Długość krzywych

Def: Krzywą w $\mathbb{R}^n$ nazywamy $f([a,b])$, gdzie f jest ciągłym przekształceniem $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$.

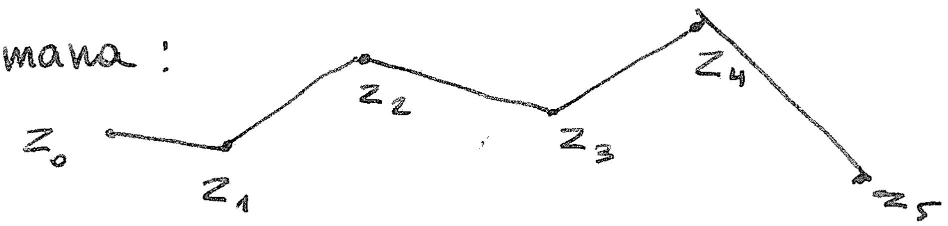
f nazywamy parametryzacją krzywej – oczywiście jest ona niejednoznaczna

Przykłady: • Okrąg w $\mathbb{R}^2$:

$f:[0,1]\to\mathbb{R}^2$, $f(t)=(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

• wykres funkcji ciągłej: $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ciągła, to $f(t)=(t,g(t))\in\mathbb{R}^2$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}^2$.

• Łamana:



nietrudno napisać parametryzację takiej krzywej.

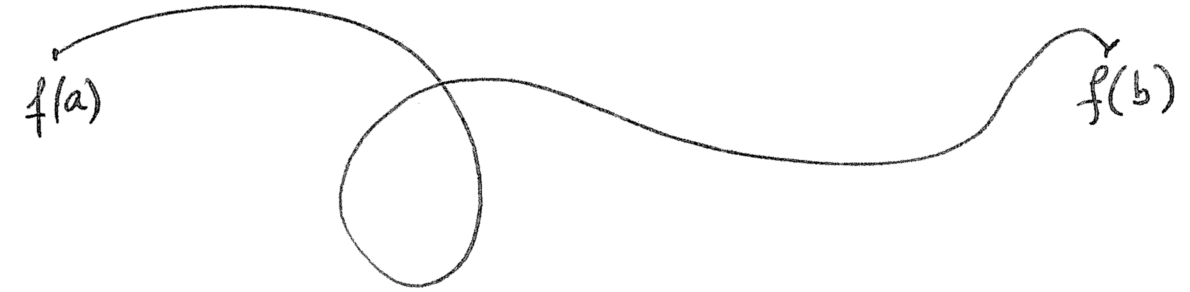
Jak obliczyć długość krzywej?

Umiemy to zrobić dla łamanych: jeżeli γ jest łamaną o wierzchołkach $\{z_0,\dots,z_m\}$, to

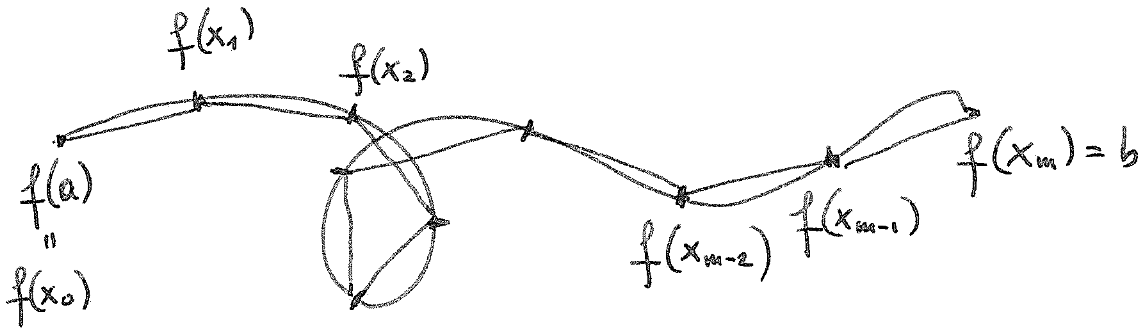
$$l(\gamma)=\sum_{i=1}^{m}\|z_i-z_{i-1}\|$$

A dla innych krzywych?

