_1, I_2, \dots$ t.ż. $N \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \frac{\varepsilon}{5M}$

Chcemy dostać podobną własność, ale dla $I_1, I_2 ..$ otwartych, więc bierzemy

$\tilde{I}_n$ = odc. o tym samym środku, co I_n, dłuższy o $\frac{\varepsilon}{20M \cdot 2^n}$.

Oczywiście $N \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{I}_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{I}_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(|I_n| + \frac{\varepsilon}{20M \cdot 2^n}\right) < \frac{\varepsilon}{5M} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{20M \cdot 2^n} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{5M} + \frac{\varepsilon}{20M} = \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Odcinki $\{\tilde{I}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ oraz $(x-\delta_x, x+\delta_x)$ pokrywają $[a,b]$.

Możemy z nich wybrać pokrycie skończone

$\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_k$, $(y_1-\delta_{y_1}, y_1+\delta_{y_1}), \dots, (y_m-\delta_{y_m}, y_m+\delta_{y_m})$.

o liczbie Lebesgue'a λ.

Niech teraz μ - podział $[a,b]$ o średnicy $\delta(\mu) < \lambda$.

Wtedy każdy z przedziałów $[x_i, x_{i+1}]$ ma długość $< \lambda$

$\Rightarrow$ leży w którymś z $\tilde{I}_j$ lub w którymś z $(y_j-\delta_{y_j}, y_j+\delta_{y_j})$.

Obliczmy

$$\sum_{i=0}^{n} \omega_i (x_{i+1} - x_i) = \overbrace{\sum \omega_i (x_{i+1} - x_i)}^{\Sigma_1} + \overbrace{\sum_{\text{po pozostałych } i} \omega_i (x_{i+1} - x_i)}^{\Sigma_2}$$

po tych i, że $[x_i, x_{i+1}] \subset (y_j - \delta_{y_j}, y_j + \delta_{y_j})$ dla jakiegoś j

~~$[x_i, \dots]$~~

W pierwszej sumie:

$\forall_{z,w \in (y_j-\delta_{y_j},\, y_j+\delta_{y_j})}$ $\quad |f(z)-f(w)| \leq |f(z)-f(y_j)| + |f(w)-f(y_j)|$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

$$\Rightarrow \sup_{(y_j-\delta_{y_j},\, y_j+\delta_{y_j})} f - \inf_{- \, " \, -} f \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

$$\sum_1 \omega_i (x_{i+1}-x_i) \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \sum_1 (x_{i+1}-x_i) \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon}{2}$$

druga suma

$$\sum_2 \omega_i (x_{i+1}-x_i)$$

przedział $[x_i, x_{i+1}]$ musi leżeć w którymś z $\widetilde{I}_j$.

wtedy $\quad \omega_i \leq 2M$

$$\sum_2 \omega_i (x_{i+1}-x_i) \leq 2M \sum_2 (x_{i+1}-x_i) \leq 2M \sum_{j=1}^{k} |\widetilde{I}_j|$$

$$\leq 2M \sum_{j=1}^{\infty} |\widetilde{I}_j| < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}$$

i ost. $\quad \sum \omega_i (x_{i+1}-x_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Wzór Taylora z resztą w postaci całkowej

Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie $(n+1)$-razy różniczkowalna na $[a,b]$ (w końcach wystarczą pochodne jednostronne).

$f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ ciągłe na $[a,b]$;

$f^{(n+1)}$ całkowalna w s. R. na $[a,b]$;

$c \in [a,b]$.

Wówczas $\forall_{n=0,1,2,\dots} \forall_{x \in [a,b]}$ zachodzi wzór

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \int_c^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

Dowód: indukcja po n.

Dla $n = 0$

$$f(x) = f(c) + \int_c^x \frac{f'(t)}{0!}(x-t)^0 dt =$$

$$= f(c) + \int_c^x f'(t)\,dt \quad \leftarrow \text{zasadnicze tw. RRiC}$$

Załóżmy, że teza twierdzenia zachodzi dla pewnego $n \geq 0$.

