Dalsze własności funkcji Γ:

- wzór Weierstrassa

Wiemy z dowodu tw. Bohra, że

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

Przekształćmy dalej ten wzór:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{1}{x} \lim_{n\to\infty} \frac{e^{x\ln n}}{\frac{x+1}{1}\cdot\frac{x+2}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{x+n}{n}} =$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{n\to\infty} e^{x\left(\ln n - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{n}\right)} \frac{e^{x\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)} =$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{n\to\infty} e^{x\left(\ln n - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n}\right)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{e^{x}\cdot e^{\frac{x}{2}}\cdots e^{\frac{x}{n}}}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)} =$$

st. Eulera-Mascheroniego

$$= \frac{1}{x} e^{-\gamma x} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{x/k}}{1+x/k} = \frac{1}{x} e^{-\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{x/k}}{1+x/k}$$

wzór Weierstrassa

• wzór Legendre'a

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\Gamma(x)}$$

Dowód

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{x/2}}{\frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{x}{2}+n\right)}\cdot\frac{n!\,n^{\frac{x+1}{2}}}{\frac{x+1}{2}\cdot\left(\frac{x+1}{2}+1\right)\cdot\ldots\left(\frac{x+1}{2}+n\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 n^x\sqrt{n}\cdot 2^{2n+2}}{x(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+2n)(x+1)(x+3)\ldots(x+2n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{(2n)!(2n)^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+2n)}}_{\downarrow\ \Gamma(x)}\cdot\frac{1}{2^x}\cdot\frac{(n!)^2\sqrt{n}\cdot 4^{n+1}}{(2n)!\,(x+2n+1)}=$$

$$=\frac{\Gamma(x)}{2^x}\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}}_{\downarrow\text{ Wzór Wallisa }\sqrt{\pi}}\cdot\frac{4n}{x+2n+1}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\Gamma(x).$$

$$\frac{4n}{x+2n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}2$$

Twierdzenie: Funkcja Γ jest klasy $C^{\infty}(0,\infty)$.

Dowód: Ustalmy $x \in (0,\infty)$ oraz a, b tż $0<a<x<b<\infty$.

Niech $N>1$ będzie takie, by

$$(1) \quad \int_0^{1/N} t^{a-1} |\ln t| \, dt < \varepsilon \qquad (2) \quad \int_N^{\infty} t^b e^{-t} dt < \varepsilon$$

(znajdziemy takie N, bo obie całki:

$$\int_0^1 t^{a-1} |\ln t| dt \quad i \quad \int_1^{\infty} t^b e^{-t} dt \quad \text{są zbieżne} -$$

– proszę to sprawdzić!)

Wtedy $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^{1/N} t^{x-1} e^{-t} dt + \int_{1/N}^{N} t^{x-1} e^{-t} dt +$

$$+ \int_N^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = L_N(x) + \Gamma_N(x) + R_N(x).$$

$$\frac{\Gamma(x+h) - \Gamma(x)}{h} = \frac{L_N(x+h) - L_N(x)}{h} + \frac{\Gamma_N(x+h) - \Gamma_N(x)}{h} +$$

$$+ \frac{R_N(x+h) - R_N(x)}{h}.$$

Mamy $\dfrac{\Gamma_N(x+h) - \Gamma_N(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \Gamma_N'(x) = \int_{1/N}^{N} t^{x-1} \ln t \, e^{-t} dt,$

więc o ile tylko $|h|$ jest dost. mały ($<\delta_1$),

to $$\left|\frac{\Gamma_N(x+h)-\Gamma_N(x)}{h} - \int_{1/N}^{N} t^{x-1}\ln t\, e^{-t}dt\right| < \varepsilon.$$

