Сергей Натанович Бернштейн (Siergiej Natanowicz Bernstein) 1880–1968 wielki matematyk rosyjski. Studiował w Paryżu i Getyndze.
W swoim pierwszym, paryskim doktoracie, rozwiązał (przy pewnych dodatkowych założeniach) XIX problem Hilberta (analit. rozwiązań pewnego typu równań różn.); w Rosji musiał powtórzyć i magisterium, i doktorat; w ramach magisterium rozwiązał (znów przy pewnych dodatkowych założeniach) XX problem Hilberta (rach. wariacyjny). Pracował najpierw w Charkowie, potem w Leningradzie i Moskwie. Zajmował się teorią aproksymacji i rachunkiem prawdopodobieństwa.

Twierdzenie (Weierstrassa o przybliżaniu funkcji ciągłych wielomianami)

Każda funkcja ciągła $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów.

Dowód: Wskażemy palcem odpowiedni ciąg wielomianów.

~~Def: n-tym wielomianem Bernsteina funkcji f~~

Załóżmy, że $[a,b] = [0,1]$ (możemy, bo jeżeli umiemy przybliżać $\tilde{f}(t) = f(a + t(b-a))$ na $[0,1]$, to umiemy przybliżać f na $[a,b]$. $(|\tilde{f}(t) - \tilde{w}(t)| = |f(a+t(b-a)) - w(a+t(b-a))|)$

Odtąd $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ ciągła.

Def: n-ty wiel. Bernsteina funkcji f ~~na~~ to

$$B_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$ wiel. stopnia n.

Wykażemy, że $B_n^f \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$.

Potrzebne nam będą 3 tożsamości i 1 nierówność:

(T1) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = 1$$

(T2) $$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = nt$$

(T3) $$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = n(n-1)t^2 + nt$$

(N) oznaczmy przez $K_{t,\delta}$ zbiór $\{k \in \{0,\dots,n\} : |\frac{k}{n} - t| \geq \delta\}$

Wówczas $\forall_{\delta>0}$

$$\sum_{k \in K_{t,\delta}} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \leq \frac{1}{n} \frac{t(1-t)}{\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

(szczeg. przypadek nier. Czebyszewa)

(T1): $(t + (1-t))^n = 1$

(T2): $$k\binom{n}{k} = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} =$$

dla $k \geq 1$ $$= n\binom{n-1}{k-1}, \text{ stąd}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \cdot t \cdot t^{k-1} (1-t)^{(n-1)-(k-1)} =$$

$$= nt \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} t^{k-1} (1-t)^{(n-1)-(k-1)} = nt$$

(T3): podobnie, proszę pokombinować.

(N): Oszacujemy $n^2\delta^2 \sum_{k\in K_{t,\delta}} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$:

$$n^2\delta^2 \sum_{k\in K_{t,\delta}} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \leq \sum_{k\in K_{t,\delta}} (k-nt)^2 \binom{n}{k} t^k (1-t)^k$$

(gdy $k\in K_{t,\delta}$, to $(k-nt)^2 \geq n^2\delta^2$)

$$\leq \sum_{k=0}^{n} (k-nt)^2 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (k^2 - 2knt + n^2t^2) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}}_{\substack{z\,(T3) \\ = n(n-1)t^2 + nt}} - 2nt \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}}_{\substack{z\,(T2) \\ = nt}}$$

$$+ n^2t^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}}_{z\,(T1)\ = 1} = n(n-1)t^2 + nt - 2n^2t^2 + n^2t^2 =$$

$= n\,t(1-t)$; zauważmy, że dla dowolnego $t\in\mathbb{R}$ $t(1-t)\leq \frac{1}{4}$ (jakie jest maksimum $\varphi(t) = t(1-t)$?).

stąd $\leq \frac{n}{4}$. Dzieląc stronami przez $n^2\delta^2$ dostajemy nierówność Czebyszewa.

No to czas na dowód, że $B_n^f \rightrightarrows f$ na $[a,b]$.

f jest na $[0,1]$ jednostajnie ciągła,
więc $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x,y\in[0,1]}$ $|x-y|<\delta$, to $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$

f ograniczona na $[0,1]$; $\exists_{M>0} \forall_{x\in[0,1]}$ $|f(x)|<M$

Oszacujmy, dla $x\in[0,1]$,

$$|f(x)-B_n^f(x)| = \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right| =$$

$$\overset{z(T1)}{=} \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x)-f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta \\ k\in\{0,1,\dots,n\}}} \left|f(x)-f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} +$$

$$+ \sum_{\underbrace{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta}_{k\in K_{x,\delta}}} \overbrace{\left|f(x)-f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right|}^{<2M}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + 2M\sum_{k\in K_{x,\delta}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\overset{zT1}{\underset{i\ N}{<}} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{4n\delta^2}.$$

Wystarczy teraz wziąć n_0 takie, by $\frac{2M}{4n_0\delta^2}<\frac{\varepsilon}{2}$, wtedy

$$\forall_{x\in[0,1]} \forall_{n>n_0} \ |f(x)-B_n^f(x)|<\varepsilon$$

czyli $B_n^f \rightrightarrows f$.

Przypomnienie:

$A \subset \mathbb{R}^n$ jest <u>zwarty</u>, jeżeli z każdego ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów A można wybrać podciąg $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ zbieżny (do pewnego $a \in A$).

$A \subset \mathbb{R}^n$ jest zwarty $\Leftrightarrow$ A jest a) domknięty i
b) ograniczony

a) jeżeli $\forall_n\, a_n \in A$ i $a_n \to a$, to $a \in A$
b) $\exists_{M>0} \forall_{a\in A}\ |a| < M$.

Jak wspominałem, o zwartości jest sens mówić również w ogólniejszej sytuacji, niż tylko dla podzbiorów $\mathbb{R}^n$.

Mówimy, że rodzina $\mathcal{F}$ funkcji określonych na zbiorze A jest zwarta, jeżeli z każdego ciągu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcji z $\mathcal{F}$ możemy wybrać podciąg $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ zbieżny ~~do~~ jednostajnie (do pewnego $f \in \mathcal{F}$).