γ :



Wpisujemy w γ łamaną :



Długość tej łamanej przybliża to, co rozumiemy jako długość γ. Jest też jasne, że

- długość takiej łamanej jest nie większa niż (jakkolwiek sensownie zdefiniowana) długość krzywej γ
- z łamaną związany jest podział $\nu = \{x_0, \dots, x_m\}$ odcinka $[a, b]$ — łamaną możemy utożsamiać z podziałem $\nu \longleftrightarrow l_\nu$
- jeżeli podział μ jest zagęszczeniem podziału ν, to odpowiadająca mu łamana l_μ ma długość nie mniejszą niż łamana l_ν (wynika to od razu z nier. trójkąta).

• Im mniejszą średnicę ma podział ν, tym lepiej długość l_ν przybliża to, co chcielibyśmy nazwać długością krzywej γ.

<u>Def</u>: Długością krzywej γ, zadanej parametryzacją $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, nazywamy supremum długości łamanych wpisanych w γ, a więc

$$l(\gamma) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{m} \|f(x_i)-f(x_{i-1})\| \ : \ \nu=\{x_1,\dots,x_m\} \text{ jest podziałem odcinka } [a,b] \right\}$$

Jeżeli $f(t) = (f_1(t),\dots,f_m(t))$, to

$$\sum_{i=1}^{m} \|f(x_i)-f(x_{i-1})\| = \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (f_j(x_i)-f_j(x_{i-1}))^2}$$

Krzywe, dla których tak zdefiniowana długość jest skończona, nazywamy <u>krzywymi prostowalnymi</u>.

Przykłady krzywych, które nie są prostowalne:

Niels Fabian Helge von Koch
(1870–1924) matematyk szwedzki

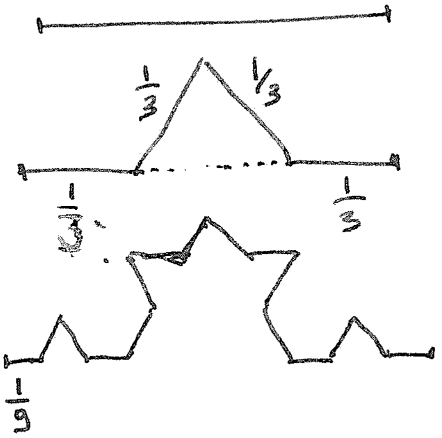
• krzywa Kocha:

jest to granica jednostajnie zbieżnego ciągu przekształceń $f_k : [0,1] \to R^2$ (dalej oznaczam i parametryzację, i krzywą tak samo)

f_0:

f_1:

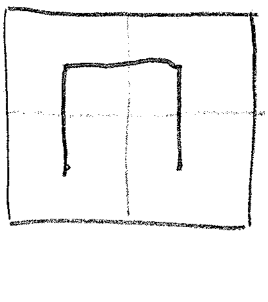
f_2:

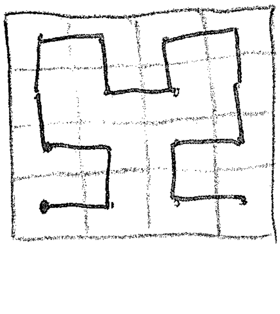


itd.

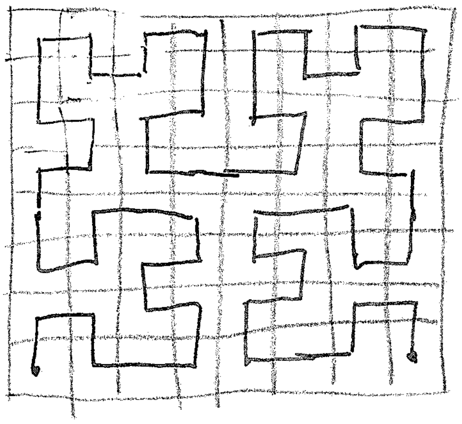
Proszę sprawdzić, że ciąg funkcji f_k jest rzeczywiście jednostajnie zbieżny, więc w granicy dostajemy f_∞ ciągłą, $f_\infty : [0,1] \to R^2$.
Każda z kolejnych łamanych f_k jest wpisana w krzywą f_∞, więc szacuje z dołu długość f_∞; nietrudno jednak zauważyć, że $l(f_k) = \frac{4^k}{3^k} \to +\infty$.

