# Kilka słów o historii

W 1747 roku Jean le Rond d'Alembert wykazał, że gdy rozważamy strunę długości $\pi$, zamocowaną na końcach, to jej ruch opisuje równanie

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad \text{(WE)}$$

gdzie $u(x,t)$ jest położeniem (wychyleniem) punktu o współrzędnej $x \in [0,\pi]$ w chwili $t \in \mathbb{R}$. (znaczki $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ i $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ oznaczają drugą pochodną względem, odpowiednio, zmiennych $t$ i $x$, przy takim różniczkowaniu drugą ze zmiennych traktujemy jako stałą). D'Alembert wywiódł to równanie korzystając z prawa sprężystości Hooke'a (stała $a$ zależy od naprężenia i współczynnika sprężystości struny) i udowodnił,
my dla uproszczenia zakładamy $a=1$
że rozwiązania równania (WE) mają postać

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(t+x) + g(t-x)\right], \qquad \text{(DF)}$$

gdzie $f,g:[0,\pi] \to \mathbb{R}$ są takie, by dało się uzgodnić warunki początkowe

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \text{położenie początkowe}$$

(IC) $$\frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = \psi(x) \quad \text{prędkość początkowa}$$

i by tak uzyskane $u(x,t)$ dało się 2 razy zróżniczkować po $x$ i po $t$ (np. $f, g \in C^2$).

Dla porządku: ~~...~~ żeby użyć wzoru (DF), musimy $f$ i $g$, dane na początku na $[0,\pi]$, przedłużyć wzorem $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = -g(x)$ na $[-\pi,\pi]$, a potem do funkcji $2\pi$-okresowej na $\mathbb{R}$. Aby uzgodnić warunki (IC), wystarczy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} f(x) + g(-x) = 2\varphi(x) \\ f'(x) + g'(-x) = 2\psi(x). \end{cases}$$

Przy zamocowanych końcach mamy $0 = u(0,t) = \frac{1}{2}[f(t) + g(t)]$, więc $g = -f$.
$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(t+x) - f(t-x)]$

Łatwo też można sprawdzić, że dla dowolnych $f, g$ $2\pi$-okresowych na $\mathbb{R}$, klasy $C^2$, funkcja $u(x,t)$ dana wzorem (DF) spełnia równanie (WE).

Niedługo później Daniel Bernoulli zaproponował, by szukać funkcji $u(x,t)$ postaci

$$u(x,t) = \alpha(x)\cdot\beta(t)$$

i wykazał, że równanie (WE) ma nieskończenie wiele rozwiązań postaci

$$u_k(x,t) = \sin kx \cdot \cos kt$$

spełniających warunek początkowy $u_k(x,0) = \sin kx$, $\frac{\partial}{\partial t} u_k(x,0) = 0$,

Dowolna liniowa kombinacja rozwiązań równania (WE) też jest jego rozwiązaniem, więc Bernoulli postawił hipotezę, że każde rozwiązanie równania (WE), które spełnia warunki $\partial_t u(x,0) = 0$, (no i $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, bo końce są zamocowane) jest postaci

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx \cdot \cos kt$$

– wtedy $u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$.

Porównanie z wzorem d'Alemberta daje

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx = u(x,0) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right) = f(x).$$

I stąd powstało pytanie: czy każdą funkcję f, której można użyć we wzorze d'Alemberta, możemy przedstawić jako $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ ?

Musimy zdawać sobie sprawę, że na dobre zrozumienie tego, co to jest szereg zbieżny, trzeba było jeszcze poczekać kilkadziesiąt lat (Dirichlet ~1830), a na współczesne pojęcie funkcji – sto kilkadziesiąt (Goursat, ~1920?). Stąd na wyczerpującą odpowiedź nie było szans.

Kolejną cegiełkę – a raczej kamień węgielny – dołożył Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830). Ten syn krawca od młodości wykazywał wielkie zdolności matematyczne. Zaangażowany w Komitet Rewolucyjny, cudem uszedł z życiem podczas Wielkiego Terroru; ~~po~~ od 1794 studiował u Lagrange'a, Laplace'a i Monge'a na Ecole Normale w Paryżu; rok później uczył już w Ecole Centrale des Travaux Publics (dziś Ecole Polytechnique). Związał się następnie z Napoleonem, wziął udział w podboju Egiptu, gdzie do końca okupacji francuskiej prowadził wykopaliska i dał się poznać jako sprawny administrator. Po powrocie do Francji Napoleon mianował go prefektem departamentu Isère, ze stolicą w Grenoble. I właśnie w Grenoble, w latach 1804-1807, pomiędzy osuszaniem bagien a umacnianiem twierdzy, Fourier napisał fundamentalne dzieło „O rozchodzeniu się ciepła w ciałach stałych". Korzystając z prawa stygnięcia Newtona (szybkość stygnięcia – tj. tempo przepływu energii cieplnej – jest proporcjonalna do różnicy temperatur) wyprowadził równanie, jakie musi spełniać temperatura $u(x,t)$ w cienkim pręcie w miarę upływu czasu $t$.

Załóżmy, że mamy do czynienia z cienkim prętem długości $\pi$ (utożsamiamy go z odcinkiem $[0,\pi]$, licząc, że pręt jest na tyle cienki, by móc uznać, że na każdym przekroju poprzecz- ~~móc uznać~~ nym temperatura jest stała.

