Dowód: (*) nad nierównością oznacza, że dla f ściśle wypukłej nierówność jest ostra

$\Rightarrow$

Ustalmy $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$. Wykażemy, że $f'(x_1) \overset{(*)}{\leq} f'(x_2)$.

Ustalmy y_1, y_2 tak, by $x_1 < y_1 < y_2 < x_2$.

Dla $x < y_1$ mamy $I_f(x, x_1) \overset{(*)}{\leq} I_f(y_1, x_1)$, więc

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} I_f(x, x_1) \leq I_f(y_1, x_1)$$

Analogicznie, dla $x > y_2$ $I_f(x, x_2) \overset{(*)}{\geq} I_f(y_2, x_2)$,

więc $f'(x_2) = \lim_{x \to x_2} I_f(x, x_2) \geq I_f(y_2, x_2)$

Mamy jednak

$$I_f(y_1, x_1) \overset{(*)}{\leq} I_f(y_2, x_1) = I_f(x_1, y_2) \overset{(*)}{\leq} I_f(x_2, y_2) = I_f(y_2, x_2),$$

stąd

$$f'(x_1) \leq I_f(y_1, x_1) \overset{(*)}{\leq} I_f(y_2, x_2) \leq f'(x_2).$$

Gdy f jest ściśle wypukła, dostajemy zatem $f'(x_1) < f'(x_2)$.

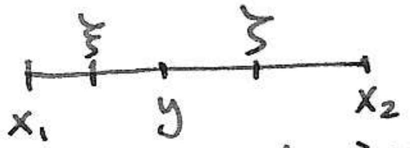
$\Leftarrow$

Załóżmy, że f' jest niemalejąca (odp. rosnąca).

Ustalmy $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$, $\alpha \in (0,1)$, $y = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$

Wówczas $I_f(x_1, y) = \dfrac{f(x_1) - f(y)}{x_1 - y} = f'(\xi)$ (z tw. Lagrange'a)

i podobnie $I_f(x_2, y) = f'(\zeta)$ gdzie $\xi \in (x_1, y)$, $\zeta \in (y, x_2)$



Stąd, z monotoniczności f',

$$I_f(x_1, y) = f'(\xi) \overset{(*)}{\le} f'(\zeta) = I_f(x_2, y),$$

a więc iloraz różnicowy jest niemalejący (odp. rosnący), co na mocy lematu oznacza, że f jest wypukła (odp. ściśle wypukła). □

<u>Wniosek</u>: Łącząc powyższe twierdzenie z twierdzeniami o związku pochodnej z monotonicznością dostajemy

<u>Twierdzenie</u> Niech f będzie dwukrotnie różniczkowalna na (a,b). Funkcja f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy $f'' \geq 0$ na (a,b).

$$f'' = (f')'$$ pochodna pochodnej

f jest ściśle wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy

- $f'' \geq 0$ na (a,b)

oraz

- $\forall_{\substack{x,y \in (a,b) \\ x<y}} \ \exists_{z \in [x,y]} \ f''(z) > 0.$

Pochodna a warunek Lipszyca

Twierdzenie: Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ będzie ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b). Wówczas f spełnia na $[a,b]$ warunek Lipszyca ze stałą L wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sup_{x\in(a,b)}|f'(x)|\leq L.$$

Uwaga: W szczególności na to, by f spełniała na $[a,b]$ warunek Lipszyca z jakąkolwiek stałą potrzeba i wystarcza, by $\sup\limits_{x\in(a,b)}|f'(x)|<\infty$.

Dowód jest, w jedną stronę, natychmiastowym wnioskiem z tw. Lagrange'a, a w drugą jest trywialny:

$\Leftarrow$ (wiemy, że $\sup\limits_{x\in(a,b)}|f'(x)|\leq L$, musimy wykazać lipszycowskość f)

$$\forall_{x,y\in[a,b]}\quad \frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(\xi) \text{ dla pewnego } \xi \text{ między } x \text{ a } y.$$

(tw. Lagrange'a). Zatem

$$\forall_{x,y\in[a,b]}\quad |f(x)-f(y)|=|x-y|\,|f'(\xi)|\leq|x-y|\sup_{t\in(a,b)}|f'(t)|\leq|x-y|\cdot L$$