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \underbrace{\int_c^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt}_{r_n(x)}$$

Mamy
$$r_n(x) = \int_c^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$
Jeżeli f jest $(n+2)$-razy różniczkowalna, to możemy w powyższym wzorze wykonać całkowanie przez części:

różniczkowanie po zmiennej t

$$r_n(x) = \int_c^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right)' dt$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\cdot\left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_{t=c}^{t=x} - \int_c^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{n!}\left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right)dt$$

$$= 0 + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\frac{(x-c)^{n+1}}{n+1} + \int_c^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}dt$$

Wstawiając do wzoru Taylora dla n (czyli do założenia indukcyjnego) dostajemy wzór Taylora dla $n+1$ (czyli tezę indukcyjną). $\square$.

Przyjrzyjmy się teraz wzorowi na $r_n(x)$:
$$r_n(x) = \int_c^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$
Jeżeli $f^{(n+1)}(t)$ jest funkcją ciągłą na $[c,x]$, to możemy do tej całki użyć I-go twierdzenia całkowego o wartości średniej (czynnik $(x-t)^n$ ma

dla t między c a x stały znak, więc

albo $(x-t)^n \geq 0$ — gdy $c \leq x$,

albo $(x-t)^n < 0$ — gdy $c > x$.

w tym pierwszym przypadku możemy bezpośrednio użyć tw. o wart. średniej:

$$\int_c^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_c^x (x-t)^n dt =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\cdot\left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_{t=c}^{t=x}$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\cdot\frac{(c-t)^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(c-t)^{n+1}$$

dla pewnego $\xi \in (c, x)$ — a więc odtworzyliśmy resztę w post. Lagrange'a.

Gdy $(x-t)^n < 0$, wypiszemy wzór na $-r_n(x)$:

$$-r_n(x) = \int_c^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\left[-(x-t)^n\right]dt =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_c^x \left[-(x-t)^n\right]dt =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\left[-\frac{(c-t)^{n+1}}{n+1}\right] = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(c-t)^{n+1}$$

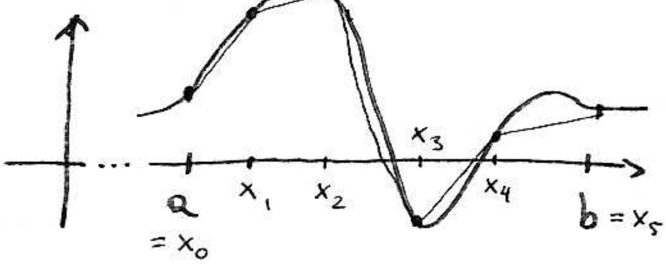
a więc na $r_n(x)$ otrzymaliśmy ten sam wzór.

Uwaga: w ten sam sposób można wykazać,
że w założeniach I-go całkowego t. o w.ś.
założenie, że g jest nieujemna na
przedziale całkowania można zastąpić założeniem,
że g ma na tym przedziale stały znak.

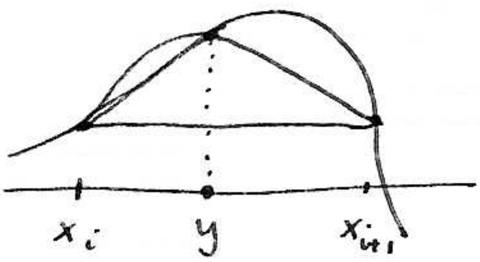
Zadanko: Wyprowadzić z reszty w postaci
całkowej resztę w postaci Cauchy'ego.

Całki niewłaściwe

Def. Długość L wykresu funkcji $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ to supremum długości łamanych wpisanych w ten wykres,



czyli $L = \sup_\nu \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{(x_{j+1}-x_j)^2 + (f(x_{j+1})-f(x_j))^2}$, gdzie $\nu = \{x_0,\dots,x_n\}$ jest podziałem $[a,b]$



Z nier. trójkąta widać, że rozdrabnianie podziału nie pomniejsza wartości sumy $\sum_j \sqrt{(\ )^2+(\ )^2}$ (długości łamanej).