~~Dla~~ Nas będą interesowały funkcje określone na A zwartym. Okaże się, że dwa warunki znane nam z $\mathbb{R}^n$: domkniętość i ograniczoność (odpowiednio rozumiane) są wciąż warunkami koniecznymi na zwartość $\mathcal{F}$, ale nie są już dostateczne. Mówi o tym tw. Arzeli–Ascoliego

Tw. Arzeli - Ascoliego

Rodzina $\mathcal{F}$ funkcji ciągłych określonych na zbiorze zwartym A jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest

- wspólnie ograniczona

$\left(\exists_{M>0} \forall_{f\in\mathcal{F}} \sup_{x\in A} |f(x)|<M\right)$

- domknięta: Jeżeli wybierzemy ciąg funkcji $f_n \in \mathcal{F}$, i $f_n \rightrightarrows f$, ~~te~~ na A, to $f \in \mathcal{F}$
- jednakowo (jednostajnie) ciągła

$\left(\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x,y\in A} \forall_{f\in\mathcal{F}} |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon\right)$.

Giulio Ascoli
1843 – 1896

włoski Żyd, pochodził z Triestu, studiował w Pizie, później pracował na politechnice w Mediolanie

wprowadził pojęcie równociągłości (jednakowej ciągłości).

Cesare Arzelà
1847 – 1912

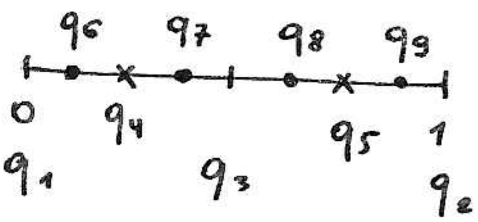
pochodził z biednej liguryjskiej rodziny (Pn. Włochy), ~~późno zaczął studia~~ studiował w Pizie (uczeń Diniego), później ~~był profesorem w~~ pracował we Florencji i Palermo ostatecznie osiadł na Uniwersytecie w Bolonii

Na początek przyjrzymy się dowodowi tw. Arzeli - Ascoliego w przypadku, gdy $A = [0,1]$ (tak, jak to robił Ascoli). Z tw. Bolzano - - Weierstrassa wiemy, że $[0,1]$ jest zbiorem zwartym.

Rozważmy następujący ciąg liczb z $[0,1]$:

$$\underset{q_1}{\overset{}{0}},\ \underset{q_2}{1},\ \underset{q_3}{\frac{1}{2}},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{3}{16},\ \frac{5}{16},\ \frac{7}{16},\ \frac{9}{16},\ \frac{11}{16},\ \dots$$

$q_1, q_2, q_3, \dots$



itd.

Zauważmy, że $\forall_{x\in[0,1]} \forall_{\varepsilon>0} \exists_{i\in\mathbb{N}} \ |x-q_i|<\varepsilon$

– zbiór wyrazów ciągu (q_i) jest gęstym podzbiorem $[0,1]$.

<u>Def</u>: Zbiór A nazywamy ośrodkowym, jeżeli ma przeliczalny podzbiór gęsty (ośrodek).

Udowodnimy najpierw, że jeżeli rodzina $\mathcal{F}$ funkcji z $[0,1]$ w $\mathbb{R}$ jest ① wspólnie ograniczona, ② domknięta i ③ jednakowo ciągła, to jest zwarta.

Wybierzmy ciąg (f_n) elementów $\mathcal{F}$; musimy wskazać podciąg tego ciągu, jednostajnie zbieżny do $f\in\mathcal{F}$.

• ciąg $f_n(q_1) = f_n(0)$ jest ograniczony, ↙ z ogr. $\mathcal{F}$.
możemy więc wybrać ~~podciąg~~ ~~$f_{i(1,n)}(q_1)$~~
podciąg $i(1,n)$ ciągu liczb nat. taki, że
$f_{i(1,n)}(q_1)$ jest zbieżny.

• z ciągu ~~$f_{i(1,n)}$~~ $(i(1,n))_n$ wybieram podciąg
$(i(2,n))_n$ taki, że $\left(f_{i(2,n)}(q_2)\right)_n$ jest zbieżny

⋮

• z ciągu $(i(k,n))_n$ wybieram podciąg $(i(k+1,n))_n$
taki, że $\left(f_{i(k+1,n)}(q_{k+1})\right)$ jest zbieżny.

⋮

Stąd $\left(f_{i(k,n)}(q_l)\right)_n$ jest zbieżny dla $l = 1, 2, \dots, k$.
~~Więc~~ Przyjrzyjmy się teraz ciągowi $\left(f_{i(n,n)}(q_l)\right)_n$.
Dla ustalonego l jest to, po odrzuceniu pierwszych
$l-1$ wyrazów, podciąg ciągu $\left(f_{i(l,n)}(q_l)\right)$, jest
więc w q_l zbieżny — ~~tzn~~ dla dowolnego $l \in \mathbb{N}$
Wykażemy, że ciąg $f_{i(n,n)}$ jest jednostajnie zbieżny (wtedy, z domkniętości $\mathcal{F}$, jego granica będzie musiała leżeć w $\mathcal{F}$). Badamy jednost.
warunek Cauchy'ego:

~~$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0}{\exists}\ \underset{n,m}{\forall}\ \underset{x}{\forall}\ f_{i(n,n)}(x)$~~

czy: $\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0}{\exists}\ \underset{n,m>n_0}{\forall}\ \underset{x\in[0,1]}{\forall}\ \left|f_{i(n,n)}(x) - f_{i(m,m)}(x)\right| < \varepsilon$?

Wiemy, że rodzina $\mathcal{F}$ jest jednakowo ciągła, więc

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x,y\in[0,1]} \forall_{f\in\mathcal{F}} \; |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

~~Wiemy~~ Wybierzmy q_j takie, że $|q_j - x|<\delta$.