$\Rightarrow$ (f spełnia w.L. ze stałą L, chcemy wykazać, że $|f'|\leq L$ na (a,b))

$$\forall_{x\in(a,b)}\quad f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}, \text{ ~~więc~~ ale } \forall_{x,y}\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|\leq L,$$

$$\text{więc } |f'(x)|\underset{\text{ciągłość modułu}}{=}\lim_{y\to x}\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|\leq L, \text{ skąd } \sup_{x\in(a,b)}|f'(x)|\leq L.$$

Reguła de l'Hôpitala

Guillaume François Antoine de l'Hôpital (także - l'Hospital), markiz Sainte-Mesme, hrabia Entremont, pan na Oucques, La Chaise, Le Bréau i innych włościach (1661-1704) pochodził ze znaczącej rodziny arystokratycznej (trochę ponad sto lat wcześniej Michel de l'Hospital dzierżył urząd Kanclerza Francji); jego ojciec był generałem armii królewskiej i zaufanym (pierwszym giermkiem) księcia Gastona Orleańskiego. Guillaume de l'Hôpital również zaczął od kariery wojskowej - doszedł do rangi kapitana kawalerii - ale, ponoć ze względu na krótkowzroczność, porzucił wojsko dla matematyki, która pasjonowała go od młodości. W 1691 poznał w Paryżu Jana Bernoulliego, który przybywszy do Francji, na prośbę de l'Hôpitala, dał cykl wykładów o najnowszym podówczas osiągnięciu matematycznym - - analizie wielkości nieskończenie małych Leibniza. Niektóre z rezultatów Bernoulliego de l'Hôpital opublikował, wprawdzie nie jako własne, ale bez zgody autora. Nieco później de l'Hôpital zaczął płacić Bernoulliemu za wyłączność (i domniemane prawo publikacji) wyników tego ostatniego; Bernoulli wyjawił szczegóły tej umowy dopiero po śmierci de l'Hôpitala. W 1696 de l'Hôpital opublikował pierwszy podręcznik analizy matematycznej, „Analizę nieskończenie małych", w którym zawarł m.in. znane dziś pod jego nazwiskiem twierdzenie, bez wątpienia pochodzące od Bernoulliego. Nie mniej jednak był to dobry matematyk, jego podręcznik był używany przez niemal 100 lat.

Jan Bernoulli (1667 - 1748) - szwajcarski matematyk z rodziny, która dała nauce wielu uczonych, w tym przede wszystkim Jakuba - starszego brata i Daniela - syna Jana, ale i wielu innych w kolejnych pokoleniach. Matematyki uczył się początkowo od starszego brata, później w Paryżu związał się z de l'Hôpitalem. Zajmował się analizą i geometrią, równaniami różniczkowymi. W 1695 został profesorem w Groningen; po śmierci brata (Jakuba) objął po nim katedrę matematyki w Bazylei. Jest autorem wielu problemów (i rozwiązań) z zakresu rachunku wariacyjnego, m.in. zagadnienia brachistochrony. Trzech jego synów - Daniel, Mikołaj i Jan - zostało znanymi matematykami.

<u>Twierdzenie</u> (reguła de l'Hôpitala).
Załóżmy, że funkcje f i g są różniczkowalne na (a, b), przy czym $\forall_{x\in(a,b)}\ g(x) \neq 0,\ g'(x) \neq 0$.
Załóżmy dalej, że istnieje granica $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = G$ (skończona lub nieskończona), oraz że spełniony jest jeden z dwóch warunków:

a) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = 0$
$\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$

b) $\lim\limits_{x\to a^+} |g(x)| = +\infty$

Wówczas istnieje granica $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ i jest ona równa G.

<u>Uwagi do sformułowania</u>: (1) Przedział (a, b) nie musi być przedziałem skończonym - dopuszczamy $a = -\infty$ i/lub $b = +\infty$.

② sformułowaliśmy (i dowiedliśmy) twierdzenie dla granic prawostronnych, jest ono jednak prawdziwe również, ~~dla~~ gdy wszystkie $\lim\limits_{x\to a^+}$ zamienimy na $\lim\limits_{x\to b^-}$; a także, gdy ustalimy $c\in(a,b)$ i w sformułowaniu zamienimy $\lim\limits_{x\to a^+}$ na $\lim\limits_{x\to c}$ (granica obustronna).

Modyfikacje dowodu są oczywiste i nie powinny sprawić Państwu żadnej trudności.