Prowadzi to do równań

(1) $X''(\cancel{x}) = c \cdot X(x)$ (2) $\dot{T}(t) = c \cdot T(t)$

~~które mają dodatkowo spełniać~~

przy czym (3) $X(0) = X(\pi) = 0$.

Na wykładzie z równań różniczkowych zwyczajnych dowiedzą się Państwo, że ~~jed~~ układ (1), (3) ma rozwiązania ~~tylko~~ niezerowe tylko wtedy, gdy $c = -k^2$ dla $k \in \mathbb{N}$, wówczas $X(x) = A \cdot \sin kx$. Wówczas z (2): $\dot{T}(t) = -k^2 T(t)$ wynika, że $T(t) = B \cdot e^{-k^2 t}$, więc rozwiązanie $u_k(x,y)$ jest postaci $C_k \sin(kx) e^{-k^2 t}$.

Jak w przypadku równania falowego, również tu każda kombinacja liniowa rozwiązań $\{u_k\}$ jest również rozwiązaniem (HE), a jeżeli szereg $\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$ jest dostatecznie zbieżny (wraz ze swoimi pochodnymi), by móc go różniczkować wyraz po wyrazie, to też i $u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$ jest rozwiązaniem (HE) spełniającym $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

Załóżmy też, że końce pręta są stale chłodzone ($u(0,t) = u(\pi,t) = 0$), a w chwili początkowej temperatura pręta $u(x,0)$ jest dana jako funkcja $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$.

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{dla } x \in [0,\pi]$$

(oczywiście powinniśmy mieć $f(0) = f(\pi) = 0$).

Fourier wykazał, że $u(x,t)$ spełnia wówczas równanie przewodnictwa ciepła

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad (HE).$$

Postępując jak Daniel Bernoulli, Fourier szukał rozwiązań (HE) postaci $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$, co prowadzi do równania

$$X(x) \cdot \dot{T}(t) = X''(x) \cdot T(t), \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dot{} \text{ – pochodna po } t \\ {}' \text{ – pochodna po } x. \end{array} \right.$$

a więc $\forall_{x \in [0,\pi]} \ \forall_{t \geq 0} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\dot{T}(t)}{T(t)}$.

Oznacza to, że w rzeczywistości ilorazy $\frac{X''}{X}$ i $\frac{\dot{T}}{T}$ nie zależą ani od $x$, ani od $t$ i są równe tej samej stałej $c$.

Co z warunkiem początkowym?

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx .$$

Jeżeli więc umiemy rozwinąć funkcję $f(x)$ w ~~sumę~~ szereg sinusów, to możemy od ręki podać rozwiązanie ~~(R~~ (HE) spełniające ten warunek początkowy:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx \quad \Rightarrow \quad u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx \, e^{-kt^2}$$

Zadanko: Czy ze zbieżności tego szeregu automatycznie wynika zbieżność tego dla wszystkich $t \geq 0$?

# Twierdzenia o aproksymacji

Twierdzenie: Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ będzie całkowalna w sensie Riemanna. Wówczas dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje funkcja schodkowa $g_\varepsilon:[a,b]\to\mathbb{R}$ taka, że $\int_a^b |f(t)-g_\varepsilon(t)|\,dt<\varepsilon$.

Dowód: Z kryterium całkowalności w sensie Riemanna wiemy, że $\exists_{\delta>0}$ taka, że dla każdego podziału $\nu$ odcinka $[a,b]$, $\nu=\{x_0,\dots,x_m\}$, takiego że $\delta(\nu)<\delta$, mamy $\overline{S}(f,\nu)-\underline{S}(f,\nu)<\varepsilon$. Niech zatem $\nu$ będzie takim podziałem, zaś $\xi=\{\xi_1,\dots,\xi_m\}$ niech będzie punktowaniem $\nu$.

Kładziemy $g_\varepsilon(t)=\begin{cases} f(\xi_i) & \text{dla } t\in[x_{i-1},x_i) \\ f(\xi_m) & \text{dla } t=b. \end{cases}$

Wtedy

$$\int_a^b |f(t)-g(t)|\,dt \le \overline{S}(|f-g|,\nu)=$$

$$=\sum_{i=1}^m \sup_{t\in[x_{i-1},x_i]} |f(t)-f(\xi_i)|\,(x_i-x_{i-1})\le$$

$$\le\sum_{i=1}^m \Big(\sup_{[x_{i-1},x_i]} f-\inf_{[x_{i-1},x_i]} f\Big)(x_i-x_{i-1})=\overline{S}(f,\nu)-\underline{S}(f,\nu)<\varepsilon.$$

$\square$

W podobny sposób dowodzimy

<u>Twierdzenie</u>: Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ będzie całk. w sensie Riemanna. Wówczas dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje funkcja $h_\varepsilon\in C^\infty([a,b])$ taka, że $\int_a^b |f(t)-h_\varepsilon(t)|dt<\varepsilon$.