Ciąg $(f_{i(n,n)}(q_j))$ jest zbieżny, więc

$$\exists_{n_0} \forall_{n,m>n_0} \left|f_{i(n,n)}(q_j) - f_{i(m,m)}(q_j)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

stąd

$$|f_{i(n,n)}(x) - f_{i(m,m)}(x)| \le |f_{i(n,n)}(x) - f_{i(n,n)}(q_j)| + |f_{i(n,n)}(q_j) - f_{i(m,m)}(q_j)| + |f_{i(m,m)}(q_j) - f_{i(m,m)}(x)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

To kończy dowód w jedną stronę. Musimy teraz wykazać, że jeżeli rodzina $\mathcal{F}$ jest ~~domknięta, ograniczona i jedn~~ zwarta, to jest domknięta, ograniczona i jednakowo ciągła.

<u>domkniętość</u>: Załóżmy, że $\mathcal{F}$ nie jest domknięta, a więc istnieje ciąg (f_n) elementów $\mathcal{F}$ jednost. zbieżny do $f\notin\mathcal{F}$. Oczywiście każdy podciąg ciągu (f_n) też jest zbieżny do f, więc nie można z (f_n) wybrać podciągu zbieżnego do elementu rodziny $\mathcal{F}$.

~~Wiemy, że rodzina $\mathcal{F}$ jest jednakowo ciągła, więc $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x,y\in}$~~

Ograniczoność

Załóżmy, że $\mathcal{F}$ nie jest ograniczona –
– znajdziemy zatem ciąg (f_n) taki,
że $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

Wybierzmy teraz, dzięki zwartości $\mathcal{F}$, ~~po~~ z (f_n) podciąg $(f_{n_k})_k$ jednost. zbieżny na $[0,1]$.
$f_{n_k} \rightrightarrows f$. Skoro f_{n_k} są ciągłe, to f też,
ale ~~$\sup |f_{n_k}(x)|$~~ ~~$\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \geq \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_{n_k}(x)| -$~~

~~$\geq$ su~~ nier. Δ ~~sq~~

$$|f(x)| \geq -|f(x) - f_{n_k}(x)| + |f_{n_k}(x)|$$

$|f_{n_k}(x)| \leq |f_{n_k}(x) - f(x)| + |f(x)|$

$$\Downarrow$$

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \geq -\underbrace{\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_{n_k}(x)|}_{\to 0 \text{ bo } f_{n_k} \rightrightarrows f} + \underbrace{\sup_{x\in[0,1]} |f_{n_k}(x)|}_{\to \infty}$$

$\Rightarrow \sup |f(x)| = \infty$ ↯ bo f na $[0,1]$ ciągła $\Rightarrow$ ograniczona jednakowa ciągłość:

Załóżmy, że $\mathcal{F}$ nie jest jednakowo ciągła.

$\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} \;\cancel{\exists}_n \;\exists_{f_n \in \mathcal{F},\; x_n, y_n \in [0,1]}$

tż. $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, ale $|f_n(x_n) - f_n(y_n)| \geq \varepsilon$.

Z ciągu (x_n) możemy wybrać podciąg zbieżny $x_{n_k} \longrightarrow \tilde{x}$. Oczywiście $y_{n_k} \longrightarrow \tilde{x}$.

Ze zwartości $\overline{\mathcal{F}}$ z ciągu (f_{n_k}) możemy wybrać podciąg jednost. zbieżny (dalej oznaczam go przez f_{n_k}, żeby nie komplikować symboli).

$f_{n_k} \rightrightarrows f \in \overline{\mathcal{F}}$.

$$\varepsilon \leq |f_{n_k}(x_{n_k}) - f_{n_k}(y_{n_k})| \leq |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| + |f(x_{n_k}) - f(\tilde{x})| + |f(\tilde{x}) - f(y_{n_k})| + |f(y_{n_k}) - f_{n_k}(y_{n_k})|$$

dążą do 0 przy $k \to \infty$, bo f ciągła, $x_{n_k} \to \tilde{x}$, $y_{n_k} \to \tilde{y}$.

dążą do 0 przy $k \to \infty$, bo $f_{n_k} \rightrightarrows f$

$\lightning$.

Przykład rodziny jednakowo ciągłej:

~~funkcje z lip~~ rodzina funkcji ciągłych o wspólnie ogr. stałej Lipszyca, wspólnie ograniczonych.

np $\mathcal{F} = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} : \cancel{f \text{ jest ograniczona}}$
$\forall_x \ |f(x)| < 1,$
$\forall_{x,y} \ |f(x) - f(y)| \leq 5|x-y| \}$

Jak teraz przeprowadzić dowód dla dowolnego A zwartego? Jedyna własność odcinka, z jakiej korzystaliśmy, i która nie była explicite ~~zw~~ związana ze zwartością $[0,1]$, to ośrodkowość (dokładniej – wybór ciągu (q_i)). Jest jasne, że wystarczy znaleźć ~~ci~~ przeliczalny zbiór gęsty w A i ustawić w ciąg q_i; gdy $A \subset \mathbb{R}^n$ możemy wybrać np. ~~dowolny~~ zbiór punktów z A o wszystkich współrzędnych wymiernych. Okazuje się, że każdy zbiór zwarty (również w przestrzeniach funkcyjnych itp) jest ośrodkowy, ~~a~~ a więc i ta własność jest konsekwencją zwartości A, ale to inna historia.

Wzmocnienie twierdzenia Weierstrassa

Def. Mówimy, że ciąg funkcji (f_n) jest niemal jednostajnie zbieżny na zbiorze A, do funkcji f, jeżeli ciąg ten jest jednostajnie zbieżny na każdym zwartym podzbiorze zbioru A.

Twierdzenie - wniosek z tw. Weierstrassa
Dla dowolnego przedziału (a,b), $a,b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ i funkcji ciągłej $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, istnieje ciąg wielomianów (w_n) niemal jednostajnie zbieżny do f na (a,b).