Mamy też $$\left|\frac{L_N(x+h)-L_N(x)}{h}\right| \leq \int_0^{1/N} \underbrace{\left|\frac{t^{x+h-1}-t^x}{h}\right|}_{=\, t^{x+\xi-1}\ln t} e^{-t}dt$$

dla pewnego ξ między 0 a h

$$\leq \int_0^{1/N} t^{a-1}|\ln t|\,dt < \varepsilon$$

o ile $|h|<x-a$, bo wtedy $x+\xi>a$; $e^{-t}\leq 1$

Analogicznie $$\left|\frac{R_N(x+h)-R_N(x)}{h}\right| \leq \int_N^{\infty} \underbrace{\left|\frac{t^{x+h-1}-t^x}{h}\right|}_{t^{x+\xi-1}\ln t} e^{-t}dt$$

$$\leq \int_N^{\infty} t^b \frac{\ln t}{t} e^{-t}dt \leq \int_N^{\infty} t^b e^{-t}dt < \varepsilon.$$

o ile $|h|<b-x$

I jeszcze $$\left|\int_0^{1/N} t^{x-1}\ln t\, e^{-t}dt\right| \leq \int_0^{1/N} t^{a-1}|\ln t| e^{-t}dt < \varepsilon$$

$$\left|\int_N^{\infty} t^{x-1}\ln t\, e^{-t}dt\right| \leq \int_N^{\infty} t^b e^{-t}dt < \varepsilon.$$

Stąd, o ile $|h|<\min(\delta_1, x-a)$,

$$\left| \frac{\Gamma(x+h)-\Gamma(x)}{h} - \int_0^\infty t^{x-1}\ln t\, e^{-t}\,dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{L_N(x+h)-L_N(x)}{h} \right| + \left| \int_0^{1/N} t^{x-1}\ln t\, e^{-t}\,dt \right| +$$

$$+ \left| \frac{R_N(x+h)-R_N(x)}{h} \right| + \left| \int_N^\infty t^{x-1}\ln t\, e^{-t}\,dt \right|$$

$$+ \left| \frac{\Gamma_N(x+h)-\Gamma_N(x)}{h} - \int_{1/N}^N t^{x-1}\ln t\, e^{-t}\,dt \right|$$

$< 5\varepsilon$, o ile tylko $|h| < \min(\delta_1, x-a, b-x)$.

To dowodzi, że $\Gamma'(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\ln t\, e^{-t}\,dt$.

Dalej postępujemy tak samo: kandydat na $\Gamma''(x)$ jest jasny: $\int_0^\infty t^{x-1}(\ln t)^2 e^{-t}\,dt$.

Dla $0<a<x<b<\infty$ możemy całkę $\int_0^1 t^{x-1}(\ln t)^2 e^{-t}\,dt$ oszacować z góry przez całkę $\int_0^1 t^{a-1}(\ln t)^2\,dt$, zbieżną i niezależną od x, a ~~dla~~

$\int_1^\infty t^{x-1}(\ln t)^2 e^{-t}\,dt$ przez zbieżny i niezależny od x całką $C\int_1^\infty t^b e^{-t}\,dt$, gdzie $C=\sup_{(0,\infty)}\frac{(\ln t)^2}{t}=\frac{4}{e^2}$

Znajdziemy zatem $N>1$ tż. $\int_0^{1/N} t^{a-1}(\ln t)^2\,dt<\varepsilon$

oraz $C\int_N^\infty t^b e^{-t}\,dt<\varepsilon$ i tak dalej...

• wzór Eulera na odbicie

$$\Gamma(1-x)\Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Rozważmy funkcję $\varphi(x) = \Gamma(1-x)\Gamma(x)\sin\pi x$.

(1) φ jest klasy $C^\infty((0,1))$, jest też niesk. wiele razy różniczkowalna w $x=0$

tu mamy problem: Γ nie jest określona w 0, więc $\varphi(0)$ też nie jest dobrze określona.

Mamy jednak

$$\varphi(x) = \Gamma(1-x)\frac{\Gamma(1+x)}{x}\sin \pi x = \Gamma(1-x)\Gamma(1+x)\frac{\sin\pi x}{x}$$

Funkcja Γ jest ∞-wiele razy różniczkowalna w 1, podobnie $\frac{\sin\pi x}{x}$ w 0 jest analityczna (wystarczy wypisać szereg na $\sin\pi x$).

(2) φ jest funkcją okresową, z okresem 1:

$$\varphi(x+1) = \Gamma(x+1)\Gamma(-x)\sin(\pi(x+1)) =$$

$$= x\Gamma(x)\Gamma(-x)(-\sin\pi x) =$$

$$= \Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin\pi x = \varphi(x).$$

Możemy więc φ przedłużyć do funkcji klasy C^∞ na całym $\mathbb{R}$.