Na początek przedstawimy dowód w szczególnej sytuacji: gdy przedział (a,b) jest skończony, ~~oraz~~ gdy zachodzi warunek a), tj $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$.

~~Ewentualnie zmniejszając nieco b możemy zapewnić sobie to, że f i g będą ciągłe na (a, b];~~

~~a~~ Jeżeli ~~dodatkowo~~ ustalimy $f(a)=g(a)=0$, ciągłe na $[a,x]$ (i oczywiście różniczkowalne na (a,x)), Z tw. Cauchy'ego o wart. średniej $\underline{\text{dla } x > a^+, \text{dost. bliskich } a}$ mamy, że $\exists_{\xi\in(a,x)}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Jeżeli teraz dążymy z x do a^+, to oczywiście $\xi\to a^+$, gdyż $a<\xi<x$, zatem prawa strona dąży do G, a lewa – do $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$.

Dowód w ogólnej sytuacji jest, niestety, trudniejszy
i nie bez powodu przypomina nieco dowód lematu Stolza.

• zauważmy, że skoro $g'(x) \neq 0$ na (a,b), to g jest różnowartościowa na (a,b) & (bo gdyby istniały $y, z \in (a,b)$ tż $g(y)=g(z)$, to między y a z znalazłoby się γ tż. $g'(\gamma)=0$ – tw. Rolle'a).
Jako ciągła i różnowartościowa jest ściśle monotoniczna; możemy bez straty ogólności założyć, że jest rosnąca (w p.p. zamiast badać iloraz $\frac{f}{g}$ możemy zająć się $\frac{-f}{-g}$). Mamy zatem $g'>0$ na (a,b).

Wybierzmy takie ~~m~~ m, $\tilde{m}$, M, $\tilde{M}$, że
$m < \tilde{m} < G < \tilde{M} < M$. (gdy $G = +\infty$, to oczywiście nie ~~ro~~ rozpatrujemy $M, \tilde{M}$, gdy $G = -\infty$ - $\tilde{m}$ i m).

$$\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = G \Rightarrow \exists_{c \in (a,b)} \forall_{x \in (a,c)} \tilde{m} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \tilde{M},$$

zatem
$$\left.\begin{array}{l} f'(x) - \tilde{m} g'(x) > 0 \\ \tilde{M} g'(x) - f'(x) > 0 \end{array}\right| \Rightarrow$$
funkcje $f - \tilde{m} g$ oraz $\tilde{M} g - f$ są rosnące na (a, c).

Jeżeli zachodzi warunek a),
to
- $\lim_{x \to a^+} g(x) = 0$, g rosnąca na $(a,c) \Rightarrow$
 $g > 0$ na (a,c)
- analogicznie $\lim_{x \to a^+} f - \tilde{m} g = \lim_{x \to a^+} \tilde{M} g - f = 0$

$\Rightarrow f - \tilde{m} g$ i $\tilde{M} g - f$ są dodatnie na (a,c).

$$\Rightarrow \forall_{x \in (a,c)} \tilde{m} < \frac{f(x)}{g(x)} < \tilde{M};$$

skoro $\tilde{m}$ i $\tilde{M}$ były dowolne takie, że $\tilde{m} < G < \tilde{M}$, to $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = G$.

Jeżeli b): $\lim_{x \to a^+} |g(x)| = +\infty$. Skoro g rosnąca na (a,b), to $\lim_{x \to a^+} g(x) = -\infty$.

- $f - \tilde{m} g$ i $\tilde{M} g - f$ rosnące na (a,c), zatem dla $x \in (a,c)$

$$f(x) - \tilde{m}\, g(x) < f(c) - \tilde{m}\, g(c)$$
$$\tilde{M} g(x) - f(x) < \tilde{M} g(c) - f(c) . \quad (*)$$

Ew. zmniejszając c możemy zapewnić sobie, że $g(x) < 0$ na (a,c) (bo $\lim_{x \to a^+} g(x) = -\infty$).