Dowód: Niech (b_n) będzie rosnącym ciągiem, $b_n \longrightarrow b$; (a_n) - malejącym, $a_n \longrightarrow a$ oraz $a_1 < b_1$ (wtedy $\forall_n \; a_n < b_n$). To ostatnie możemy założyć o ile tylko $(a,b) \neq \emptyset$, ale ten przypadek jest trywialny.
Na każdym z przedziałów $[a_n, b_n]$ możemy przybliżyć f wielomianem z dowolną dokładnością - niech więc w_n będzie wielomianem takim, że $|f_n(x) - w_n(x)| < \frac{1}{n}$ dla $x \in [a_n, b_n]$

Twierdzę, że ciąg (w_n) zbiega niemal jednostajnie do f na (a,b).
Zauważmy bowiem, że dowolny zbiór K zwarty zawarty w (a,b) leży w jakimś $[a_{n_0}, b_{n_0}]$ (dlaczego?) – a więc i we wszystkich $[a_n, b_n]$ dla $n > n_0$.
Stąd dla $n \geq n_0$ $\sup_{x\in K} |f(x) - w_n(x)| < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

cyli $w_n \rightrightarrows f$ na K.

<u>Uwaga</u>: Ten sam dowód zadziała dla $[a,b)$ i $(a,b]$ i $[a,b]$ – wystarczy np. w pierwszym przypadku przyjąć $\forall_n\, a_n = a$.

<u>Def</u>: Niech P będzie przedziałem*, $f: P \to \mathbb{R}$ niech będzie funkcją ciągłą. Funkcją pierwotną funkcji f na P nazywamy $F: P \to \mathbb{R}$ takie, że $\forall_{x\in P}$ $F'(x) = f$.

<u>Uwaga 1</u>. Jeżeli F jest funkcją pierwotną f na P, to dla dowolnej stałej C funkcja $F + C$ też jest funkcją pierwotną funkcji f na P – – a więc funkcja pierwotna, o ile istnieje, nie jest wyznaczona jednoznacznie.

---

* otwartym, domkniętym, otwarto-domkniętym – wszystko jedno

Uwaga 2 Jeżeli F i G są funkcjami pierwotnymi f na P, to $F-G=\text{const}$.

Dowód: Oznaczmy $H(x)=F(x)-G(x)$.

Mamy $\forall_{x\in P}\ H'(x)=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0$.

Wybierzmy teraz dowolne $a,b\in P$, $a<b$.

H jest różniczkowalna na $P \Rightarrow$ jest ciągła na $[a,b]$, różn. na (a,b);

z tw. Lagrange'a $\exists_{\xi\in(a,b)}\ \frac{H(b)-H(a)}{b-a}=H'(\xi)=0$

$$\Rightarrow H(b)=H(a).$$

z dowolności a i b $H=\text{const}$ na P. $\square$

No, ale czy każda funkcja ciągła $f: P\to\mathbb{R}$ ma funkcję pierwotną?

Twierdzenie: TAK.

<u>Dowód</u> Jeżeli $P = (a,b)$, to rozważmy

niemalejący ciąg $b_n \to b$ $\quad a_1 < b_1$

nierosnący ciąg $a_n \to a$

Jeżeli $P = [a,b)$, to połóżmy $\forall_n \; a_n = a$

$(a,b]$ $\qquad \forall_n \; b_n = b$

$[a,b]$ $\qquad \forall_n \; a_n = a, \; b_n = b$.

Wówczas $\forall_{x \in P} \exists_k \quad x \in [a_k, b_k]$.

Niech teraz (w_n) oznacza ciąg wielomianów niemal jednostajnie zbieżny do f na P.

Jeżeli $w_n(x) = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$,

to zdefiniujmy $W_n(x) = \frac{\alpha_m}{m+1}(x^{m+1} - a_1^{m+1}) +$

$$+ \frac{\alpha_{m-1}}{m}(x^m - a_1^m) + \ldots + \frac{\alpha_1}{2}(x^2 - a_1^2) + \alpha_0 (x - a_1).$$

Mamy oczywiście $W_n(x_0) = 0$, $W_n'(x) = w_n(x)$ (dla każdego $x \in \mathbb{R}$).

Wykażemy teraz, że

1. ciąg W_n jest niemal jednostajnie zbieżny na P do pewnej funkcji F
2. $\forall_{x \in P} \quad F'(x) = f(x)$.

Ustalmy bowiem jakiekolwiek $x \in P$. Istnieje wówczas przedział $[a_k, b_k]$ taki, że $x \in [a_k, b_k]$.

Funkcje $W_n : [a_k, b_k] \to \mathbb{R}$ są zbieżne (do 0) w $a_1 \in [a_k, b_k]$

a $W_n' = w_n \underset{\text{na } [a_k, b_k]}{\rightrightarrows} f$, więc na mocy tw. o różniczkowaniu szeregów funkcyjnych (W_n) jest zbieżny jednostajnie

$W_n \rightrightarrows F$ na $[a_k, b_k]$ i $F'(x) = f(x) \quad \forall_{x \in [a_k, b_k]}$.

Skoro x było dowolne, to $F' = f$ na P.

Uwaga 3

Jeżeli funkcja f nie jest określona na przedziale, to teza Uwagi 2. nie musi zachodzić: jak łatwo sprawdzić, funkcja $F(x) = \frac{1}{x}$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ wszędzie, gdzie tylko obie te funkcje są określone. Podobnie jednak ~~dla~~ funkcją pierwotną f jest

$$G(x) = \frac{1+|x|}{x}, \text{ pomimo że } F(x) - G(x) = -\frac{|x|}{x} \neq const \text{ na } \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Zauważmy jednak, że dziedzina f składa się z dwóch przedziałów (półprostych), na każdym z nich $F(x) - G(x)$ jest stała.

Jeżeli F i G są funkcjami pierwotnymi f określonej na rozłącznej sumie przedziałów, to $F - G$ jest stała na każdym z tych przedziałów (ale na różnych przedziałach mogą to być różne wartości).

