Różniczkowanie pod znakiem całki

Twierdzenie: Niech $f : \underset{t}{[a,b]} \times \underset{x}{[c,d]} \to \mathbb{R}$

spełnia następujące warunki:

- dla każdego $x \in [c,d]$ funkcja $t \longmapsto f(t,x)$ jest całkowalna w s. Riemanna na $[a,b]$
- dla każdego $t \in [a,b]$ funkcja $x \longmapsto f(t,x)$ jest różniczkowalna (tj $f(t,x)$ jest, dla wszystkich t, różniczkowalna względem zmiennej x)
- rodzina $\left\{ x \xrightarrow{g_t} \frac{d}{dx} f(t,x) : t \in [a,b] \right\}$ jest jednakowo ciągła, tj $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{t \in [a,b]} \forall_{x,y \in [c,d]} \; |x-y| < \delta \Rightarrow |g_t(x) - g_t(y)| < \varepsilon.$

Wówczas funkcja $F(x) = \int_a^b f(t,x)\,dt$ jest różniczkowalna na $[c,d]$ i zachodzi wzór

$$F'(x) = \int_a^b \frac{d}{dx} f(t,x)\,dt = \int_a^b g_t(x)\,dt.$$

Dowód Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $\delta > 0$ będzie takie, że $\forall_{t \in [a,b]} \forall_{x,y \in [c,d]}$ $|x-y| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |g_t(x) - g_t(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Oznaczmy teraz $G(x) = \int_a^b \frac{d}{dx} f(t,x)\,dt$.

Wówczas
$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x)\right| = \left|\int_a^b \frac{f(t,x+h)-f(t,x)}{h}\,dt - \right.$$
$$\left. - \int_a^b \frac{d}{dx} f(t,x)\,dt\right| \leq \int_a^b \left|\frac{f(t,x+h)-f(t,x)}{h} - g_t(x)\right| dt = (*)$$

Z tw. Lagrange'a istnieje ξ między x a $x+h$ takie, że $\frac{f(t,x+h)-f(t,x)}{h} = \frac{d}{dx} f(t,\xi) = g_t(\xi)$, więc funkcja podcałkowa ma postać $|g_t(\xi) - g_t(x)|$ (oczywiście ξ zależy od x, t, h itd). Jeżeli jednak $|h| < \delta$, to również $|\xi - x| < \delta \Rightarrow |g_t(\xi) - g_t(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Stąd $(*)$ $\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$,

o ile $|h| < \delta$, co dowodzi, że $\underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}}_{= F'(x)} = G(x)$.

$\square$.

Przykład zastosowania

Obliczymy $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Oczywiście funkcja $\frac{\sin x}{x}$ jest parzysta, więc

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

Wprowadźmy nowe całki, zależne od parametru:

$$I(x) = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx}\,dt \quad , \quad I_N(x) = \int\limits_{0}^{N} \frac{\sin t}{t} e^{-tx}\,dt.$$

Oczywiście $I_N(x) \xrightarrow{N\to\infty} I(x)$ oraz $I(0) = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

Obliczmy $I_N'(x)$:

$$I_N'(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_{0}^{N} \frac{\sin t}{t} e^{-tx}\,dt = \int\limits_{0}^{N} \frac{\sin t}{t}\cdot\frac{d}{dx}\left(e^{-tx}\right)dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{N} \frac{\sin t}{t}\cdot\left(-te^{-tx}\right)dt = -\int\limits_{0}^{N} \sin t\cdot e^{-tx}\,dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{N} (\cos t)'\cdot e^{-tx}\,dt = \cos t\cdot e^{-tx}\Big|_{t=0}^{N} + x\int\limits_{0}^{N} \cos t\, e^{-tx}\,dt =$$

$$= \cos N\cdot e^{-Nx} - 1 + x\int\limits_{0}^{N} (\sin t)' e^{-tx}\,dt =$$

$$= \cos N\cdot e^{-Nx} - 1 + x\sin t\, e^{-tx}\Big|_{t=0}^{N} + x^2\int\limits_{0}^{N} \sin t\, e^{-tx}\,dt$$