Mamy zatem, przekształcając

$$\tilde{M} g(x) - \tilde{M} g(c) + f(c) < f(x) < \tilde{m}\, g(x) + f(c) - \tilde{m}\, g(c)$$

$:$ dzieląc przez $g(x)$ (<0)

$$\underbrace{\tilde{m} + \underbrace{\frac{f(c) - \tilde{m}\, g(c)}{g(x)}}_{\downarrow x \to a^+ \; 0}}_{\to \tilde{m}} < \frac{f(x)}{g(x)} < \underbrace{\tilde{M} + \underbrace{\frac{\tilde{M} g(c) - f(c)}{g(x)}}_{\downarrow x \to a^+ \; 0}}_{\to \tilde{M}} ,$$

więc $\exists d \in (a,c)$ tż.

$$m < \frac{f(x)}{g(x)} < M \qquad \left(\text{bo } m < \tilde{m},\ M > \tilde{M}\right)$$

i z dowolności m, M mamy

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = G .$$

dowód ten, zapożyczony przeze mnie od p. Krycha, jest autorstwa A. Birkholca

Przypomnienie: Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, to styczną do wykresu funkcji w punkcie x_0 nazywamy prostą $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$.

Najpierw podam twierdzenie uzasadniające intuicję, jaka narzuca się przy próbie zdefiniowania, czym jest styczna – a więc, że jest to prosta najlepiej, w jakimś sensie, przybliżająca wykres funkcji w pobliżu x_0 (spośród wszystkich innych prostych).

Twierdzenie Załóżmy, że f jest ciągła w punkcie x_0. Wówczas równość

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (a(x-x_0)+b)}{x-x_0} = 0 \qquad (*)$$

$$\left(\overset{\parallel}{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - (ah+b)}{h}} \right)$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy f jest różniczkowalna w x_0, $a = f'(x_0)$, $b = f(x_0)$.

$(*)$ należy czytać tak: błąd, jaki popełniamy przybliżając, dla x bliskich x_0, funkcję f funkcją liniową, której wykresem jest styczna ($y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$), maleje przy x dążącym do x_0 do zera szybciej, niż odległość x od x_0 (na tyle szybko, że $\frac{\text{błąd}}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$). I jest to jedyna funkcja liniowa o tej własności.

Dowód: Najpierw wykażemy, że jeżeli f jest różniczkowalna w x_0, to oczywiście funkcja $a(x-x_0)+b$ dla $a=f'(x_0)$, $b=f(x_0)$ ma własność (*).

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-(a(x-x_0)+b)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right]=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)=f'(x_0)-f'(x_0)=0,$$

Załóżmy teraz, że dla pewnych a, b mamy

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-(a(x-x_0)+b)}{x-x_0}=0 \qquad (\text{i } f \text{ jest ciągła w } x_0).$$

Wówczas oczywiście

$$0=0\cdot 0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\cdot\frac{f(x)-(a(x-x_0)+b)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-b-a(x-x_0)\right)=\lim_{x\to x_0}f(x)-b=$$

$$\underset{\substack{\text{ciągłość}\\ f \text{ w } x_0.}}{=} f(x_0)-b, \text{ skąd } b=f(x_0)$$

$$\text{Dalej}\quad 0=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-(a(x-x_0)+\overset{=f(x_0)}{b})}{x-x_0}=$$

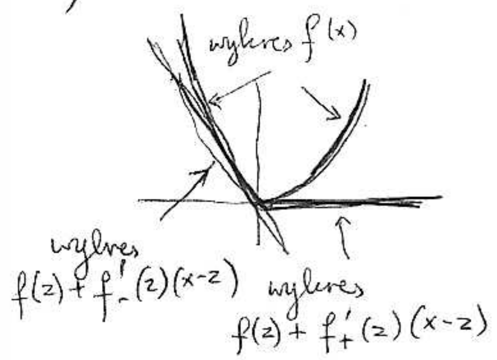
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-a, \text{ skąd } \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

istnieje i jest równa a, więc $a=f'(x_0)$.

Wróćmy jeszcze na chwilę do funkcji wypukłych. Z samej ich definicji wywnioskowaliśmy, że, dla dowolnych x_1, x_2 należących do dziedziny funkcji wypukłej f, sieczna wykresu poprowadzona przez punkty $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ leży nad lub na wykresie f pomiędzy x_1 a x_2. Udowodnimy teraz, że jeżeli dodatkowo f jest różniczkowalna w jakimś x_0 należącym do dziedziny f, to styczna do f w x_0 leży w całości pod lub na wykresie f. Oczywiście gdy f jest wklęsła, to styczna do niej w dowolnym punkcie różniczkowalności leży nad lub na wykresie f. Przy okazji wykażemy, że funkcje wypukłe są „prawie" różniczkowalne w każdym punkcie – – mianowicie w każdym punkcie wewnętrznym dziedziny mają pochodne lewo- i prawostronne