Oznaczenie

Funkcję pierwotną funkcji $f: P \to \mathbb{R}$ oznaczać będziemy

$$\int f(x)\,dx$$ i nazywać całką nieoznaczoną funkcji f

To oznaczenie ma sens z dokładnością do stałej. Wiemy, że

$$\int 0\,dx = C \qquad \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

o ile $a \neq -1$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\int \ln x\,dx = ? \qquad \int \tan x\,dx = ? \qquad \int \mathrm{ctg}\,x\,dx = ?$$

Oczywiście z własności pochodnej wiemy od razu, że całka nieoznaczona jest, jak pochodna, operacją liniową:

Jeżeli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g: P \to \mathbb{R}$, to

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

(bo pochodne obu stron równania są równe).

Przy liczeniu pochodnych pomocne nam były 2 wzory pozwalające sprowadzać różniczkowanie złożonych wyrażeń do różniczkowania ich części składowych: wzór Leibniza na pochodną iloczynu i wzór na pochodną złożenia funkcji.

Oba mają ważne skutki dla całkowania:

① wzór na całkowanie przez części:

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)\,g'(x)$$

Dowód: różniczkujemy stronami:

$$f'(x)g(x) = (f(x)g(x))' - f(x)g'(x) \longleftarrow \text{wzór Leibniza}$$

Zastosowanie

$$\int \ln x\,dx = \int (x)' \ln x\,dx = x\ln x - \int x(\ln x)'\,dx =$$

$$= x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + C$$

$$\int x e^x\,dx = \int x(e^x)'\,dx = xe^x - \int (x)' e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

② wzór na całkowanie przez podstawianie

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + C, \quad \text{gdzie } F(t) = \int f(t)\,dt$$

Dowód - jak w ①.

W praktyce ten wzór stosuje się następująco:

Widząc $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ „podstawiam" za $g(x)$ nową zmienną, wp. t; oznaczając $g'(x)dx$ symbolem dt

mnemotechnika: jeżeli $t = g(x)$, to $g'(x) = \frac{dg(x)}{dx} = \frac{dt}{dx}$ „$\Rightarrow$" $dt = \ldots$

$$\int f(g(x))\, g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t) + C$$

i tu „przypominam sobie", że $t = g(x)$, podstawiając $g(x)$ w miejsce t.

Przykład:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \underbrace{\left(-\frac{1}{\cos x}\right)}_{f(\cos x)} \underbrace{(-\sin x)}_{(\cos x)'}\,dx =$$

gdzie $f(t) = -\frac{1}{t}$

$t = \cos x$

$dt = -\sin x\,dx$

$$= -\int \frac{1}{t}\,dt = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C$$

Wielomiany

Wielomian – funkcja na $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ postaci
$W(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (lub $\mathbb{C}$), liczby $a_0, \dots, a_n$ to współczynniki wielomianu, $a_n \neq 0$.
n – stopień wielomianu. ($\deg w$)

Umowa: wielomian zerowy ma stopień $-\infty$.

Własności stopnia (oczywiste): $\deg(v \cdot w) = \deg v + \deg w$
$\deg(v \pm w) \leq \max(\deg v, \deg w)$

Wielomiany można dzielić z resztą:

Twierdzenie: Dla dowolnych wielomianów w i v, $v \not\equiv 0$, istnieje dokładnie jedna para wielomianów q, r taka, że $w = qv + r$, $\deg r < \deg v$.

Dowód: najpierw istnienie.

Jeżeli $\deg w < \deg v$, to kładziemy $q=0$, $r=w$.
Załóżmy, że $\deg w \geq \deg v$ i że twierdzenie zachodzi dla dowolnego $\tilde{w}$ stopnia niższego niż w.
Niech $v(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0$, $w(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0$.
Wielomian $\tilde{w}(x) = w(x) - \frac{a_m}{b_n} x^{n-m} v(x)$ jest niższego stopnia niż w (wyrazy z x^n redukują się), zatem istnieją $\tilde{q}$, r takie, że

$$\tilde{w}(x) = w(x) - \frac{a_m}{b_n} x^{n-m} v(x) = \tilde{q}(x)v(x) + r(x), \quad \deg r < \deg v$$

cyli

$$w(x) = \underbrace{\left[\frac{a_m}{b_n} x^{n-m} + \tilde{q}(x)\right]}_{q(x).} v(x) + r(x)$$

Zagadka: gdzie tu jest pierwszy krok indukcji?

Jednoznaczność: niech $w(x) = q(x)v(x) + r(x)$
$$= \tilde{q}(x)v(x) + \tilde{r}(x)$$

$$qv + r = \tilde{q}v + \tilde{r}$$

$$L = (q - \tilde{q})v = \tilde{r} - r = P$$ sprawdźmy stopnie obu stron

$\deg L = \deg((q-\tilde{q})v) = \deg(q-\tilde{q}) + \deg v$
$\parallel$
$\deg P = \deg(\tilde{r} - r) \leq \max(\deg \tilde{r}, \deg r) < \deg v$

stąd $\deg(q - \tilde{q}) < 0 \Rightarrow q - \tilde{q} = 0$
$$q = \tilde{q}$$

to oznacza, że $r = \tilde{r}$.

<u>Def.</u> Mówimy, że w ma pierwiastek w x_0, jeżeli $w(x_0) = 0$.

<u>Def.</u> Wielomian $q \not\equiv 0$ jest dzielnikiem wielomianu w, jeżeli istnieje wielomian p tż. $w = pq$.

<u>Twierdzenie</u>: Jeżeli x_0 jest pierwiastkiem w, to $(x - x_0)$ jest dzielnikiem wielomianu w.

<u>Dowód</u>: Rozwińmy $w(x)$ w szereg Taylora wokół x_0. Oczywiście dla $n > \deg w$ mamy $w^{(n)}(x_0) = 0$, zatem otrzymujemy skończony wielomian.

$$w(x) = \overset{=0}{w(x_0)} + w'(x_0)(x - x_0) + \frac{w''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{w^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$
$$= (x - x_0)\left[w'(x_0) + (x - x_0)\frac{w''(x_0)}{2!} + \ldots + \frac{w^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^{n-1}\right].$$

Def: Mówimy, że v, w są względnie pierwsze, jeżeli nie istnieje wielomian p stopnia >0, będący równocześnie dzielnikiem v i w. Piszemy wówczas $v \perp w$

Lemat: Jeżeli $v \perp w$, to istnieją wielomiany p, q takie, że $pv + qw = 1$.