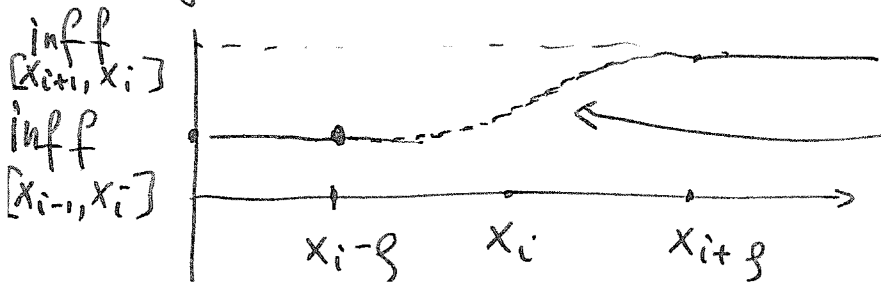
<u>Dowód</u>: Jak poprzednio, ustalamy $\varepsilon>0$ i dobieramy $\delta>0$ tak, by dla każdego podziału $\nu$ o średnicy mniejszej niż $\delta$ było $\overline{S}(f,\nu)-\underline{S}(f,\nu)<\varepsilon/2$.

Ustalmy podział $\nu = \{x_0,\dots,x_m\}$ z $\delta(\nu)<\delta$ i niech $\varrho>0$ będzie małe – mniejsze niż $\frac{1}{2}\min\limits_{i=1,2,\dots,m}(x_i-x_{i-1})$ (dokładną wartość ustalimy później).

Przyjmujemy teraz $h_\varepsilon(t)=\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f$ dla $t\in(x_{i-1}+\varrho, x_i-\varrho)$, $i=2,\dots,m-1$

dla $t\in[a,x_1-\varrho)$ $h_\varepsilon(t)=\inf\limits_{[a,x_1]} f$

$t\in[x_{m-1}+\varrho, b]$ $h_\varepsilon(t)=\inf\limits_{[x_{m-1},b]} f$; pozostaje zdefiniować $h_\varepsilon$ na $[x_i-\varrho, x_i+\varrho]$ dla $i=2,\dots,m-1$.




tu „sklejamy" $h_\varepsilon$ funkcją gładką ($C^\infty$) i monotoniczną.

W ten sposób $h_\varepsilon$ jest klasy $C^\infty([a,b])$

i dla $t\in[x_i-\varrho, x_i+\varrho]$, $i=2,\dots,m-1$ mamy

$$|f(t)-h_\varepsilon(t)| \le \sup_{[a,b]}|f| - \max\left(\inf_{[x_{i-1},x_i]} f, \inf_{[x_i,x_{i+1}]} f\right)$$

$$\le 2\sup_{[a,b]}|f| \;,$$

a dla $t\in(x_{i-1}+\varrho, x_i-\varrho)$ oraz $t\in[a,x_1-\varrho)$
i $t\in(x_{m-1}+\varrho, b]$

$$|f(t)-h_\varepsilon(t)| \le \sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \;.$$

lub $[a,x_1]$ lub $[x_{m-1},b]$

Niech teraz $\mu = \{a=x_0, x_1-\varrho, x_1+\varrho, x_2-\varrho, x_2+\varrho, \dots,$
$x_{m-1}-\varrho, x_{m-1}+\varrho, b=x_m\}$.

Wtedy $\delta(\mu)<\delta$,

$$\int_a^b |f(t)-h_\varepsilon(t)|\,dt \le \overline{S}(|f-h_\varepsilon|,\mu) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{m-1} 2\sup|f|\big((x_i+\varrho)-(x_i-\varrho)\big) + \sum_{i=1}^{m}\Big(\sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f\Big)\cdot \underbrace{(x_i-x_{i-1})}_{\text{oszacowanie górne na długość odcinka } [x_{i-1}+\varrho,\, x_i-\varrho] \text{ oraz, dla } i=1 \text{ i } i=m,\ [a,x_1-\varrho] \text{ i } [x_{m-1}+\varrho,b]}$$

$$\le 4(m-1)\cdot\varrho\cdot\sup|f| + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Jeżeli więc wybierzemy $\varrho$ takie, by $4(m-1)\varrho\sup|f| < \frac{\varepsilon}{2}$, dostaniemy tezę.

$\square$.

# Lemat Riemanna-Lebesgue'a

Jeżeli $f$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a,b]$, to

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b f(t) \sin Nt \, dt = \lim_{N\to\infty} \int_a^b f(t) \cos Nt = 0.$$

Dowód: Udowodnię dla sinusów, drugą granicę oblicza się w ten sam sposób.

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $h_\varepsilon \in C^\infty([a,b])$ będzie taka, że $\int_a^b |f(t) - h_\varepsilon(t)| \, dt < \varepsilon/2$.

Mamy
$$\int_a^b h_\varepsilon(t) \sin Nt \, dt = \int_a^b h_\varepsilon(t) \cdot \left(-\frac{\cos Nt}{N}\right)' dt =$$

$$= -\frac{\cos Nt}{N} h_\varepsilon(t) \Big|_a^b + \frac{1}{N} \int_a^b h_\varepsilon'(t) \cos Nt \, dt =$$

$$= \frac{1}{N}\left[(\cos Na \cdot h_\varepsilon(a) - \cos Nb \cdot h_\varepsilon(b) + \int_a^b h_\varepsilon'(t) \cos Nt \, dt\right]$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym szacuje się przez

$$2 \sup_{[a,b]} |h_\varepsilon| + \int_a^b |h_\varepsilon'(t)| \, dt \leftarrow$$ to jest wielkość skończona niezależna od $N$.