Twierdzenie: Niech $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie na (a,b) wypukła ($a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). Wówczas
a) w każdym punkcie $z \in (a,b)$ istnieją pochodne jednostronne $f'_-(z)$, $f'_+(z)$, przy czym $f'_-(z) \le f'_+(z)$
b) jeżeli $x, y \in (a,b)$, $x < y$, to $f'_+(x) \overset{(*)}{\le} f'_-(y)$;
(*): nierówność ta jest ostra, gdy f jest ściśle wypukła

c). Niech $z \in (a,b)$. Dla każdego $x > z$ $x \in (a,b)$



$$f(x) \overset{(*)}{\geqslant} f(z) + f'_+(z)(x-z),$$

dla każdego $y < z$ $y \in (a,b)$

$$f(y) \overset{(*)}{\geqslant} f(z) + f'_-(z)(x-z).$$

W szczególności, gdy f jest różniczkowalna w z (a więc $f'_-(z) = f'_+(z) = f'(z)$) mamy

$$\forall_{\substack{x \neq z \\ x \in (a,b)}} \quad f(x) \overset{(*)}{\geqslant} f(z) + f'(z)(x-z).$$

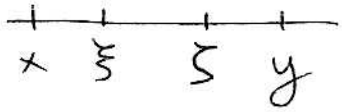
d) f ma co najwyżej przeliczalnie wiele punktów, w których jest nieróżniczkowalna.

<u>Dowód</u>: Wykazaliśmy, że iloraz różnicowy $I(x,z)$ jest niemalejącą funkcją zmiennej x dla dowolnego, ustalonego $z \in (a,b)$. Funkcją określoną na $(a,b) \setminus \{z\}$. W poprzednim semestrze wykazaliśmy natomiast, że funkcja niemalejąca ma w każdym punkcie swojej dziedziny, w którym tylko ma to sens, granice jednostronne — w szczególności istnieją

(str. 131, 132)

$$\lim_{x \to z^-} I(x,z) = f'_-(z) \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \to z^+} I(x,z) = f'_+(z).$$

Oczywiście $\forall_{\substack{x_1, x_2 \\ x_1 < z < x_2}} \quad I(x_1,z) \overset{(*)}{\leq} I(x_2,z)$, więc przechodząc w nierówności z x_1 i x_2 do z, odpowiednio z lewej i z prawej strony, otrzymujemy nierówność $f'_-(z) \leq f'_+(z)$, — i wykazaliśmy a) b). Ustalmy $x < \xi < \zeta < y$. Jeżeli $t \in (x, \xi)$, zaś $s \in (\zeta, y)$, to

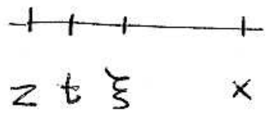


$$I(t,x) \overset{(*)}{\le} I(\xi,x) \overset{(*)}{\le} I(\zeta,y) \overset{(*)}{\le} I(s,y)$$

$$I(t,x) \xrightarrow{t \to x^+} f'_+(x), \qquad I(s,y) \xrightarrow{s \to y^-} f'_-(y)$$

i dostajemy $f'_+(x) \le I(\xi,x) \overset{(*)}{\le} I(\zeta,y) \le f'_-(y)$.

c). Jeżeli $x > z$, to $I(x,z) \overset{(*)}{\geq} I(\xi,z) \overset{(*)}{\geq} I(t,z) \xrightarrow[t \to z^+]{} f'_+(z)$



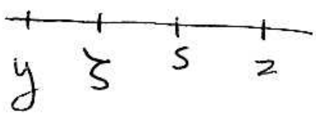
skąd $I(x,z) \overset{(*)}{\geq} f'_+(z)$

$$\frac{f(x) - f(z)}{x - z} \overset{(*)}{\geq} f'_+(z)$$

$$f(x) \overset{(*)}{\geq} f(z) + (x-z) f'_+(z)$$

Analogicznie dla $y < z$

$$I(y,z) \overset{(*)}{\le} I(\zeta,z) \overset{(*)}{\le} I(s,z) \xrightarrow{s \to z^-} f'_-(z)$$



skąd $I(y,z) \overset{(*)}{\le} f'_-(z)$

$$\frac{f(y) - f(z)}{y - z} \overset{(*)}{\le} f'_-(z)$$

czyli $f(y) \overset{(*)}{\le} f'_-(z)(y-z) + f(z)$.