Dowód: Niech A oznacza zbiór wszystkich wielomianów postaci $pv+qw$, a d niech oznacza wielomian ~~...~~ unormowany (tj. o współczynniku 1 przy najw. potędze x), najniższego stopnia spośród tych znajdujących się w A.

$$d = p_0 v + q_0 w.$$

Wykażemy, że $d|v$ i $d|w$, a więc (skoro $v \perp w$) $\deg d = 0$, $d = \text{const}$ ($d=1$).

$$p_0 v + q_0 w = 1.$$

Załóżmy bowiem, że $d \nmid v$. Możemy podzielić v przez d z resztą:

$v = \tilde{q} d + r$, $\deg r < \deg d$.

$= \tilde{q}(p_0 v + q_0 w) + r$, skąd $r = (1 - \tilde{q} p_0)v - \tilde{q} q_0 w \in A$.

$\deg r < \deg d$, więc $r = 0$ (gdyby $r \neq 0$, to po unormowaniu mielibyśmy wielomian unorm. w A, stopnia $< \deg d$).

czyli $d|v$.

Analogicznie wykazujemy, że $d|w$.

Twierdzenie (zasadnicze tw. algebry).

Sformułować i przedstawić dowód (z lukami). d'Alembert, dowody (— " —): Euler, Lagrange ostatecznie Gauss (1799 niekompletny ~1814 kompletny 1820 inny dowód) i Argand (w 1814 uzupełnił dowód d'Alemberta).

Każdy wielomian dodatniego stopnia (o współczynnikach w $\mathbb{R}$ lub w $\mathbb{C}$) ma pierwiastek zespolony.

Dowód:

Oznaczmy nasz wielomian przez w,

$$w(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0.$$

Lemat: Funkcja $f(z) = |w(z)|$ przyjmuje na $\mathbb{C}$ minimum globalne.

Dowód lematu

Wykażemy najpierw, że istnieje takie $R > 0$, że dla $z: |z| > R$ mamy $f(z) \geq a_0$.

Dla $|z|>R$ mamy bowiem $f(z) = |a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0| \geq$

$$\geq |a_n||z|^n - |a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0| \geq |z|^n \left(|a_n| - \frac{1}{|z|}\left(|a_{n-1}| + \frac{1}{|z|}|a_{n-2}| + \ldots + \frac{1}{|z|^n}|a_0|\right)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{o ile } R>1}}{\geq} |z|^n\left(|a_n| - \frac{n\max(|a_{n-1}|, \ldots, |a_0|)}{R}\right)$$

$$\underset{\text{o ile } R \geq \frac{2n\max(|a_{n-1}|,\ldots,|a_0|)}{|a_n|}}{\geq} R^n\left(|a_n| - \frac{1}{2}|a_n|\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{o ile } R \geq \sqrt[n]{\frac{2|a_0|}{|a_n|}}}}{\geq} |a_0| .$$

A więc poza kołem $\{|z| \leq R\}$ f przyjmuje wartości większe niż $f(0) = |a_0|$, czyli $\min_{z\in\mathbb{C}} f(z) = \min_{|z|\leq R} f(z)$ $(\leq |a_0|)$.

Ale zbiór $\{|z| \leq R\}$ jest zwarty, więc funkcja ciągła f przyjmuje na nim minimum.

Oznaczmy punkt, w którym osiągane jest to minimum przez z_0 i załóżmy, że $f(z_0) \neq 0$. Rozwińmy $w(z)$ w szereg (tu: wielomian) Taylora wokół z_0:

$$w(z) = w(z_0) + \alpha_1(z-z_0) + \alpha_2(z-z_0)^2 + \dots + \alpha_n(z-z_0)^n.$$

Z założenia $w \not\equiv const$ (bo $\deg w > 0$), więc nie wszystkie α_i są równe 0.

$$w(z) = w(z_0) + \alpha_k(z-z_0)^k + \dots + \alpha_n(z-z_0)^n, \quad \alpha_k \neq 0.$$

Połóżmy $z = z_0 + \tau y$, gdzie $y: y^k = -\frac{w(z_0)}{\alpha_k}$. Wówczas
$\tau \in \mathbb{R},\ \tau > 0$

$$w(z_0+\tau y) = w(z_0) - w(z_0)\tau^k + \tau^{k+1}\left(\alpha_{k+1}y^{k+1} + \alpha_{k+2}\tau y^{k+2} + \dots + \alpha_n \tau^{n-k-1} y^n\right)$$

Dla $\tau \leq 1$ mamy $|\tau^{k+1}(\alpha_{k+1}y^{k+1} + \dots + \alpha_n\tau^{n-k-1}y^n)| \leq$

$$\leq \tau^k \cdot \tau \max\left(|\alpha_{k+1}y^{k+1}|, \dots, |\alpha_n y^n|\right)$$

i dla $\tau \leq \frac{1}{2}\frac{|w(z_0)|}{\max(|\alpha_{k+1}y^{k+1}|, \dots, |\alpha_n y^n|)+1}$

$$\leq \tau^k \frac{1}{2}|w(z_0)|$$

więc dla dost. małych τ, ale > 0

$$|w(z_0+\tau y)| \leq |w(z_0)|\left(1 - \tau^k + \tfrac{1}{2}\tau^k\right) = |w(z_0)|\left(1 - \tfrac{1}{2}\tau^k\right) < |w(z_0)|$$

↯.

Z zasadniczego tw. algebry i tw. o tym, że $w(z_0)=0 \Rightarrow (z-z_0) \mid w(z)$ mamy

Wniosek: Dowolny wielomian dodatniego stopnia można przedstawić w postaci

$a(z-z_0)(z-z_1)\ldots(z-z_{n-1})$, gdzie $a, z_0, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.
$n = \deg w$

Dowód: indukcyjny.

$\deg w = 1 \Rightarrow w(z) = az+b = a(z+\frac{b}{a})$.