Jeżeli f jest na $[a,b]$ ciągła, a na (a,b) różniczkowalna, to $\forall_j\ \exists_{\xi_j \in (x_j, x_{j+1})}\ f(x_{j+1}) - f(x_j) = f'(\xi_j)(x_{j+1}-x_j)$,

więc

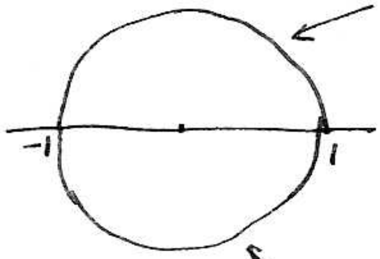
$$L_\nu = \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{(x_{j+1}-x_j)^2 + (f(x_{j+1})-f(x_j))^2} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{(x_{j+1}-x_j)^2 \left(1 + (f'(\xi_j))^2\right)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1}-x_j)\sqrt{1+(f'(\xi_j))^2}$$

Gołym okiem widać, że otrzymujemy sumę całkową $S(\nu,\xi)$ dla funkcji $\sqrt{1+(f'(t))^2}$, podziału ν i punktowania $\xi_0,\dots,\xi_{n-1}$. Jeżeli tylko $\sqrt{1+(f'(t))^2}$ jest całkowalna (np gdy $f'(t)$ jest ciągła), to (1) rozdrabniając podział zbliżamy się do $\sup_\nu L_\nu$; (2) rozdrabniając podział zbliżamy się do $\int_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$. Stąd $L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$

Przykład: Długość okręgu jednostkowego



wykres $\sqrt{1-x^2}$

$x^2+y^2=1$

$y^2=1-x^2$

$y=\pm\sqrt{1-x^2}$

wykres $-\sqrt{1-x^2}$

Widać, że $L = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$, gdzie $f(t)=\sqrt{1-t^2}$

$$f'(t) = \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$1+(f'(t))^2 = 1+\frac{t^2}{1-t^2} = \frac{1}{1-t^2}$$

$$L = 2\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \underset{\substack{t=\sin s\\ dt=\cos s\,ds\\ t=1 \Rightarrow \sin s=\frac{\pi}{2}\\ t=-1 \Rightarrow \sin s=-\frac{\pi}{2}}}{=} 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos s\,ds}{\cos s} = 2\cdot\pi.$$

Ale uwaga – oszustwo! funkcja $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ nie jest ograniczona na $[-1,1]$, nie jest więc całkowalna! A wynik wyszedł dobry...

Mogliśmy to lepiej przeprowadzić, zauważając, że

$$L = 4\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 4\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\cos s\,ds}{\cos s} = 4\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi$$ ← tu już nie ma oszustwa.

Nie zawsze jednak daje się taką sztuczkę przeprowadzić, więc zamiast załamywać ręce nad oszustwem wprowadzamy nową definicję.

i ostatecznie $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\pi.$

Inny przykład: $\displaystyle\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}=\lim_{c\to\infty}\int_0^c\frac{dt}{1+t^2}=\lim_{c\to\infty}(\operatorname{arctg}c-\operatorname{arctg}0)$

$$=\lim_{c\to\infty}\operatorname{arctg}c=\frac{\pi}{2}$$

~~Zadanie~~ Terminologia: jeżeli istnieje całka niewłaściwa (a więc istnieje odpowiednia skończona granica całek właściwych), to mówimy, że ta całka niewłaściwa jest zbieżna.

i jest skończona

dlaczego?

(jeżeli jest to w rzeczywistości całka właściwa, to automat. jest zbieżna)

Zadanie: Dla jakich $\alpha\in\mathbb{R}$ zbieżna jest całka

$$\int_1^\infty x^\alpha dx\ ? \qquad \int_0^1 x^\alpha dx\ ?$$

$$\int_1^\infty x^\alpha dx=\lim_{c\to\infty}\int_1^c x^\alpha dx=\lim_{c\to\infty}\begin{cases}\left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_1^c & \alpha\neq-1\\ \left.\ln x\right|_1^c & \alpha=-1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{c\to\infty}\left(\frac{c^{\alpha+1}}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+1}\right)=\begin{cases}+\infty & \alpha>-1\\ -\frac{1}{\alpha+1} & \alpha<-1\end{cases}\\ \lim\limits_{c\to\infty}(\ln c-\ln 1)=+\infty & \alpha=-1\end{cases}$$

czyli całka niewłaściwa jest zbieżna dla $\alpha<-1$,
rozbieżna do ∞ dla $\alpha\geqslant-1$.