d). Jeżeli f jest w x_0 nieróżniczkowalna, to z a) $f'_-(x_0) < f'_+(x_0)$. Dla dowolnego $x > x_0$ $f'_-(x_0) < f'_+(x_0) \le f'_-(x)$, więc f'_- jest funkcją niemalejącą i w x_0 ma skok ($f'_-(x_0) < \lim\limits_{x \to x_0^+} f'_-(x_0)$), równy co najmniej $f'_+(x_0) - f'_-(x_0)$.

Wszystkie wartości f'_- brak zatem przedziału otwartego $(f'_-(x_0), f'_+(x_0))$; przedział ten zawiera liczbę wymierną $q(x_0)$. Oczywiście jeżeli teraz $x_1 > x_0$ jest punktem nieróżniczkowalności f, to „dziura" $(f'_-(x_1), f'_+(x_1))$ jest rozłączna z $(f'_-(x_0), f'_+(x_0))$, bo $f'_+(x_0) \overset{(*)}{\leq} f'_-(x_1)$.

z b)

Możemy więc każdemu punktowi nieróżniczkowalności przypisać inną liczbę wymierną $\Rightarrow$ jest ich co najwyżej przeliczalnie wiele.

<u>Zadanie</u>: Skonstruuj funkcję ściśle wypukłą na $(0,1)$, która ma ∞-wiele punktów nieróżniczkowalności.

Wzór Taylora

Wykazaliśmy na poprzednim wykładzie, że funkcją liniową najlepiej przybliżającą funkcję f w otoczeniu punktu x_0, w którym f jest różniczkowalna, jest funkcja $x \longmapsto f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$, której wykresem jest prosta styczna do wykresu f w $(x_0, f(x_0))$.
Błąd oszacowania $r_{x_0}(h)$ miał tę własność, że $\frac{r(h)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

$\left(r_{x_0}(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - h f'(x_0) \right)$.

A gdybyśmy chcieli przybliżać f funkcją nie liniową, ale np. kwadratową $x \longmapsto \underbrace{a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c}_{g(x)}$?

Oczekiwalibyśmy, by:

$$(*) \; \frac{f(x) - g(x)}{(x - x_0)^2} \xrightarrow{x \to x_0} 0$$

Okazuje się, że jeżeli f jest w x_0 2-krotnie różniczkowalna, to istnieje tylko jedna funkcja kwadratowa mająca powyższą własność:

$$(\cdot)\quad \frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^2} \xrightarrow{x\to x_0} 0 \Rightarrow \quad ① \; f(x)-g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

$$② \; \frac{f(x)-g(x)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

$$③ \; \frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^2} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

$$① \Rightarrow f(x_0) = g(x_0) = c$$

②

$$\frac{f(x)-a(x-x_0)^2-b(x-x_0)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

$$\parallel \qquad\qquad \parallel$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a(x-x_0) - b \xrightarrow[x\to x_0]{} f'(x_0) - b \quad \Bigg| \Rightarrow b = f'(x_0)$$

③

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-a(x-x_0)^2-f'(x_0)(x-x_0)-f(x_0)}{(x-x_0)^2} = 0$$

$$\frac{0}{0} \parallel H$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-2a(x-x_0)-f'(x_0)}{2(x-x_0)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}\cdot\frac{1}{2} - a\right] = \frac{1}{2}f''(x_0) - a$$

$$\Downarrow$$

$$a = \frac{1}{2}f''(x_0).$$

czyli funkcją kwadratową najlepiej przybliżającą f wokół x_0 jest $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$

oraz ~~f(x) ∠ f' f(x)~~ $r_{x_0}(x-x_0) = f(x) - g(x)$ ma tę własność, że $\frac{r_{x_0}(x-x_0)}{(x-x_0)^2} \xrightarrow{x\to x_0} 0$.