$\deg w > 1$. w ma pierwiastek $z_0 \in \mathbb{C}$, więc istnieje v takie, że $w = (z-z_0)v$. $\boxed{B}$

$\deg w = \deg[(z-z_0)\cdot v] = 1 + \deg v \Rightarrow \deg v = \deg w - 1$

i z zał. indukcyjnego $v(z) = a(z-z_1)\ldots(z-z_{n-1})$

$$w(z) = (z-z_0)\cdot a(z-z_1)\cdot\ldots\cdot(z-z_{n-1}) \quad \square.$$

Twierdzenie: Niech wielomian $w(z)$ ma współczynniki rzeczywiste. Wówczas jeżeli z_0 jest pierwiastkiem w, to $\overline{z_0}$ również.

Dowód: Niech $w(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, $\forall_i\, a_i \in \mathbb{R}$.

$$w(\overline{z_0}) = a_n \overline{z_0}^n + a_{n-1}\overline{z_0}^{n-1} + \ldots + a_1 \overline{z_0} + a_0 =$$

$$= \overline{a_n}\,\overline{z_0}^n + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z_0}^{n-1} + \ldots + \overline{a_1}\,\overline{z_0} + \overline{a_0} =$$

bo $a_i \in \mathbb{R}$, więc $\overline{a_i} = a_i$

$$= \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0} = \overline{w(z_0)} = \overline{0} = 0$$

$\square$.

z własności sprzężenia zesp.

Uwaga

$(z-z_0)(z-\overline{z_0})$ ma współczynniki rzeczywiste.

Dowód:

$$(z-z_0)(z-\overline{z_0}) = z^2 - (z_0+\overline{z_0})z + z_0\overline{z_0} =$$
$$= z^2 - \underbrace{2\,\mathrm{Re}\,z_0}_{\in\mathbb{R}}\cdot z + \underbrace{|z_0|^2}_{\in\mathbb{R}}.$$

Wniosek:

Dowolny wielomian o współczynnikach rzeczywistych można przedstawić jako iloczyn stałej oraz czynników postaci $(x-x_0)$ $x_0\in\mathbb{R}$

oraz (x^2-px+q) $p,q\in\mathbb{R}$

gdzie wielomian x^2-px+q ma 2 (sprzężone) pierwiastki zespolone ($\Delta = p^2-4q<0$).

$$W(x) = a\,(x-x_0)^{\alpha_0}(x-x_1)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(x-x_k)^{\alpha_k}\cdot(x^2-p_1x+q_1)^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot$$
$$\cdot(x^2-p_lx+q_l)^{\beta_l}$$

Twierdzenie

Dowolną funkcję wymierną $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (P, Q nie mają wspólnych pierwiastków)

można przedstawić jako skończoną sumę wielomianu i ułamków prostych, tj funkcji wymiernych postaci

$$\frac{A}{(x-x_0)^k},\ k\in\mathbb{N} \quad \text{oraz} \quad \frac{Bx+C}{(x^2-px+q)^l},\ l\in\mathbb{N},\ p^2-4q<0.$$

Dowód (konstrukcja).

Krok 1. Jeżeli $\deg P \geq \deg Q$, to dzielimy P przez Q z resztą R

$$P(x)=\tilde{P}(x)Q(x)+R(x), \quad \deg R<\deg Q$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\tilde{P}(x)+\frac{R(x)}{Q(x)} \qquad \text{wielomian} + \text{f. wymierna}.$$

możemy zatem zakładać, że $\deg P<\deg Q$.

Krok 2 Przedstawiamy $Q(x)$ jako iloczyn czynników postaci $(x-x_i)^{k_i}$ oraz $(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}$

$$Q(x)=(x-x_0)^{k_0}(x-x_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-x_m)^{k_m}(x^2+p_0x+q_0)^{l_0}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_nx+q_n)^{l_n}$$

$$=(x-x_0)^{k_0}\tilde{Q}(x)$$

zauważmy, że jeżeli $x_0\neq x_i$ dla $i=1,\ldots,m$, to

$$(x-x_0)^{k_0}\perp\tilde{Q}(x) \qquad \text{(dlaczego?)}$$

Możemy zatem ~~zapisać~~ znaleźć wielomiany F i G takie, że

$$(x-x_0)^{k_0}F(x)+\tilde{Q}(x)G(x)=1$$

skąd

$$\frac{P(x)}{(x-x_0)^{k_0}\tilde{Q}(x)}=\frac{\left[(x-x_0)^{k_0}F(x)+\tilde{Q}(x)G(x)\right]P(x)}{(x-x_0)^{k_0}\tilde{Q}(x)}=$$

$=\frac{F(x)P(x)}{\tilde{Q}(x)}+\frac{G(x)P(x)}{(x-x_0)^{k_0}}$. Jeżeli któryś z ułamków ma stopień licznika większy niż mianownika, dzielimy z resztą. W analogiczny sposób z mianownika $Q(x)$ możemy „oderwać" czynnik $(x^2-p_0x+q_0)^{l_0}$, i tak do skutku.

Krok 3

Mamy $\frac{P(x)}{Q(x)}$ przedstawione jako suma wielomianu oraz funkcji wym. postaci $\frac{F(x)}{(x-x_0)^k}$, $\deg F<k$ oraz $\frac{G(x)}{(x^2+px+q)^l}$, $\deg G<2l$.

Podzielmy $F(x)$ z resztą przez $(x-x_0)^{\deg F}$. Otrzymamy $F(x)=\tilde{F}(x)\cdot(x-x_0)^{\deg F}+R(x)$; $\deg R<\deg F$. Oczywiście $\tilde{F}(x)=\text{const}=A$,

$$\frac{F(x)}{(x-x_0)^k}=\frac{A}{(x-x_0)^{k-\deg F}}+\frac{R(x)}{(x-x_0)^k}$$

Obniżyliśmy stopień licznika ($\deg R<\deg F$), iterujemy aż $R(x)=\text{const}$

Podobnie postępujemy z $\frac{G(x)}{(x^2-px+q)^l}$.

Jeżeli $\deg G = 1$ lub 0, to koniec ($G(x) = Ax+B$).