Stąd $\int_a^b h_\varepsilon(t) \sin Nt \, dt \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \Rightarrow \exists_{N_0} \forall_{N > N_0} \left| \int_a^b h_\varepsilon(t) \sin Nt \, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

Wtedy $\left| \int_a^b f(t) \sin Nt \, dt \right| \leq \left| \int_a^b (f(t) - h_\varepsilon(t)) \sin Nt \, dt \right| +$

$$+\left|\int_a^b h_\varepsilon(t)\sin Nt\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)-h_\varepsilon(t)|\,dt + \varepsilon/2$$

$$< \varepsilon, \quad \text{o ile} \quad N > N_\varepsilon.$$

Stąd teza. $\square$.

<u>Wniosek</u>:

Całkować w sensie Riemanna możemy też funkcje zmiennej rzeczywistej o wartościach zespolonych – całkujemy wtedy oddzielnie część rzeczywistą i zespoloną takiej funkcji. Na poziomie wzorów (na całkowanie przez części i przez podstawienie) nic się nie zmienia.

Lemat Riemanna-Lebesgue'a możemy zatem sformułować następująco: jeżeli $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ jest całkowalna w sensie Riemanna, to

$$\int_a^b f(t)e^{iNt}\,dt \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

Uwaga: Lemat Riemanna-Lebesgue'a zachodzi również dla $f$, które wprawdzie nie są całkowalne w sensie Riemanna na $[a,b]$, ale dla których $\int_a^b |f(t)|\,dt$ jest dobrze określona jako zbieżna całka niewłaściwa. ~~a tak~~ Jeżeli bowiem tak jest – i funkcja $f$ jest nieograniczona w otoczeniu punktów $\leq y_1 \leq \dots \leq y_k \leq b$, to dla ustalonego $\varepsilon > 0$ znajdziemy $\rho > 0$ takie, że $\sum_{l=1}^{k} \int_{y_l-\rho}^{y_l+\rho} |f(t)|\,dt < \varepsilon/2$ (bo $\int_a^b |f(t)|\,dt$ jest zbieżna),

zaś całki $\int_a^{y_1-\rho} f(t)\sin nt\,dt$ i $\int_{y_l+\rho}^{y_{l+1}-\rho} f(t)\sin nt$, $\int_{y_k+\rho}^{b} f(t)\sin nt$ są już całkami właściwymi i $f$ jest na tych przedziałach całkowalna w sensie Riemanna.

Z lematu R-L. zastosowanego do każdego z tych przedziałów oddzielnie znajdziemy $N_0$ t.ż.

$$\forall_{N>N_0} \left| \int_a^{y_1-\rho} f(t)\sin nt\,dt \sum_{l=1}^{k-1} f(t)\sin nt\,dt \int_{y_k+\rho}^{b} f(t)\sin nt\,dt \right| < \varepsilon/2;$$

$$\left|\sum_{l=1}^{k} \int_{y_l-\rho}^{y_l+\rho} f(t)\sin nt\,dt\right| \leq \sum_{l=1}^{k} \int_{y_l-\rho}^{y_l+\rho} |f(t)|\,dt < \varepsilon/2,$$ więc $\int_a^b f(t)\sin nt\,dt < \varepsilon$ o ile $n > N_0$ □.

Wróćmy do szeregów trygonometrycznych.

Łatwo dostajemy wzory na współczynniki takiego szeregu, jeżeli wiemy, że jest on jednostajnie zbieżny:

<u>Twierdzenie</u>: Jeżeli funkcja okresowa o okresie $2\pi$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest sumą jednostajnie zbieżnego szeregu trygonometrycznego

(SF)

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos mt+b_m\sin mt\right),$$

to

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos mt\,dt \qquad \text{dla } m=0,1,2,\dots$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin mt\,dt \qquad \text{dla } m=1,2,\dots$$

<u>Dowód</u>: Proste <u>ćwiczenie</u>: $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\sin lt\,dt=0$

dla wszystkich $l,k = 0,1,2,\dots$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kt\sin lt\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\cos lt\,dt = \begin{cases}0 & \text{gdy } k\neq l\\ \pi & \text{gdy } k=l\end{cases}$$

~~cos~~ $\cancel{f(t)\cos lt} = \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} f(t)}$

Mnożąc $f(t)$ przez $\cos lt$ i całkując od $-\pi$ do $\pi$
wyraz po wyrazie
(wolno, bo szereg na $f$ jest jednostajnie zbieżny:

Zagadka: : Szereg (SF) jest jednostajnie zbieżny PRZED pomnożeniem przez $\cos lt$. Skąd wiemy, że PO pomnożeniu wciąż jest jednostajnie zbieżny?),

dostajemy wzór na $a_l$; wzór na $b_l$:
dostajemy mnożąc $f(t)$ przez $\sin lt$ i dalej tak samo.