$\displaystyle\int_0^1 x^\alpha dx.$ Dla $\alpha\geqslant0$ jest to całka właściwa (a więc zbieżna). Dla $\alpha<0$ x^α jest nieograniczone w 0, więc

$$\int_0^1 x^\alpha dx=\lim_{c\to0^+}\int_c^1 x^\alpha dx=\lim_{c\to0^+}\begin{cases}\left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_c^1 & \alpha<0,\ \alpha\neq-1\\ \left.\ln x\right|_c^1 & \alpha=-1\end{cases}=\begin{cases}\lim\limits_{c\to0^+}\left(\frac{1}{\alpha+1}-\frac{c^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)\\ \lim\limits_{c\to0^+}(\ln 1-\ln c)\end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} & -1<\alpha<0 \\ +\infty & \alpha \le -1 \end{cases}$$

cyli całka jest zbieżna dla $\alpha > -1$, rozbieżna dla $\alpha \le -1$ (do $+\infty$).

Uwaga: $\int_0^1 x^\alpha dx \underset{\substack{t=\frac{1}{x} \\ x=\frac{1}{t}}}{=\!=} \; \int_\infty^1 \left(\frac{1}{t}\right)^\alpha \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt =$

$dx = -\frac{1}{t^2}dt$

$x=1 \Rightarrow t=1$

$x \to 0 \Rightarrow t \to +\infty$

$$= \int_1^\infty t^{-\alpha-2} dt$$ zbieżna dla $-\alpha-2<-1$

$\Updownarrow$

$\alpha > -1$

I jeszcze jeden przykład:

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ $\leftarrow$ czy jest zbieżna?

$$\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx \underset{t=-x}{=\!=} \int_\infty^0 e^{-t^2}(-dt) = \int_0^\infty e^{-t^2} dt,$$ wystarczy więc

$dt = -dx$

$t \to -\infty \Rightarrow x \to \infty$

$t \to 0 \Rightarrow x \to 0$

zbadać zbieżność całki $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$,

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt = 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt.$$

$\forall_t \; e^{-t^2} \le \frac{1}{1+t^2}$, bo $e^{t^2} \ge 1+t^2$. Stąd $\forall_{c>0}$

$$\int_0^c e^{-t^2} dt \le \int_0^c \frac{1}{1+t^2} dt = \operatorname{arctg} c$$

oczywiście $\int_0^c e^{-t^2} dt$ jest niemalejącą funkcją c, bo $e^{-t^2} > 0$.

Def. Jeżeli ① funkcja f jest całkowalna w s. R. na $[a,c]$ dla każdego c: $a \le c < b$

② istnieje $\lim\limits_{c\to b^-} \int\limits_a^c f(t)\,dt$

to tę granicę nazywamy całką niewłaściwą z f od a do b i oznaczamy (oczywiście) $\int\limits_a^b f(t)\,dt$.

Analogicznie definiujemy $\int\limits_a^b f(t)\,dt$, gdy f jest całkowalna na $[c,b]$ dla $a<c\le b$ i istnieje $\lim\limits_{c\to a^+} \int\limits_c^b f(t)\,dt$.

Uwaga: problemy z całkowalnością f na $[a,b]$ mogą być dwojakiego rodzaju:

- albo $b=+\infty$ (a my nie definiowaliśmy w żaden sposób całki na przedziale nieograniczonym)

- albo $b<\infty$, ale f jest w otoczeniu b nieograniczona.

W pierwszym przypadku mówimy o całce niewłaściwej pierwszego rodzaju, w drugim - drugiego rodzaju.