$$= (\cos N + x\sin N)e^{-Nx} - 1 + x^2 \int_0^N \sin t\, e^{-tx}\,dt.$$

Stąd $\displaystyle (1+x^2)\int_0^N \sin t\, e^{-tx}\,dt = 1 - (\cos N + x\sin N)e^{-Nx},$

czyli $\displaystyle I_N'(x) = -\int_0^N \sin t\, e^{-tx}\,dt = -\frac{1}{1+x^2} + \cancel{\cos N + x\sin N}$

$$+ \frac{\cos N + x\sin N}{1+x^2} e^{-Nx}.$$

Zauważmy jeszcze, że $\cancel{I_N(1)}$

$$\left| I_N'(x) + \frac{1}{1+x^2} \right| \leq \frac{1+x}{1+x^2} e^{-Nx} \leq \frac{2}{e^{-Nb}} \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

dla $x \in [0,b]$,

więc I_N' dąży niemal jednostajnie

na $[0,\infty)$ do $\frac{1}{1+x^2}$. (przy $N\to\infty$).

Stąd $\displaystyle I'(x) = \left(\lim_{N\to\infty} I_N(x)\right)' =$

$$= \lim_{N\to\infty} I_N'(x) = -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{dla } x\in[0,\infty),$$

a więc $I(x) = -\operatorname{arctg} x + C$ dla pewnej

stałej C.

Łatwo też możemy sprawdzić, że

$$\lim_{x\to\infty} I(x) = 0, \text{ gdyż}$$

$$|I(x)| = \left|\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-tx}\, dt\right| \le \int_0^\infty e^{-tx} dt = -\frac{1}{xe^{tx}}\Big|_{t=0}^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

Stąd $C = I(x) + \operatorname{arctg} x = \lim_{x\to\infty}\left(I(x) + \operatorname{arctg} x\right) =$

$= 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, czyli $I(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$

dla wszystkich $x \in [0,\infty)$.

W szczególności $I(0) = \frac{\pi}{2}$, więc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi.$$

Inny przykład: <u>całka Poissona</u>

Chcemy wyznaczyć $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 2A$

Niech $F(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2} dx\right)^2$, wtedy $A = \sqrt{\lim_{t\to\infty} F(t)}$.

$$F'(t) = 2 \cdot \int_0^t e^{-x^2} dx \cdot e^{-t^2} = 2e^{-t^2} \int_0^t e^{-x^2} dx \underset{x=ty}{=}$$

$$= 2e^{-t^2} \int_0^1 t e^{-t^2 y^2} dy = \int_0^1 2t e^{-(1+y^2)t^2} dy =$$

$$= -\int_0^1 \frac{d}{dt} \frac{e^{-(1+y^2)t^2}}{1+y^2} dy = -\frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{e^{-(1+y^2)t^2}}{1+y^2} dy$$

pochodna po zmiennej t, y traktujemy jako stałą

Stąd $F(t) = -\int_0^1 \frac{e^{-(1+y^2)t^2}}{1+y^2} dy + C$ dla pewnej stałej C.

Biorąc $t = 0$ dostajemy $0 = F(0) = -\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} + C$

$= -\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 0 + C \Rightarrow C = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Stąd $F(t) = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{e^{-(1+y^2)t^2}}{1+y^2} dy$.

Dalej, $\dfrac{e^{-(1+y^2)t^2}}{1+y^2} = \dfrac{1}{(1+y^2)e^{(1+y^2)t^2}} \leq \dfrac{1}{(1+y^2)^2 t^2}$, więc

$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-(1+y^2)t^2}}{(1+y^2)}\,dy \leq \frac{1}{t^2}\int_0^1 \frac{dy}{(1+y^2)^2} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0,$$

więc $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = \dfrac{\pi}{4}$, zatem $2A = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx =$

$$= \cancel{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\cancel{2}} = \sqrt{\pi}.$$