

Materiał pomocniczy
do egzaminu ustnego z AMI.2*

- (1) **Pierwsza pochodna:** podstawowe własności, twierdzenia o pochodnej złożenia i funkcji odwrotnej. Twierdzenia o wartości średniej. Tw. Darboux o własności Darboux pochodnej. Związki pochodnej z monotonicznością i warunkiem Lipschitza. Reguła de l'Hôpitala (dowód przynajmniej w wersji $0/0$).
- (2) **Wyższe pochodne:** wzór Taylora i różne postaci reszty, zastosowania wzoru Taylora. Twierdzenie o lokalnych ekstremach.
- (3) **Wypukłość:** twierdzenie o monotoniczności ilorazów różnicowych. Związki pierwszej i drugiej pochodnej z wypukłością.
- (4) **Ciągi i szeregi funkcyjne:** zbieżność punktowa i jednostajna dla ciągów i szeregów - definicje i podstawowe własności. Kryteria zbieżności jednostajnej, tw. Diniego i Polyi. Twierdzenie o różniczkowaniu ciągów i szeregów funkcyjnych.
- (5) **Ciągi i szeregi funkcyjne cd:** Twierdzenie Stone'a-Weierstrassa (przynajmniej szkic dowodu) - wersja rzeczywista i zespolona. Przykłady funkcji ciągłych nigdzie nieróżniczkowalnych.
- (6) **Szeregi potęgowe:** rozwinięcia funkcji elementarnych. Promień zbieżności, wzór Cauchy'ego-Hadamarda. Twierdzenie Abela i Twierdzenie Abela-Stolza o granicach kątowych. Twierdzenie o różniczkowaniu szeregów potęgowych wyraz po wyrazie.
- (7) **Funkcje analityczne:** podstawowe własności, przykłady funkcji gładkich, nieanalitycznych. Analityczność sumy szeregu potęgowego. Kryterium analityczności. Funkcje analityczne a działania algebraiczne. Składanie funkcji analitycznych, wzór Faà di Bruno.
- (8) **Tw. Arzeli-Ascolego:** dowód; istotność założeń. Przykłady rodzin równociągłych.
- (9) **Całka nieoznaczona:** istnienie, podstawowe własności; całkowanie przez części i przez podstawienie. Całkowanie funkcji wymiernych, niewymierności stopnia 2 i wyrażeń trygonometrycznych.
- (10) **Całka Riemanna:** podziały, punktowania i sumy całkowite. Definicja całki Riemanna. Podstawowe własności funkcji całkownych. Dolna i górna całka Darboux; kryteria całkowności w sensie Riemanna, zbiory miary zero. Zasadnicze tw. rachunku różniczkowego i całkowego. Całkowe twierdzenia o wartości średniej. Reszta całkowita we wzorze Taylora.
- (11) **Długość krzywej:** Wzór dla krzywej, której pochodna jest całkowalna w sensie Riemanna. Krzywe prostowalne, przykłady krzywych, które nie są prostowalne.
- (12) **Całki niewłaściwe:** Definicje, całki zbieżne bezwzględnie, kryteria zbieżności (war. Cauchy'ego, kryt. porównawcze, kryt. Abela i Dirichleta). Przykłady zbieżnych i rozbieżnych całek niewłaściwych.
- (13) **Przejścia graniczne a całka:** Całkowanie ciągów i szeregów funkcyjnych wyraz po wyrazie. Różniczkowanie pod znakiem całki - przykłady zastosowania. Całka Poissona, wzory Wallisa i Stirlinga.
- (14) **Funkcje Γ i B Eulera:** definicje, podstawowe własności. Twierdzenie Bohra, wzory Weierstrassa, Legendre'a i Eulera (na odbicie). Rozwinięcie sinusa w iloczyn nieskończony.

- (15) **Szeregi Fouriera:** Twierdzenia o aproksymacji funkcji całkowalnych w sensie Riemanna funkcjami gładkimi i schodkowymi. Lemat Riemanna-Lebesgue'a. Szeregi trygonometryczne; wzory na współczynniki rozwinięcia w szereg trygonometryczny. Szereg Fouriera funkcji: definicja, kryteria Dirichleta i wnioski z nich. Zasada lokalizacji. Kryteria Dirichleta. Współczynniki Fouriera pochodnych. Tożsamość Parsewala.

Zdaję sobie sprawę z tego, że to bardzo obszerna lista; ma ona być dla Państwa przede wszystkim pomocą przy przygotowaniu się do egzaminu ustnego. Oczekuję, że osoba odpowiadająca na ocenę dobrą będzie umiała sformułować wspomniane tu twierdzenia, niektóre z nich udowodnić (choćby szkicowo), podać przykłady zastosowania, uzasadnić istotność założeń. Na ocenę 4+ spodziewałbym się już dowodów wszystkich łatwiejszych twierdzeń i szkiców, czy choćby planów dowodów tych trudniejszych i świadomości związków między twierdzeniami. Na piątkę... Na piątkę należy umieć. Może nie wszystko, może nie szczegóły rachunków, może coś nagle ulecieć z pamięci – wiem, jak to jest – ale ocenę, jak wiele można *nie umieć* na piątkę proszę zostawić już mojemu subiektywnemu odczuciu.

Polecam jeszcze Państwa uwadze *Listę warunków dostatecznych na otrzymanie oceny niedostatecznej*, autorstwa dra Krycha:

https://www.mimuw.edu.pl/~goldie/zajecia/am1.2_2010/warkon-2010-czerwiec.pdf

Żeby nie kończyć zbyt ponurą nutą: chciałbym Państwu wstawić jak najwięcej piątek - i będę się starał to zrobić. Proszę tylko o aktywną pomoc w tej sprawie.