Wróćmy do całki $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Tu kłopot z nieograniczonością funkcji podcałkowej jest na obu końcach przedziału; by móc skorzystać z definicji dzielimy całkę na dwie:

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int\limits_{-1}^{0}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{c\to -1^+}\int\limits_{c}^{0}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \lim_{c\to 1^-}\int\limits_{0}^{c}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C$, więc

$$\lim_{c\to -1^+}\int\limits_{c}^{0}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{c\to -1^+}(\arcsin 0 - \arcsin c) = 0 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{c\to 1^-}\int\limits_{0}^{c}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{c\to 1^-}(\arcsin c - \arcsin 0) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

Kryteria zbieżności całek niewłaściwych.

1. Jak zwykle przy zbieżnościach mamy wersję kryterium ~~Ca~~ – warunku Cauchy'ego

Tw. Niech f będzie całkowalna na $[a,c]$ dla każdego $c<b$. Wówczas całka niewłaściwa $\int_a^b f(t)dt$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy

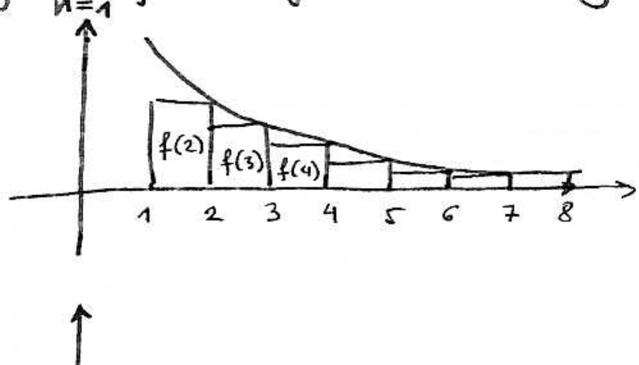
$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{d_\varepsilon\in(a,b)}\ \forall_{x_1,x_2\in(d_\varepsilon,b)}\ \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right|<\varepsilon$$

Dowód: Warunek Cauchy'ego na istnienie $\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(t)dt$.

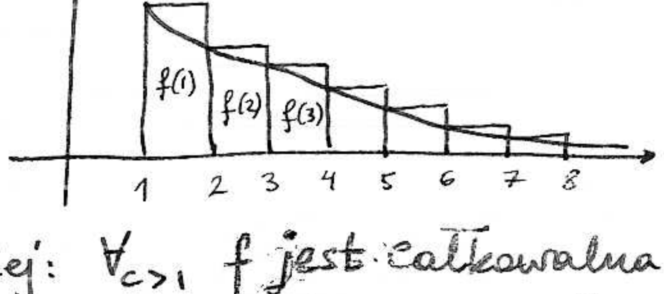
2. Kryterium całkowe (Cauchy'ego - Maclaurina) zbieżności szeregu.

Tw. Niech $f:[1,\infty)\to(0,\infty)$ będzie nierosnąca. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ $\int_1^{\infty} f(t)dt$ jest zbieżna.

Dowód:



$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n)\le\int_1^{\infty} f(t)dt$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\ge\int_1^{\infty} f(t)dt$$

Precyzyjniej: $\forall_{c>1}$ f jest całkowalna na $[1,c]$ (bo monotoniczna)

$$f(n+1)\le\int_n^{n+1} f(t)dt\le f(n)\ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{n} f(k+1)\le\int_1^{n+1} f(t)dt\le\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

przechodząc z n do ∞ otrzymujemy (odp. sumy i całki istnieją, choć być może są ∞, bo $f \geq 0$)

$$\sum_{k=2}^{\infty} f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k+1) \leq \int_1^{\infty} f(t)\,dt \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

skąd natychmiast wynika twierdzenie.

~~Tw.~~ Tw. - Uwaga: jeżeli $\int_1^{\infty} f(t)\,dt$ jest zbieżna i f jest nierosnąca, to $\lim_{t \to \infty} f(t) = 0$.

Dowód: natychmiast z warunku Cauchy'ego

Załóżmy, że $\lim_{t \to \infty} f(t) = \alpha \neq 0$. (granica istnieje, bo f nierosnąca),

Załóżmy, że $\alpha \in \mathbb{R}$ (tj $\alpha \neq -\infty$). $\exists_{T} \forall_{t > T} f(t) \in \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{3}{2}\alpha\right)$ ew. $\left(\frac{3}{2}\alpha, \frac{\alpha}{2}\right)$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $x_1, x_2 > T$, $x_2 = x_1 + \frac{3\varepsilon}{|\alpha|}$.