Gdy mówimy o funkcjach okresowych o okresie $2\pi$, wygodnie jest myśleć o nich jako o funkcjach na okręgu jednostkowym. Pozwala nam to w bardziej jednolity sposób traktować szeregi trygonometryczne, bez odróżniania części „sinusowej" od „cosinusowej" – za to dostajemy szereg indeksowany liczbami całkowitymi$_*$ ~~nie za~~ w miejsce naturalnych:

<u>Def</u>. Niech $f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ będzie całkowalna w sensie Riemanna. Jej $n$-tym współczynnikiem Fouriera nazywamy

$$\hat{f}(n) = c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Z ~~[illegible]~~ wzoru $e^{it} = \cos t + i \sin t$ od razu dostajemy, że $c_0 = \frac{a_0}{2}$,

$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$, $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$ dla $n \in \mathbb{N}$, więc z współczynników $c_n$ możemy łatwo wyznaczyć $a_n$ i $b_n$ – i odwrotnie.

<u>Def</u>. Szereg Fouriera funkcji $f$ to

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}.$$

Jego $N$-tą sumą częściową nazywamy funkcję $$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{inx}$$

Na razie nie wiemy jeszcze, (czy / dla jakich $f$) szereg Fouriera funkcji $f$ jest do niej zbieżny – i w jakim sensie.

Od nam też widzimy, że

$$|\hat{f}(n)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx$$

a z Lematu Riemanna-Lebesgue'a, że

$$\lim_{|n|\to\infty} \hat{f}(n) = 0$$

Kluczowym narzędziem do badania zbieżności szeregów Fouriera jest jądro Dirichleta:

Jądrem Dirichleta nazywamy funkcję

$$D_N(s) = \sum_{n=-N}^{N} e^{ins} = \begin{cases} \dfrac{\sin((N+1/2)s)}{\sin(1/2 s)} & s \in [-\pi,\pi]\setminus\{0\} \\ 2N+1 & s=0 \end{cases}$$

Mamy $\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(s)\,ds = \sum_{n=-N}^{N} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ins}\,ds}_{=0,\text{ o ile } n\neq 0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} ds = 1$

Użyteczność jądra Dirichleta bierze się z następującej równości: Jeżeli $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest $2\pi$-okresowa, to

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{inx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-t)}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t)\, dt \underset{\substack{x-t=s\\ dt=-ds}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-s) D_N(s)\,(-ds)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-s) D_N(s)\, ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-s) D_N(s)\, ds$$

funkcja podcałkowa jest $2\pi$-okresowa, więc całka po całym okresie jest zawsze taka sama.

<u>Twierdzenie</u> (kryterium Diniego)

Jeżeli $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest $2\pi$-okresowa, całkowalna w sensie Riemanna na $[-\pi,\pi]$ i $x_0\in[-\pi,\pi]$ jest takie, że

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} \right| dt < \infty$$

to $S_N f(x_0) \to f(x_0)$ przy $N\to\infty$.

Ciągle

Dowód:

$$f(x_0) - S_N f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0) D_N(t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - t) D_N(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{f(x_0) - f(x_0 - t)}{t}\,\frac{t}{\sin t/2}}_{= G_{x_0}(t)} \sin\left(N+\tfrac{1}{2}\right)t\,dt$$

$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{f(x_0) - f(x_0-t)}{t}\right| dt$ jest skończona $\Rightarrow$ po pomnożeniu funkcji podcałkowej przez ograniczoną funkcję $\frac{t}{\sin t/2}$ też będzie skończona. Stąd $\int_{-\pi}^{\pi} |G_{x_0}(t)|\,dt < \infty$

$\Rightarrow$ dla funkcji $G_{x_0}(t)$ działa Lemat Riemanna-Lebesgue'a. Stąd $\lim_{N\to\infty}\left(f(x_0) - S_N f(x_0)\right) = 0$.

**Twierdzenie** (kryterium Diniego, wersja 2.0 – symetryczna)

Jeżeli $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest $2\pi$-okresowa, całkowalna w sensie Riemanna na $[-\pi,\pi]$, $x_0 \in [-\pi,\pi]$ i $S \in \mathbb{R}$ jest taka, że

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{f(x_0-t)+f(x_0+t)-2S}{t} \right| dt < \infty$$

to $s_N f(x_0) \xrightarrow[N\to\infty]{} S$.

**Dowód:** Zaczynamy jak poprzednio

$$S - s_N f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S \cdot D_N(t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0-t) D_N(t)\,dt$$

Przyjrzyjmy się drugiemu składnikowi. Funkcja $D_N$ jest parzysta, więc

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0-t) D_N(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0-t) D_N(-t)\,dt \underset{s=-t}{=} \cancel{\frac{1}{2\pi}\int}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+s) D_N(s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0-t)+f(x_0+t)}{2} D_N(t)\,dt$$

~~Stąd~~

$\cancel{S - s_N f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2S -}$

Stąd $$s_N f(x_0) - S = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0-t)+f(x_0+t)-2S}{2} D_N(t)\,dt =$$

(dalej tak samo)

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0-t)+f(x_0+t)-2S}{\cancel{2}\, t} \cdot \frac{\cancel{2}t/2}{\sin t/2} \cdot \sin\left(N+\frac{1}{2}\right) dt$$

i jak poprzednio z lematu Riemanna-Lebesgue'a przy $N \to \infty$ ta całka dąży do $0$.

Z kryteriów Diniego Tatwo wynikają bardziej szczegółowe warunki dostateczne zbieżności $S_N f(x_0)$ w punkcie $x_0 \in [-\pi, \pi]$.