• krzywa Peano (wersja Hilberta)
znów jest jednostajną granicą przekształceń

f_0: 

f_1 

f_3



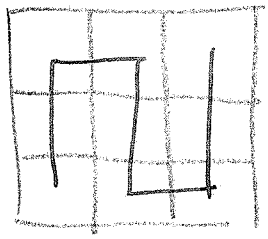
itd.

Zadanie:

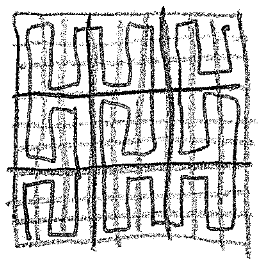
1. Uzasadnić, że $f_k \rightrightarrows f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$
2. Wykazać, że $f([0,1]) = [0,1]^2$.

- oryginalna postać krzywej Peano

f_0

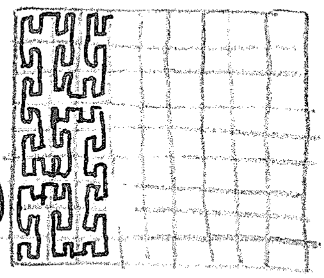


f_1



i tak dalej

f_2 (kawałek)



Załóżmy teraz, że krzywa γ jest dana parametryzacją $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $f=(f_1,\dots,f_n)$, f_i jest różniczkowalna dla $i=1,\dots,n$ i f_i' jest całkowalna w sensie Riemanna dla $i=1,2,\dots,n$.

Na początek szczególny przypadek: γ jest wykresem funkcji różniczkowalnej $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ i g' jest całkowalna w s. Riemanna na $[a,b]$.

$f(t) = (t, g(t))$.

Wtedy, jeżeli $\nu = \{x_0,\dots,x_m\}$ jest podziałem $[a,b]$, to $\ell(\ell_\nu) =$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (g(x_i)-g(x_{i-1}))^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sqrt{1 + \left(\frac{g(x_i)-g(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}\,(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sqrt{1+(g'(\xi_i))^2}\,(x_i - x_{i-1}) = S\left(\sqrt{1+(g')^2}, \nu, \xi\right)$$

dla pewnych $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$

Gdy średnica podziału ν dąży do 0, tak uzyskane sumy całkowe dążą do całki

$$\int_a^b \sqrt{1+(g'(t))^2}\,dt$$

(z tw. charakteryzującego od razu widzimy, że $\sqrt{1+(g')^2}$ jest całk. w sensie Riemanna).

Łatwo też widzimy, że supremum długości łamanych l_ν nie może być od tej całki większe. Załóżmy bowiem, że dla pewnego podziału μ $\quad l(l_\mu) > \int_a^b \sqrt{1+(g'(t))^2}\,dt$. i niech (ν_k) będzie ciągiem podziałów, których średnice dążą do zera. Wtedy

$$\int_a^b \sqrt{1+(g'(t))^2}\,dt \longleftarrow l(l_{\mu\cup\nu_k}) \geq l(l_\mu) > \int_a^b \sqrt{1+g'(t)^2}\,dt$$

bo ciąg $\mu\cup\nu_k$ ma średnice dążące do zera.

i mamy sprzeczność

Stąd długość wykresu funkcji $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ różniczkowalnej i takiej, że f' jest całkowalna w sensie Riemanna, dana jest wzorem

$$\int_a^b \sqrt{1+(g'(t))^2}\,dt.$$

Twierdzenie: Niech krzywa γ będzie dana przez parametryzację $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Załóżmy też, że γ jest różniczkowalna na $[a,b]$ i że γ_i' jest, dla $i = 1,2,\dots,n$, całkowalna w sensie Riemanna. Wówczas długość γ dana jest wzorem $l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt =$

$$= \int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2}\, dt \qquad (\star)$$

Dowód:

Rozważmy podział $P = \{x_0, \dots, x_m\}$ odcinka $[a,b]$ i związaną z nim łamaną l_P o wierzchołkach $\{\gamma(x_0), \gamma(x_1), \dots, \gamma(x_m)\}$. Mamy

$$l(l_P) = \sum_{i=1}^m \|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\| = \sum_{i=1}^m \sqrt{\sum_{j=1}^n (\gamma_j(x_i) - \gamma_j(x_{i-1}))^2}.$$