Wtedy $\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\right| \geq \left|f(x_2) \cdot (x_2 - x_1)\right| \geq \frac{|\alpha|}{2} \cdot \frac{3\varepsilon}{|\alpha|} = \frac{3\varepsilon}{2} > \varepsilon.$ lub x_1, w zal. od tego, co mniejsze.

sprzeczność z war. Cauchy'ego.

(jest to odpowiednik tw o warunku koniecznym zbieżności szeregu)

Na wzór teorii szeregów definiujemy zbieżność bezwzględną.

Def: Mówimy, że $\int_a^b f(t)\,dt$, $f: [a, b) \to \mathbb{R}$ jest zbieżna bezwzględnie, jeżeli $\int_a^b |f(t)|\,dt$ jest zbieżna.

Całka zbieżna, ale nie bezwzględnie, jest zbieżna warunkowo.

Przykład: $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

1. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ jest zbieżna:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx$$

wykażemy, że ten szereg spełnia kryt. Leibniza, a więc że $a_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx$ monotonicznie dąży do 0.

$$a_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx \qquad a_{k+1} = \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx \underset{t=x-\pi}{=} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin(t+\pi)|}{t+\pi}\,dt =$$

$dt = dx$

$x = (k+1)\pi \Rightarrow t = k\pi$

$x = (k+2)\pi \Rightarrow t = (k+1)\pi$

$$= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|-\sin t|}{t+\pi}\,dt = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t+\pi}\,dt \le \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,dt = a_k,$$

więc (a_k) nierosnący;

$$a_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,dt \le \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{dt}{t} = \ln t\Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi} = \ln(k+1)\pi - \ln k\pi =$$

$$= \ln\frac{k+1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \ln 1 = 0.$$

2. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ nie jest zbieżna bezwzględnie

Musimy oszacować z dołu całkę $\int^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \sum_{k=0}^{\infty}\int_{k\pi+\frac{\pi}{4}}^{(k+1)\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{k\pi+\frac{\pi}{4}}^{(k+1)\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\ln\left[(k+1)\pi-\frac{\pi}{4}\right] - \ln\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

to jest szereg rozbieżny (b. łatwe, zadanko).

Kryterium Abela - Dirichleta dla całek niewł.

Niech $g: [a,\infty)$ ~~będą~~ $\to \mathbb{R}$ będzie monotoniczna i ograniczona, oraz

(A) $\int_a^\infty f(t)\,dt$ istnieje i jest skończona

lub

(D) $\forall_{x>a}$ istnieje $\int_a^x f(t)\,dt$ (tj f jest całkowalna na $[a,x]$ dla każdego $x>a$)

oraz $\exists_{M>0} \forall_{x_1,x_2>a} \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\right| \le M$

oraz $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Wówczas $\int_a^\infty f(t)g(t)\,dt$ jest zbieżna

Dowód: Sprawdzimy, że spełniony jest war. Cauchy'ego zbieżności $\int_a^\infty f(t)g(t)\,dt$. Ustalmy $\varepsilon>0$. Funkcje f i g spełniają zał. II go tw. o wart. średniej, więc

$$\forall_{x_1,x_2>a} \exists_{c\in(x_1,x_2)} \int_{x_1}^{x_2} f(t)g(t)\,dt = g(x_1)\int_{x_1}^{c} f(t)\,dt + g(x_2)\int_{c}^{x_2} f(t)\,dt$$

Niech $\forall_{x\ge a} |g(x)| \le \tilde{M}$

Twierdzenie: (o całkowaniu ciągów funkcyjnych)

Niech $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f_n \rightrightarrows f$. Wówczas

$$\int_a^b f_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt.$$

Dowód: prościutko. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Skoro $f_n \rightrightarrows f$, to istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ t.ż. $\forall_{n > n_0} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$.