1. (Kryterium Lipschitza) Jeżeli istnieje $\delta > 0$ tż. dla $t \in (-\delta, \delta)$

   a) $|f(x_0+t) - f(x_0)| \leq L|t|^\alpha$ dla pewnego $\alpha \in (0,1]$

   to $S_N f(x_0) \xrightarrow{N\to\infty} f(x_0)$

   b) $|f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S| \leq L|t|^\alpha$

   to $S_N f(x_0) \xrightarrow[N\to\infty]{} \cancel{f(x_0)}\ S$

   w szczególności jeżeli $f$ ma w $x_0$ granice jednostronne $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = g^-$

   $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = g^+$

   i $|f(x) - g^-| \leq L_1|x-x_0|^{\alpha_1}$; $|f(x) - g^+| \leq L_2|x-x_0|^{\alpha_2}$

   dla $-\delta < x - x_0 < 0$ dla $0 < x - x_0 < \delta$

   to $S_N f(x_0) \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{g^- + g^+}{2}$.

2. Jeżeli $f$ ma w $x_0$ skończone granice lewo- i prawostronną oraz skończoną lewo-

i prawostronną pochodną, to

$$S_N f(x_0) \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{\lim_{x\to x_0^+} f(x) + \lim_{x\to x_0^-} f(x)}{2}$$

3. Jeżeli $f$ jest różniczkowalna w $x_0$, to $S_N f(x_0) \xrightarrow[N\to\infty]{} f(x_0)$.

<u>Zadanie:</u> Udowodnić 1, wywnioskować $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$.

Odtąd zakładamy, że $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,dt < \infty$.

<u>Zasada Lokalizacji</u>

To, czy szereg Fouriera funkcji $f$ jest zbieżny w $x_0 \in [-\pi, \pi]$, a nawet wartość jego sumy (tj $\lim_{N\to\infty} S_N f(x_0)$) <u>zależy</u> jedynie od wartości $f$ w (dowolnie małym) otoczeniu punktu $x_0$.

<u>Dowód:</u> Niech $\delta > 0$ będzie małe. Mamy

$$S_N f(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - t) D_N(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) f(x_0 - t) \cdot \frac{1}{\sin t/2} \cdot \sin\left(N + \tfrac{1}{2}\right)t\,dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x_0-t)\,D_N(t)\,dt. = (*)$$

Zauważmy, że na przedziałach $[-\pi,-\delta]$ i $[\delta,\pi]$ funkcja $\frac{1}{\sin t/2}$ jest ciągła i ograniczona, więc $\int_{-\pi}^{-\delta}\left|\frac{f(x_0-t)}{\sin t/2}\right|dt < \infty$ i tak samo $\int_{\delta}^{\pi}\left|\frac{f(x_0-t)}{\sin t/2}\right|dt < \infty$. Z Lematu Riemanna-Lebesgue'a więc pierwszy składnik sumy $(*)$ dąży przy $N\to\infty$ do $0$, więc

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(x_0) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x_0-t)\,D_N(t)\,dt.$$

$\square$.

# Kryteria Dirichleta

**Lemat Dirichleta**: Niech $g:(0,b]\to\mathbb{R}$ będzie niemalejąca i ograniczona.

Wtedy
$$\lim_{N\to\infty}\int_0^b g(t)\frac{\sin Nt}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}\lim_{x\to 0^+} g(t)\,\cancel{dt}$$

**Dowód**: Przedłużmy $g$ na przedział $[0,b]$, kładąc $g(0)=\lim_{x\to 0^+} g(t)dt$. Mamy

$$\int_0^b g(t)\frac{\sin Nt}{t}\,dt = \int_0^b \big(g(t)-g(0)\big)\frac{\sin Nt}{t}\,dt +$$
$$+\int_0^b g(0)\frac{\sin Nt}{t}\,dt = I_1 + I_2 .$$

Mamy
$$\int_0^b \frac{\sin Nt}{t}\,dt \underset{y=Nt}{=} \int_0^{Nb}\frac{\sin y}{y}\,dy \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\,dy = \frac{\pi}{2},$$

więc $I_2 \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{\pi}{2}g(0) = \frac{\pi}{2}\lim_{x\to 0^+} g(t)$.

Pozostaje wykazać, że $I_1\to 0$.

Ustalmy $\varepsilon>0$. Istnieje $\delta>0$ t.ż. dla $t\in[0,\delta]$ $g(t)-g(0)<\varepsilon$.

$$I_1 = \int_0^\delta \big(g(t)-g(0)\big)\frac{\sin Nt}{t}\,dt + \int_\delta^b \frac{g(t)-g(0)}{t}\sin Nt\,dt$$
$$= J_1 + J_2$$

Całka $J_2$ dąży, na mocy lematu Riemanna-
-Lebesgue'a, do $0$, bo $\frac{1}{t}$ jest na $[\delta, b]$
ograniczona i ciągła.