Mamy też $\varphi(0) = \lim_{x \to 0} \Gamma(1-x)\Gamma(1+x)\frac{\sin \pi x}{\pi x} \cdot \pi$

$$= \pi.$$

(3) Jeszcze potrzebujemy tożsamości:

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)\sin\frac{\pi x}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\pi(x+1)}{2} =$$

$$= \Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{2-x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2} =$$

wzór Legendre'a

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\Gamma(x) \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2^{1-x-1}}\Gamma(1-x) \cdot \frac{1}{2}\sin \pi x$$

$$= \Gamma(x)\Gamma(1-x) \cdot \sin \pi x \cdot \pi = \pi\varphi(x).$$

Niech teraz $g = (\log \varphi)''$. Funkcja g jest również klasy C^∞ (proszę zauważyć, że φ przyjmuje tylko wartości dodatnie!), jest też, jak φ, okresowa, a więc jest ograniczona.

Logarytmując wzór (3) i różniczkując go 2 razy dostajemy

$$\ln\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \ln\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \ln\pi + \ln\varphi(x)$$

$$\frac{1}{2}(\ln\varphi)'\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}(\ln\varphi)'\left(\frac{x+1}{2}\right) = (\ln\varphi)'(x)$$

$$\frac{1}{4}(\ln\varphi)''\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4}(\ln\varphi)''\left(\frac{x+1}{2}\right) = (\ln\varphi)''(x)$$

a więc g spełnia, dla każdego $x \in \mathbb{R}$, tożsamość

$$g(x) = \frac{1}{4}\left(g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right).$$

Niech $M = \sup_{\mathbb{R}} |g| < \infty$. Wtedy

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \quad |g(x)| \leq \frac{1}{4}\left(\left|g\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \left|g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right|\right) \leq \frac{1}{4}\cdot 2M = \frac{M}{2},$$

a więc $M = \sup|g| \leq \frac{M}{2}$. To może mieć miejsce tylko wtedy, gdy $M = 0 \Rightarrow g = 0$.

Wtedy $\ln\varphi(x) = Ax + B$; wiemy jednak, że $\ln\varphi$ jest okresowy $\Rightarrow A = 0$, $\ln\varphi = \text{const} \Rightarrow \varphi = \text{const}$.

Skoro jednak $\varphi(0) = \pi$, to $\varphi \equiv \pi = \text{const}$ na $\mathbb{R}$.

Stąd dostajemy już tezę.

Jeszcze jeden dowód, że $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Wiemy, że $\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}dt \underset{\substack{t=s^2 \\ dt=2s\,ds}}{=} 2\int_0^\infty e^{-s^2}ds$.

Wystarczy więc (jakoś inaczej niż dotychczas) wyznaczyć $\Gamma(1/2)$.

Mamy $\left(\Gamma(1/2)\right)^2 = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2+1/2)} = B(1/2, 1/2) =$

$$= \int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}dt \underset{\substack{t=\sin^2\theta \\ dt=2\sin\theta\cos\theta\, d\theta}}{=} \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{-1}(\cos\theta)^{-1}\cdot \overbrace{2\sin\theta\cos\theta\cdot}^{d\theta}$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} d\theta = \pi,$$ a więc $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

$\square$.

Dalsze wnioski:

Rozwinięcie sinusa w iloczyn nieskończony.

Wiemy, że $\sin \pi x = \dfrac{\pi}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = \dfrac{\pi}{-x\,\Gamma(x)\Gamma(-x)}$.

Wstawiając wzór Weierstrassa dostajemy

$$\sin \pi x = \frac{\pi}{-x \cdot \frac{1}{x} e^{-\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{x/k}}{1+x/k} \cdot \frac{1}{-x} e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-x/k}}{1-x/k}} =$$

$$= \pi x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{k}\right)\left(1-\frac{x}{k}\right) = \pi x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$$

Nawiasy w iloczynie nieskończonym możemy wymnożyć:

$$\pi x \cdot (1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\cdots = \pi x - \pi x^3\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\dots\right)+\dots$$

$$= \pi x + \pi x^3 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \dots = \sin \pi x = \pi x - \frac{(\pi x)^3}{6} + \dots$$

Stąd $\pi \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^3}{6} \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

<u>Zadanie</u>: porównać współczynniki przy x^5 i obliczyć $\zeta(4)$.