Stąd $$\left| \int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \right| \le$$

$$\le \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt \le \varepsilon(b-a) \qquad \text{dla } n > n_0;$$

z dowolności $\varepsilon > 0$ dostajemy tezę.

Uwagi: 1. Bez jednostajnej zbieżności się nie da:

niech $$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -n^2 x + 2n & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \ \forall_{x\in[0,1]} f_n(x) \longrightarrow 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$\forall_n \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1, \quad \int_0^1 f(x)\,dx = 0$$

2. Nie działa również na przedziałach nieograniczonych (nawet, gdy wszystkie całki są w rzeczywistości całkami właściwymi):

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x \in [n, 2n] \\ 0 & \text{poza } [n,2n] \end{cases}$$

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n \rightrightarrows 0 = f$,

$$\forall_n \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\,dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\,dt = \int_n^{2n} \frac{1}{n}\,dt$$

Wersja dla szeregów:

Tw. $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest jednost. zbieżny na $[a,b]$, $\forall_n$ f_n są całkowalne na $[a,b]$, to $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$.

Dowód: poprzednie twierdzenie zastosowane do ciągu sum częściowych.

Jeżeli zachodzi warunek (A), to $\exists_{d>a}$ tż.

$$\forall_{y_1, y_2 > d} \left| \int_{y_1}^{y_2} f(t)\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{2\widetilde{M}}.$$

Kładąc $y_1 = x_1$, $y_2 = c$ otrzymujemy, dla $x_1, x_2 > d$,

$\left| \int_{x_1}^{c} f(t)\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{2\widetilde{M}}$, analogicznie $\left| \int_{c}^{x_2} f(t)\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{2\widetilde{M}}$,

więc

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) g(t)\,dt \right| \leq |g(x_1)| \cdot \left| \int_{x_1}^{c} f(t)\,dt \right| + |g(x_2)| \left| \int_{c}^{x_2} f(t)\,dt \right|$$

$$\leq \widetilde{M} \cdot \frac{\varepsilon}{2\widetilde{M}} + \widetilde{M} \cdot \frac{\varepsilon}{2\widetilde{M}} = \varepsilon.$$

Jeżeli zachodzi (D), to $\exists_{d>a}$ tż. $\forall_{x>d} |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$

i dla $x_1, x_2 > d$

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) g(t)\,dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M = \varepsilon.$$

$\square$.

1. Wzór Wallisa

Miał być na ćwiczeniach, więc tu tylko szkic dowodu:

jeżeli $(2n)!! = 2n(2n-2)(2n-4)\cdots 2$

$(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 1$

to $$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{((2n)!!)^2}{((2n+1)!!)^2}\cdot(2n+1) = \frac{\pi}{2}}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

wzór Wallisa

John Brehaut Wallis (1616–1703)
o pokolenie starszy od Newtona!
tworzył szyfry dla Parlamentu i dworu królewskiego; wykładał na Oxfordzie;
Niezwykle sprawny w rachunkach. Wprowadził oznaczenie ∞ do analizy, oś liczbową, potęgi o wykł. wymiernych;
napisał używany przez ponad 100 lat podręcznik gramatyki angielskiej.

Szkic dowodu:

Niech $I_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$.

Całkując $2\times$ przez części dostajemy $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

$I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$ (bezpośredni rachunek).

stąd $$I_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{\pi}{2}$$

$$I_{2n+1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

Z (oczywistych – dlaczego?) nierówności

$$I_n \geq I_{n+1} \geq I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

wywnioskowujemy, że $$\frac{I_{n+1}}{I_n} \to 1$$

skąd $$\frac{[(2n+1)!!]^2}{(2n+1)\cdot[(2n)!!]^2}\cdot\frac{\pi}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Wzór Stirlinga

Niech $a_n = n!\left(\frac{e}{n}\right)^n$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\;\left(\frac{e}{n}\right)^n} = \frac{e\cdot(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = e\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= e\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e\cdot\frac{1}{e} = 1$$

Teraz:

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\ldots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1 = \left[e\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-(n-1)}\right]\cdot\left[e\left(1+\frac{1}{n-2}\right)^{-(n-2)}\right]\cdot$$

$$\cdot\ldots\cdot\left[e\left(1+\frac{1}{1}\right)^{-1}\right]\cdot e$$

$$\ln a_n = \left[1-(n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right] + \left[1-(n-2)\ln\left(1+\frac{1}{n-2}\right)\right]+\ldots+$$

$$+\left[1-\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)\right]+1$$

Będziemy próbowali oszacować $\ln a_n$ dla dużych n. Przyjrzyjmy się pojedynczemu nawiasowi kwadratowemu

$$\left[1-k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{3k^3}-\ldots$$

$$1-k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = 1-k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{3k^3}-\ldots\right) = 1-1+\frac{1}{2k}-\frac{1}{3k^2}+\frac{1}{4k^3}-\ldots$$

$$=\frac{1}{2k}-b_k,\quad \text{gdzie } b_k = \frac{1}{3k^2}-\frac{1}{4k^3}+\ldots$$

$$b_k\in\left(\frac{1}{3k^2}-\frac{1}{4k^3},\ \frac{1}{3k^2}\right)$$

przy tych oznaczeniach

$$\ln a_n = \frac{1}{2(n-1)}-b_{n-1}+\frac{1}{2(n-2)}-b_{n-2}+\ldots+\frac{1}{2\cdot 1}-b_1+1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right) + (b_1+b_2+\ldots+b_{n-1}) + 1$$

$$= \frac{1}{2}(\ln n + c_n) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} b_k + 1}_{D_n \to D = \mathrm{const.}}$$

, gdzie $c_n \to \gamma$ stała Eulera-Mascheroniego, $0 < b_k < \frac{1}{3k^2}$;

$$= \frac{1}{2}\ln n + D_n = \ln\sqrt{n} + D_n, \qquad D_n \longrightarrow D = \mathrm{const}$$

Stąd $\ln\frac{a_n}{\sqrt{n}} = D_n \longrightarrow D = \mathrm{const.}$

$$\alpha_n = \frac{a_n}{\sqrt{n}} \longrightarrow e^D > 0.$$

$$\alpha_n = \frac{n!}{\sqrt{n}}\cdot\left(\frac{e}{n}\right)^n \longrightarrow e^D \Longrightarrow \alpha_{2n} \to e^D.$$ Stąd

$$e^D = \frac{e^{2D}}{e^D} \leftarrow \frac{\alpha_n^2}{\alpha_{2n}} = \frac{(n!)^2}{n}\cdot\frac{\cancel{e^{2n}}}{\cancel{n^{2n}}}\cdot\frac{\sqrt{2n}\cdot(2\cancel{n})^{2n}}{\cancel{e^{2n}}\cdot(2n)!} = \sqrt{\frac{2}{n}}\cdot\frac{n!}{(2n)!}\cdot n!\cdot 4^n =$$

$$\frac{(2n)!}{n!} = \frac{2n}{n}\cdot(2n-1)\cdot\frac{2n-2}{n-1}\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot\frac{2}{1}\cdot 1 = 2^n\cdot(2n-1)!!$$

$$n!\cdot 2^n = 2\cdot n\cdot 2\cdot(n-1)\cdot 2\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = 2n(2n-2)(2n-4)\cdot\ldots\cdot 2 = (2n)!!$$

$$= \sqrt{\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{2^n(2n-1)!!}\cdot 2^n\cdot(2n)!! = \sqrt{\frac{2}{n}\cdot\frac{((2n)!!)^2}{((2n-1)!!)^2}} =$$

$$= \sqrt{\underbrace{\frac{2}{n}\cdot\frac{(2n+1)^2}{\cancel{2n+1}}}_{\downarrow\ 4}\cdot\underbrace{\frac{((2n)!!)^2}{((2n+1)!!)^2}\cdot(2n+1)}_{\downarrow\ \text{wzór Wallisa}\ \frac{\pi}{2}}} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{2\pi}$$

Stąd $\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

i mamy przybliżony wzór na $n!$

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\cdot(n/e)^n$$

wzór Stirlinga

być może znany wcześniej A. de Moivre, z którym Stirling wiele współpracował.

James Stirling 1692-1770