Wiemy, z tw. Lagrange'a, że $\forall_{\substack{i \in \{1,\dots,m\} \\ j \in \{1,\dots,n\}}} \exists_{\xi_{ij} \in (x_{i-1}, x_i)}$ t.ż. $\gamma_j(x_i) - \gamma_j(x_{i-1}) = \gamma_j'(\xi_{ij}) \cdot (x_i - x_{i-1})$, a więc

$$l(l_P) = \sum_{i=1}^m \sqrt{\sum_{j=1}^n (\gamma_j'(\xi_{ij}))^2} \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Ta wielkość jest podobna do sumy całkowej dla całki $(\star)$, związanej z podziałem P, ale jest jedna różnica: argumentem każdej z funkcji γ_j' jest inny punkt pośredni ξ_{ij}, podczas gdy suma całkowa związana z jakimś konkretnym punktowaniem $\zeta = \{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$, $\zeta_j \in [x_{j-1}, x_j]$, miałaby postać

$$\sum_{i=1}^{m} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\gamma_j'(\zeta_i))^2}\,(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{m} \|\gamma'(\zeta_i)\| \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Ustalmy jakiekolwiek punktowanie $\zeta = \{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$ podziału ν i oszacujmy różnicę $|l(l_\nu) - S(\|\gamma'\|, \nu, \zeta)|$.

$$|l(l_\nu) - S(\|\gamma'\|, \nu, \zeta)| \le \sum_{i=1}^{m} \left| \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\gamma_j'(\xi_{ij}))^2} - \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\gamma_j'(\zeta_j))^2} \right) \right| \cdot (x_i - x_{i-1}) =$$

$$\le \sum_{i=1}^{m} \frac{\sum_{j=1}^{n} \left|(\gamma_j'(\xi_{ij}) - \gamma_j'(\zeta_i))\right| \left(|\gamma_j'(\xi_{ij})| + |\gamma_j'(\zeta_j)|\right)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\gamma_j'(\xi_{ij}))^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\gamma_j'(\zeta_j))^2}} (x_i - x_{i-1})$$

$|\gamma_j'(\xi_{ij})|$: bo

$$\le \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} (x_i - x_{i-1}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \omega_{ij} (x_i - x_{i-1}),$$

gdzie ω_{ij} to oscylacja γ_j' na $[x_{i-1}, x_i]$. Wiemy, że dla $j = 1, \dots, n$ γ_j' jest całkowalna w sensie Riemanna, a więc istnieje $\delta > 0$ t.ż. dla każdego podziału ν o średnicy $\delta(\nu) < \delta$ mamy $\sum_{i=1}^{m} \omega_{ij}(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{n}$

Wtedy, o ile $\delta(\nu) < \delta$, $|l(l_\nu) - S(\|\gamma'\|, \nu, \zeta)| < \varepsilon$.

Wiemy też, że, o ile ν ma dost. małą średnicę, $S(\|\gamma'\|, \nu, \zeta)$ jest oddalone od $\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt$ o mniej niż ε_0. Stąd ostatecznie wynika, że, o ile tylko podział ν jest dostatecznie drobny ($\delta(\nu) < \delta'$),

to $\left| \ell(l_\nu) - \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \right| < 2\varepsilon$. $\boxdot$

To oznacza, że $\ell(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_\nu \ell(l_\nu) \geq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$.

Gdyby było $\ell(\gamma) > \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$, to znaleźlibyśmy podział μ tż. $\ell(l_\mu) > \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$. Niech teraz (μ_k) będzie dowolnym ciągiem podziałów $[a,b]$ tż. $\delta(\mu_k) \to 0$ i niech $2\varepsilon < \ell(l_\mu) - \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$.

Podziały $\mu \cup \mu_k$ są zagęszczeniami μ, więc

$$\ell(l_{\mu \cup \mu_k}) \geq \ell(l_\mu) \overset{\boxtimes}{>} \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt + 2\varepsilon ;$$

biorąc jednak k duże możemy oczywiście zapewnić $\delta(\mu \cup \mu_k) \leq \delta(\mu_k) < \delta'$ i nierówność $\boxtimes$ jest w sprzeczności z nierównością $\boxdot$ powyżej. $\square$