Lemat:

Niech $r(x)$ będzie n-krotnie różniczkowalna w x_0. Wówczas

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r(x)}{(x-x_0)^n}=0 \iff r(x_0)=r'(x_0)=\ldots=r^{(n)}(x_0)=0$$

Dowód: Zauważmy najpierw, że pisząc „$r(x)$ n-krotnie różn. w x_0" implicite zakładamy, że:

f' istnieje w pewnym otoczeniu x_0 (żebyśmy mieli co różniczkować po raz drugi

f'' ——"—— trzeci

$\vdots$

$f^{(n-1)}$ ——"—— $(n-1)$-szy

$\Rightarrow f, f', \ldots, f^{(n-2)}$ są ciągłe w pewnym otoczeniu x_0 (bo różniczkowalne).

teraz właściwy dowód

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\frac{r(x)}{(x-x_0)^n}=0 \Rightarrow \underbrace{(x-x_0)^n}_{\xrightarrow{x\to x_0}\,0}\cdot\underbrace{\frac{r(x)}{(x-x_0)^n}}_{\xrightarrow{x\to x_0}\,0}=r(x)\xrightarrow{\text{bo } r \text{ ciągła w } x_0} r(x_0)$$

$$\Rightarrow r(x_0)=0.$$

Analogicznie

$$0 \leftarrow (x-x_0)^{n-1}\cdot\frac{r(x)-0}{(x-x_0)^n}\longrightarrow 0$$

$$\parallel$$

$$\frac{r(x)-r(x_0)}{x-x_0}\longrightarrow r'(x_0) \qquad \Rightarrow r'(x_0)=0$$

dalej zauważmy, że

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r(x)}{(x-x_0)^2}\overset{H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to x_0}\frac{r'(x)}{2(x-x_0)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to x_0}\frac{r'(x)-r'(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{2}r''(x_0)$$

ale $\displaystyle \frac{r(x)}{(x-x_0)^2} = \underbrace{\frac{r(x)}{(x-x_0)^n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{(x-x_0)^{n-2}}_{\to 0} \Rightarrow r''(x_0)=0$

itd, jeżeli wiemy, że $r(x_0) = r'(x_0) = \ldots = r^{(k)}(x_0) = 0$ dla $k < n$, to

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^{k+1}} \overset{k \times H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to x_0} \frac{r^{(k)}(x)}{(k+1)\cdot k \cdot \ldots \cdot 2 \cdot (x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{r^{(k)}(x) - r^{(k)}(x_0)}{(k+1)!\,(x-x_0)}$$

$$= \frac{r^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{r(x)}{(x-x_0)^n}}_{\downarrow x\to x_0 \atop 0} \cdot \underbrace{(x-x_0)^{n-k-1}}_{\downarrow \atop 0} \geq 0$$

lub $=1$, gdy $n=k+1$.

<u>Wniosek</u>: Jeżeli f i g są n-krotnie różniczkowalne w x_0, to

$$\frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^n} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0 \iff \begin{aligned} f(x_0) &= g(x_0) \\ f'(x_0) &= g'(x_0) \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x_0) &= g^{(n)}(x_0). \end{aligned}$$

W szczególności gdy szukamy wielomianu stopnia n, przybliżającego f najlepiej (wokół x_0), ~~niż~~ żądamy by

$$\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

(a więc żeby różnica dążyła do 0 w x_0 istotnie szybciej, niż to, czym przybliżamy)

z wniosku

$$\left.\begin{aligned} T_n(x_0) &= f(x_0) \\ T_n'(x_0) &= f'(x_0) \\ &\cdots \\ T_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0) \end{aligned}\right| (*)$$

Zauważmy teraz, że $T_n(x)$ możemy przedstawić w postaci $T_n(x) = a_n(x-x_0)^n + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \ldots + a_1(x-x_0) + a_0$

Wówczas $T_n(x_0) = a_0 \implies a_0 = f(x_0)$

$$T_n'(x) = n a_n (x-x_0)^{n-1} + (n-1)a_{n-1}(x-x_0)^{n-2} + \ldots + 2a_2(x-x_0) + a_1$$

$$T_n'(x_0) = a_1 \implies a_1 = f'(x_0)$$

$$T_n''(x_0) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$

$$T_n^{(3)}(x_0) = 2\cdot 3\, a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}$$

$$\vdots$$

$$T_n^{(k)}(x_0) = k!\, a_k \Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \text{dla } k = 1, \ldots, n.$$

(w szczególności wielomian $T_n(x)$ jest jednoznacznie wyznaczony przez warunki (*)).