Twierdzenie Arzeli-Ascoliego.

Przypomnijmy, że jeżeli $A \subset \mathbb{R}$ $(\mathbb{C}, \mathbb{R}^n)$ jest zwarty, to dla $f \in C(A)$ ← funkcje ciągłe na A, o wartościach w $\mathbb{R}$ lub w $\mathbb{C}$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} \{|f(x)| : x \in A\}$$

jest dobrą normą na p-ni liniowej $C(A)$:

- dla każdego $f \in C(A)$ $\|f\|_\infty \in [0, \infty)$,
- $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \, \|f\|_\infty$ dla dow. $\lambda \in \mathbb{C}$
- $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ (nier. Minkowskiego)

(bo $\forall_{x \in A}$ $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$,

więc $\sup_{x \in A} |f(x)+g(x)| \leq \sup_{x \in A} (|f(x)| + |g(x)|) \leq$

$\leq \sup_{x \in A} |f(x)| + \sup_{x \in A} |g(x)|$.)

- $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ na A.

Stąd na $C(A)$ możemy wprowadzić funkcję odległości (metrykę)

$$d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty,$$

która spełnia wszystkie naturalne życzenia wzgl. metryki:

- jest nieujemna i symetryczna $(d_\infty(f,g) = d(g,f))$
- $d(f,g) = 0 \Leftrightarrow f = g$
- $d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$ $\quad \forall_{h \in C(A)}$. nier. Δ.

Mając funkcję odległości możemy mówić o ciągach zbieżnych w $C(A)$, nietrudno sprawdzić, że f_n zbiega do f w sensie d_∞ (czyli $d_\infty(f_n, f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$) $\iff f_n \rightrightarrows f$ na A.

Mając pojęcie zbieżności możemy mówić o zwartych podzbiorach $C(A)$:

Rodzina $\mathcal{F} \subset C(A)$ funkcji ciągłych na A jest zwarta, jeżeli z każdego ciągu (f_n) elementów $\mathcal{F}$ możemy wybrać podciąg zbieżny do $f \in \mathcal{F}$ w sensie d_∞, a więc zbieżny jednostajnie do f.

Jakie podzbiory $C(A)$ są zwarte?

Przypomnijmy tw. Heine-Borela: $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.

Łatwo można sprawdzić, że te dwa warunki są konieczne również w $C(A)$, trzeba je tylko dobrze zinterpretować.

1. Rodzina $\mathcal{F}$ musi być ~~wspólnie~~ ograniczona w normie $\|\cdot\|_\infty$: istnieje $M>0$ tż $\forall_{f\in\mathcal{F}}\ \|f\|_\infty < M$

Mówimy wówczas, że rodzina $\mathcal{F}$ jest wspólnie ograniczona (żeby nie myliło nam się z ograniczonością funkcji $f \in \mathcal{F}$ – tę mamy zagwarantowaną, bo f ciągła, A zwarty).

Dlaczego ten warunek jest konieczny do zwartości? Załóżmy, że $\mathcal{F}$ nie jest wspólnie ograniczona. Możemy wówczas wybrać z $\mathcal{F}$ podciąg nieograniczony, np. $f_n \in \mathcal{F}$, $n=1,2,\dots$, takie, że $\forall_n\ \|f_n\|_\infty > n$. Wówczas każdy podciąg ciągu (f_n) ma tę samą własność: $\|f_{n_k}\| \to +\infty$, podczas gdy ciąg jednost. zbieżny jest zawsze ~~ograni~~ (wspólnie) ograniczony:

$\exists_{n_0}\ \forall_{n>n_0}\ \|f_{n_k} - f\|_\infty < 1$, więc

$$\|f_{n_k}\|_\infty \le \max\left(\|f_1\|_\infty, \dots, \|f_{n_0}\|_\infty, \|f\|_\infty + 1\right).$$

(innymi słowy, jeżeli $\|f_n\|_\infty \longrightarrow +\infty$, to z (f_n) nie da się wybrać podciągu jednost. zbieżnego).