Oznaczmy $F(z) = \int_0^z \frac{\sin t}{t}\,dt$. Funkcja $F$ jest
ciągła i ma granicę $\frac{\pi}{2}$ przy $z \to \infty$, więc
jest ograniczona na $[0,\infty)$: $|F(z)| \leq M$ dla $z \geq 0$.

$$|J_1| = \left|\int_0^\delta (g(t)-g(0))\frac{\sin Nt}{t}\,dt\right| \underset{\substack{\text{II tw.}\\ \text{o wart.}\\ \text{średniej}}}{=} \left|(g(0)-g(0))\int_0^\xi \frac{\sin Nt}{t}\,dt +\right.$$

$$\left.+(g(\delta)-g(0))\int_\xi^\delta \frac{\sin Nt}{t}\,dt\right| \underset{y=Nt}{=} \left|(g(\delta)-g(0))\int_{N\xi}^{N\delta} \frac{\sin y}{y}\,dy\right|$$

$$< \varepsilon \cdot |F(N\delta) - F(N\xi)| < \varepsilon \cdot 2M$$

Ostatecznie $|I_1| < \varepsilon \cdot 2M + |J_2| < \varepsilon(2M+1)$,
o ile tylko $N$ (w $J_2$) weźmiemy dostatecznie duże,
zatem $I_1 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

□.

Oczywiście Lemat Dirichleta zachodzi też
dla funkcji nierosnących, a także np. jeżeli
$g = g_1 - g_2$, $g_1, g_2$ niemalejące na $[0,\delta]$.

## Wnioski:

1. Jeżeli $f$ jest monotoniczna w pewnym otoczeniu $x_0$, to $S_N f(x_0) \xrightarrow[N\to\infty]{} \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)}{2}$

<u>Dowód</u>: Z zasady lokalizacji

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(x_0) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x_0-t)\, D_N(t)\,dt =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\delta}^{0} + \int_{0}^{\delta}\right) f(x_0-t)\, D_N(t)\,dt = (*)$$

ale $\displaystyle\int_{-\delta}^{0} f(x_0-t)\, D_N(t)\,dt \underset{s=-t}{=} \int_{0}^{\delta} f(x_0+s)\, \underbrace{D_N(-s)}_{\overset{D_N(s)}{\shortparallel}}\,ds,$

więc $\displaystyle (*) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}\, \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{\sin t/2}\,dt$

$$= \lim_{N\to\infty}\int_0^{\delta} \underbrace{\frac{f(x_0-t)+f(x_0+t)}{\pi}\cdot\frac{t/2}{\sin t/2}}\cdot\frac{\sin(N+1/2)t}{t}\,dt.$$

$f(x_0-t)$ i $f(x_0+t)$ są monotoniczne, $\dfrac{t/2}{\sin t/2}$ jest rosnąca, więc to jest suma funkcji monotonicznych.

Z Lematu Dirichleta $\displaystyle (*) = \frac{\pi}{2}\cdot\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0-t)+f(x_0+t)}{\pi}\cdot\frac{t/2}{\sin t/2}$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)}{2}.$$

Wniosek (zadanie):

1. Jeżeli $f$ jest na $[-\pi, \pi]$ różnicą dwóch funkcji monotonicznych, to

$$\forall_{x \in [-\pi, \pi]} \quad S_N f(x) \xrightarrow[N \to \infty]{} \frac{\lim\limits_{y \to x^-} f(y) + \lim\limits_{y \to x^+} f(y)}{2}$$

2. Jeżeli $f$ ma na $[-\pi, \pi]$ skończenie wiele ekstremów lokalnych, między którymi jest monotoniczna, to j.w.

# Współczynniki Fouriera pochodnych

**Twierdzenie:** $\widehat{f'}(n) = in\hat{f}(n)$

**Dowód:** $\widehat{f'}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-int}\,dt = f(t)e^{-int}\Big|_{-\pi}^{\pi} + in\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt$

$$= \underbrace{\left[f(\pi)e^{-in\pi} - f(-\pi)e^{in\pi}\right]}_{\substack{=0,\ \text{bo } f \text{ oraz } e^{int} \\ \text{są } 2\pi\text{-okresowe}}} + in\hat{f}(n). \qquad \square.$$

**Wniosek:** Jeżeli $f \in C^2(\mathbb{R})$ jest $2\pi$-okresowa, to $S_N f \rightrightarrows f$ na $[-\pi, \pi]$.

**Dowód:** Zbieżność punktową $S_N f \to f$ już mamy (bo $f$ różniczkowalna);

$$|\hat{f}(n)| = \frac{1}{n^2}|\widehat{f''}(n)| \le \frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi}|f''(t)|\,dt$$

i do szeregu Fouriera możemy zastosować kryterium Weierstrassa jednostajnej zbieżności. $\square$.

Jak już wspominałem, na przestrzeni wszystkich funkcji całkowalnych w sensie Riemanna na $[-\pi,\pi]$ (a nawet takich, dla których $\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt<\infty$) możemy
potencjalnie całka niewłaściwa
wprowadzić coś na kształt iloczynu skalarnego

$$\langle f,g\rangle_{L^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

i pochodzącej od niego normy

$$\|f\|_{L^2}=\langle f,f\rangle^{1/2}=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt\right)^{1/2}$$

Ma on pewne wady, np. jeżeli $f$ jest funkcją, która jest równa $0$ dla $t\neq\frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2})=1$, to $\|f\|_{L^2}=0$, choć $f\neq 0$, ale to drobiazg — bliżej przyjrzymy się tym kłopotom w przyszłym roku.

Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy (już to w sumie zrobiliśmy), że

$$\langle e^{ikt},e^{ilt}\rangle=\begin{cases}1 & k=l\\ 0 & k\neq l\end{cases}$$

więc funkcje $\{e^{ikt}:k\in\mathbb{Z}\}$ tworzą układ ortogonalny.

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{inx} = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{e^{int}}\,dt \cdot e^{inx} =$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \langle f, e^{inx} \rangle e^{inx}$$

jest rzutem funkcji $f$ na podprzestrzeń $V_N$ rozpiętą przez $\{e^{inx} : n \in \{-N, -N+1, \dots, N\}\}$

Stąd naturalnie wygląda następujący

<u>Lemat</u>: Dla dowolnych funkcji $f, h$ takich, że $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty$ i $\int_{-\pi}^{\pi} |h(t)|^2 dt < \infty$

(np $f, h$ całkowalne w sensie Riemanna, jeżeli $f$ spełnia ten warunek, to mówimy, że $f \in L^2([-\pi,\pi])$) mamy

$$\| f - S_N f \|_{L^2}^2 \le \| f - S_N h \|_{L^2}^2 .$$

Ten lemat mówi tylko tyle, że rzut $f$ na przestrzeń $V_N$ jest najbliższym punktem $V_N$ dla punktu $f$ (bo $S_N h$ też należy do $V_N$).

Dowód używa warunków ortogonalności $\{e^{ikt}\}$ i tylko ich - zostawiam jako zadanko.

Wnioski:

Łatwo możemy sprawdzić, że

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-S_N f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(|f(t)|^2 - 2f(t)\overline{S_N f(t)} + |S_N f(t)|^2\right) dt$$

$$= \ldots = \|f\|_{L^2}^2 - \sum_{n=-N}^{N} |\hat{f}(n)|^2$$

Jeżeli więc wiemy, że $\|f - S_N f\|_{L^2} \to 0$

(np. gdy $S_N f \rightrightarrows f$ na $[-\pi, \pi]$,
bo wtedy $\|f - S_N f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{|f(t)-S_N f(t)|^2}_{\rightrightarrows 0} dt$),

to $\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$

Tożsamość Parsevala

Wykażemy, że $\|f - S_N f\|_{L^2}^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ dla wszystkich funkcji $f$ całkowalnych w sensie Riemanna na $[-\pi, \pi]$.

Na razie wiemy, że tak jest gdy $f \in C^2$, bo wtedy $S_N f \rightrightarrows f$.

1. Powtarzając dowód twierdzenia o aproksymacji $f$ funkcjami gładkimi dowodzimy, że

$$\forall_\varepsilon \ \exists h_\varepsilon \in C^\infty([-\pi,\pi]) \ \text{tż:} \ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f-h_\varepsilon|^2 < \varepsilon^2$$

2. Ustalmy $\varepsilon > 0$.

$$\|f - S_N f\|_{L^2} \leq \|f - S_N h_\varepsilon\|_{L^2} \leq \overbrace{\|f - h_\varepsilon\|_{L^2}}^{\overset{\varepsilon}{\vee}} +$$

(Zadanie: wykazać, że $\|\cdot\|_{L^2}$ spełnia nierówność trójkąta: $\|f+g\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}$).

$$+ \underbrace{\|h_\varepsilon - S_N h_\varepsilon\|_{L^2}}_{\downarrow N\to\infty}$$

, więc jeżeli tylko $N$ jest dostatecznie duże,

bo $h_\varepsilon \in C^\infty$

mamy $\|f - S_N f\|_{L^2} < 2\varepsilon$.

Stąd $\|f - S_N f\|_{L^2} \xrightarrow{N\to\infty} 0$,

a więc tożsamość Parsevala zachodzi dla wszystkich $f$ całk. w sensie Riemanna.

Marc Antoine Parseval des Chênes (1755–1836)

I na koniec, już tylko informacyjnie
(dowód w skrypcie P. Streleckiego, nietrudny)

<u>Pytanie:</u> Czy znając współczynniki $\hat{f}(n)$, nawet jeżeli szereg Fouriera $f$ nie jest zbieżny do $f$ (albo nawet w ogóle w pewnych punktach nie jest zbieżny), umiemy odtworzyć funkcję $f$?

<u>Innymi słowy:</u> czy szereg Fouriera jest wyznaczony przez $f$ jednoznacznie?

W ogólności nie: jeżeli $f$ i $\tilde{f}$ różnią się w skończenie wielu punktach, to oczywiście $\hat{f}(n) = \hat{\tilde{f}}(n)$. Ale jeżeli $f$ jest ciągła?

<u>Info:</u> Istnieją funkcje ciągłe, których szeregi Fouriera nie są do nich (w pewnych punktach) zbieżne. (du Bois-Reymond, Fejér).

Lipót Fejér (1880–1959)
matematyk węgierski, promotor G. Polyi, P. Erdősa, J. von Neumanna

<u>Odpowiedź:</u> TAK

<u>Tw.</u> (Fejér): Jeżeli $f$ jest ciągła na $[-\pi,\pi]$, to $\sigma_N f = \dfrac{S_0 f + S_1 f + \ldots + S_N f}{N+1}$ (suma Cesàro), to $\sigma_N f \rightrightarrows f$ na $[-\pi,\pi]$.