Jeżeli $\deg G \geq 2$, to dzielimy G z resztą przez $(x^2-px+q)^{\lfloor \frac{\deg G}{2} \rfloor}$. Otrzymujemy

$$G(x) = \tilde{G}(x)(x^2-px+q)^{\lfloor \frac{\deg G}{2} \rfloor} + S(x), \quad \deg S < \left\lfloor \frac{\deg G}{2} \right\rfloor \cdot 2 \leq \deg G.$$

$\tilde{G}(x)$ jest stopnia 0 lub 1, w zal. od parzystości $\deg G$,

$$\frac{G(x)}{(x^2-px+q)^l} = \frac{\overbrace{\tilde{G}(x)}^{=\tilde{A}x+\tilde{B}}}{(x^2-px+q)^{l-\lfloor \frac{\deg G}{2} \rfloor}} + \frac{S(x)}{(x^2-px+q)^l}$$

$S(x)$ ma mniejszy stopień niż G.

iterując dostajemy tezę.

Twierdzenie": Umiemy scałkować zarówno "wielomiany, jak i ułamki proste.

„Dowód":

- wielomiany – jasne
- $\frac{1}{(x-x_0)^n}$:

$$\int \frac{1}{(x-x_0)^n}\,dx \overset{\substack{dt=dx\\ t=x-x_0}}{=} \int \frac{1}{t^n}\,dt = \begin{cases} \frac{t^{1-n}}{1-n} + C & n \neq 1 \\ \ln|t| + C & n = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{(x-x_0)^{1-n}}{1-n} + C & n \neq 1 \\ \ln|x-x_0| + C & n = 1 \end{cases}$$

• $\dfrac{Ax+B}{x^2-px+q}$:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2-px+q}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x-p}{x^2-px+q}\,dx + \int \frac{\overbrace{B+A\cdot\frac{p}{2}}^{\tilde{B}}}{x^2-px+q}\,dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{dt}{t} + \int \frac{\tilde{B}}{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + q-\frac{p^2}{4}}\,dx = \frac{A}{2}\ln|t| +$$

$t = x^2-px+q$

$dt = (2x-p)\,dx$

$q-\frac{p^2}{4} = \frac{4q-p^2}{4} > 0$, bo $p^2-4q<0$.

$$+\frac{\tilde{B}}{q-\frac{p^2}{4}} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-p/2}{\sqrt{q-p^2/4}}\right)^2+1} = \frac{A}{2}\ln|x^2-px+q| +$$

moduł niepotrzebny (dlaczego?)

$$+\frac{\tilde{B}}{q-\frac{p^2}{4}} \int \frac{\sqrt{q-p^2/4}\,ds}{s^2+1} = \frac{A}{2}\ln|x^2-px+q| +$$

$s = \frac{x}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} - \frac{p/2}{\sqrt{q-p^2/4}}$

$ds = \frac{dx}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}$

$$+\frac{\tilde{B}}{\sqrt{q-p^2/4}}\,\mathrm{arctg}\, s + C =$$

$$= \frac{A}{2}\ln|x^2-px+q| + \frac{\tilde{B}}{\sqrt{q-p^2/4}}\,\mathrm{arctg}\frac{x-p/2}{\sqrt{q-p^2/4}} + C$$

Pozostaje nam ostatni typ ułamków prostych:

$$\frac{Ax+B}{(x^2-px+q)^n} \quad \text{dla } n>1.$$

Początek jest taki sam, jak dla $n=1$:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2-px+q)^n}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x-p}{(x^2-px+q)^n}\,dx + \tilde{B}\int \frac{dx}{(x^2-px+q)^n} =$$

$\tilde{B} = B + A\cdot p/2$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{ds}{s^n} + \tilde{B}\int \frac{dx}{(x^2-px+q)^n}$$

$s = x^2-px+q$
$ds = (2x-p)\,dx$

Pierwsza całka, jak już wiemy, równa jest $\frac{s^{1-n}}{1-n} + C$

$= \frac{(x^2-px+q)^{1-n}}{1-n} + C$. Zajmijmy się drugą:

$$\int \frac{dx}{(x^2-px+q)^n} = \int \frac{dx}{\left[(x-p/2)^2+q-\frac{p^2}{4}\right]^n} = \frac{1}{(q-p^2/4)^n}\int \frac{dx}{\left[\left(\frac{x-p/2}{\sqrt{q-p^2/4}}\right)^2+1\right]^n}$$

$$= \frac{1}{(q-p^2/4)^{n-1/2}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$$

$t = \frac{x-p/2}{\sqrt{q-p^2/4}}$

$dt = \frac{dx}{\sqrt{q-p^2/4}}$

I cała trudność leży w tym, by umieć obliczyć tę ostatnią całkę.

$$\boxed{\int \frac{dt}{(t^2+1)^n}}$$

Oznaczmy wartość (oczywiście z dokł. do stałej) tej całki przez I_n. Mamy

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+1)^n} = \int \frac{\overset{=1}{(t)'} \cdot dt}{(t^2+1)^n} \overset{\text{przez części}}{=} \frac{t}{(t^2+1)^n} -$$

$$- \int t \cdot \left(\frac{1}{(t^2+1)^n}\right)' dt = \frac{t}{(t^2+1)^n} - \int t \cdot (-n) \frac{2t}{(t^2+1)^{n+1}}\, dt$$

$$= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n \int \frac{t^2\, dt}{(t^2+1)^{n+1}} = \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n \int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^{n+1}}\, dt -$$

$$- 2n \int \frac{dt}{(t^2+1)^{n+1}} = \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n I_n - 2n I_{n+1}$$

Dostajemy stąd wzór rekurencyjny:

$$2n I_{n+1} = \frac{t}{(t^2+1)^n} + (2n-1) I_n \Rightarrow I_{n+1} = \frac{t}{2n(t^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n$$

Wiemy też, że $I_1 = \operatorname{arctg} t + C$, skąd

$$I_2 = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C$$

$$I_3 = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{4} I_2 = \ldots \qquad \text{itd.}$$