2. Rodzina $\mathcal{F}$ musi być domknięta w $C(A)$ (wzgl. odległości ~~...~~ d_∞), czyli

równoważnie: jeżeli $f_n \in \mathcal{F}$ dla $n = 1, 2, \dots$

oraz $f_n \underset{\text{na } A}{\rightrightarrows} f$, to również $f \in \mathcal{F}$.

Gdyby bowiem $\mathcal{F}$ zawierała pewien ciąg funkcji (f_n) zbieżny w $C(A)$, ale nie zawierała jego granicy f, to z ciągu (f_n) nie dałoby się wybrać żadnego podciągu (f_{n_k}) zbieżnego do elementu $\mathcal{F}$, gdyż wszystkie podciągi ciągu (f_n) dążą do $f \notin \mathcal{F}$.

Czy zatem każdy domknięty i (wspólnie) ograniczony podzbiór ~~$\mathcal{F}$~~ $C(A)$ jest zwarty?

Niech $\mathcal{F} = \{x \longmapsto x^k : k \in \mathbb{N}\} \subset C([0,1])$

Oczywiście $\mathcal{F}$ jest wspólnie ograniczona (przez 1)

<u>Zadanko</u>: $\mathcal{F}$ jest domknięta

~~Oczywiście też~~ Z ciągu $f_n = x^n$ funkcji ciągłych na $[0,1]$ nie da się wybrać podciągu zbieżnego jednostajnie do czegokolwiek (dlaczego?)

Twierdzenie Arzeli-Ascoliego

Niech $\mathcal{F} \subset C(A)$ będzie rodziną funkcji ciągłych na A, gdzie $A \subset \mathbb{R}$ jest zwarty. Wówczas rodzina $\mathcal{F}$ jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest

a) domknięta

b) ~~__~~ wspólnie ograniczona

c) jednakowo ciągła (równociągła):

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x,y\in A} \forall_{f\in\mathcal{F}} \quad |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Wiemy już, że warunki a) i b) są warunkami koniecznymi. Wykażemy teraz konieczność warunku c).

Załóżmy mianowicie, że $\mathcal{F}$ nie jest równociągła, choć jest zwarta.

$$\exists_{\varepsilon>0} \forall_{\delta>0} \exists_{x,y\in A} \exists_{f\in\mathcal{F}} \quad |x-y|<\delta \wedge |f(x)-f(y)|\geq\varepsilon$$

Przyjmując $\delta=\frac{1}{n}$ znajdujemy ciągi punktów $(x_n),(y_n)$ z A oraz funkcji $f_n\in\mathcal{F}$ takie, że $|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$, $|f_n(x_n)-f_n(y_n)|\geq\varepsilon$. Możemy teraz, ze zwartości A i $\mathcal{F}$, wybrać podciągi (x_{n_k}) ~~tż~~ i (f_{n_k}) tż $x_{n_k}\to x_0$, $f_{n_k}\rightrightarrows f\in\mathcal{F}$. Oczywiście $|x_{n_k}-y_{n_k}|<\frac{1}{n_k}$, więc również $y_{n_k}\to x_0$

Mamy wtedy jednak

$$\varepsilon \leq |f_{n_k}(x_{n_k}) - f_{n_k}(y_{n_k})| \leq$$

$$\leq |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| + |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| +$$

$$+ |f(y_{n_k}) - f_{n_k}(y_{n_k})| .$$

Pierwszy i trzeci składnik sumy dąży przy $k \to \infty$ do zera z jednostajnej zbieżności $f_{n_k} \rightrightarrows f$, środkowy z ciągłości f i tego, że $x_{n_k} \to x_0 \leftarrow y_{n_k}$.

To daje poszukiwaną sprzeczność. $\square$.

Zostało nam do dowodu pół twierdzenia Arzeli - Ascoliego:

<u>Tw.</u> Jeżeli rodzina $\mathcal{A} \subset C(A)$ jest domknięta, wspólnie ograniczona i równociągła, zaś A jest zwarty, to $\mathcal{A}$ jest zwarta w metryce jednostajnej

$$d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty = \sup_A |f-g| .$$

<u>Def.</u> Niech $\varepsilon > 0$. Podzbiór $S \subset A$ nazywamy ε-siecią w A jeżeli $\forall_{x\in A} \exists_{y\in S} \; |x-y| < \varepsilon$.

<u>Tw.</u> Jeżeli A jest zwarty, to $\forall_{\varepsilon>0}$ w A istnieje skończona ε-sieć.

<u>Dowód</u> Załóżmy przeciwnie: istnieje $\varepsilon > 0$ t.ż. w A nie ma skończonej ε-sieci. Konstruujemy następujący ciąg: $x_1 \in A$ jest dowolne. $\{x_1\}$ nie jest ε-siecią w $A \Rightarrow$ istnieje $x_2 \in A$ t.ż. $|x_1 - x_2| \geq \varepsilon$. $\{x_1, x_2\}$ nie jest ε-siecią w A, więc istnieje $x_3 \in A$ t.ż. $|x_1 - x_3| \geq \varepsilon$, $|x_2 - x_3| \geq \varepsilon$ itd, dostajemy ciąg (x_i), którego dowolne 2 elementy są od siebie oddalone o co najmniej ε.
Tę samą własność mają wszystkie podciągi (x_i), więc żaden nie spełnia warunku Cauchy'ego.

Tak więc z (x_i) nie można wybrać podciągu zbieżnego. $\square$

<u>Zadanie</u>: Ustalić, które podzbiory $A \subset \mathbb{R}^n$ mają tę własność, że $\forall_{\varepsilon>0}$ zawierają skończoną ε-sieć.

<u>Dowód twierdzenia 1/2-Arzeli-Ascoliego</u>

Niech dla $n=1,2,\ldots$ S_n będzie skończoną $1/n$-siecią w A. Ustawmy elementy $S_1, S_2, \ldots$ w ciąg – najpierw $(x_1, \ldots, x_{\tilde{k}_1})$ są elementy S_1, potem $(x_{\tilde{k}_1+1}, \ldots, x_{\tilde{k}_2})$ elementy S_2 itd.

Ciąg (x_k) ma tę miłą własność, że dla każdego $\delta > 0$ istnieje $k_\delta \in \mathbb{N}$ tż $\{x_1, \ldots, x_{k_\delta}\}$ jest skończoną δ-siecią w A.

Niech teraz (f_k) będzie ciągiem funkcji z rodziny $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ jest wspólnie ograniczona i równociągła, więc

$\exists_{M>0} \forall_{x\in A} \forall_{k\in\mathbb{N}} \quad |f_k(x)| \le M$

$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x,y\in A} \forall_{k} |x-y| < \delta \Rightarrow |f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon.$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy doń δ.

Przyjrzyjmy się $(f_k(x_1))_{k\in\mathbb{N}}$. To ciąg (liczbowy) ograniczony (zawarty w $[-M,M]$), można więc wybrać zeń podciąg $(f_{k,1}(x_1))_{k\in\mathbb{N}}$ zbieżny.

Teraz przyglądamy się $(f_{k,1}(x_2))_k$. To znów jest ciąg ograniczony, możemy więc zeń wybrać podciąg $(f_{k,2}(x_2))_k$ zbieżny. I tak dalej...

Mamy tabelę wypełnioną elementami ciągu f_k:

$$\begin{array}{cccc} f_{1,1} & f_{2,1} & f_{3,1} & \cdots \\ f_{1,2} & f_{2,2} & f_{3,2} & \cdots \\ f_{1,3} & f_{2,3} & f_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

$(k+1)$ wiersz jest podciągiem k-tego dla $k=1,2,\ldots$

k-ty wiersz jest zbieżny w $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Zbadajmy ciąg $(f_{k,k})_{k\in\mathbb{N}}$. Dla każdego $n\in\mathbb{N}$ ciąg $(f_{k,k})$ pokrywa się, dla $k\geq n$, z pewnym podciągiem n-tego wiersza – a więc $(f_{k,k})$ jest zbieżny w $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Z dowolności $n\in\mathbb{N}$ $(f_{k,k})$ jest zbieżny we wszystkich $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Niech teraz $\{x_1, \ldots, x_{k_0}\}$ będzie δ-siecią w A.

Wiemy już, że $(f_{k,k})$ jest zbieżny w $x_1, \ldots, x_{k_0}$, więc spełnia warunek Cauchy'ego:

$$\forall_{j \in \{1,2,\ldots,k_0\}} \exists_{m_j} \forall_{k,l > m_j} \quad |f_{k,k}(x_j) - f_{l,l}(x_j)| < \varepsilon.$$

Biorąc $m_0 = \max\limits_{j=1,\ldots,k_0} m_j$ mamy

$$\forall_{k,l > m_0} \ \forall_{j \in \{1,\ldots,k_0\}} \ |f_{k,k}(x_j) - f_{l,l}(x_j)| < \varepsilon.$$

Teraz

$$\|f_{k,k} - f_{l,l}\|_\infty = \sup_A |f_{k,k} - f_{l,l}| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{istnieje } y_0, \\ \text{bo } A \text{ zwarty}}}{=} |f_{k,k}(y_0) - f_{l,l}(y_0)|$$

$$\le |f_{k,k}(y_0) - f_{k,k}(x_j)| + |f_{k,k}(x_j) - f_{l,l}(x_j)| +$$

istnieje $x_j \in \{x_1, \ldots, x_{k_0}\}$ t. że $|x_j - y| < \delta$

$$+ |f_{l,l}(x_j) - f_{l,l}(y_0)|$$

Pierwszy i trzeci wyraz są $< \varepsilon$, bo $|x_j - y_0| < \delta$, a δ jest dobrana do $\varepsilon > 0$ z def. równociągłości. Środkowy wyraz jest $< \varepsilon$, o ile $k, l > m_0$. Stąd, jeżeli tylko $k, l > m_0$, to $\|f_{k,k} - f_{l,l}\|_\infty < 3\varepsilon$ $\leftarrow$ jednostajny war. Cauchy'ego.

Wiemy już zatem, że $(f_{k,k})$ jest jednostajnie zbieżny do jakiejś funkcji $f \in C(A)$. Czy $f \in \mathcal{A}$?
Tak, bo $\mathcal{A}$ jest domknięta. $\square$

<u>Zadania:</u>

Czy następujące rodziny funkcji ciągłych na $[0,1]$ są a) domknięte b) wspólnie ograniczone c) równociągłe ?

- funkcje stałe
- wielomiany stopnia ≤ 2018
- funkcje lipszycowskie, o stałej Lipschitza ≤ 2018
- funkcje klasy $C^1([0,1])$ (w końcach bierzemy pochodne jednostronne)
- funkcje postaci $\{A\sin x + B\cos x : A^2 + B^2 \leq 2018^2\}$.

Zbiory miary zero, tw. Lebesgue'a

Def: Długość odcinka $I \subset \mathbb{R}$ o końcach a, b, $a < b$, to $|I| := b - a$.

(w tym wykładzie interesują nas tylko odcinki dodatniej długości).

Def: Mówimy, że $A \subset \mathbb{R}$ jest miary zero, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje przeliczalna (być może skończona) rodzina odcinków $\{I_k\}$ taka, że

$$A \subset \bigcup_k I_k \quad i \quad \sum_k |I_k| < \varepsilon$$

(czyli zbiór A można pokryć odcinkami, których suma długości jest dowolnie mała).

Proste obserwacje:

- zbiory przeliczalne są miary zero,
- podzbiór zbioru miary zero jest miary zero,
- suma przeliczalnie wielu zbiorów miary zero jest miary zero,
- zbiór Cantora jest miary zero (a więc istnieją nieprzeliczalne zbiory miary zero).

Def: Miara zewnętrzna (Lebesgue'a) zbioru $E \subset \mathbb{R}$ to $\mu^*(E) = \inf\{\sum |I_k| : I_k$ to odcinki, $E \subset \bigcup I_k\}$. Oczywiście E jest miary zero $\iff \mu^*(E) = 0$.

Proste zadanka:

- $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (monotoniczność)
- $\mu^*([a,b]) = b-a = |[a,b]|$
- Jeżeli B jest miary zero, to $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A)$
- ogólniej, $\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$

Naszym celem jest dowód następującego twierdzenia, pochodzącego od Henri Léona Lebesgue (1875-1941)

<u>Twierdzenie</u>: Zbiór punktów nieróżniczkowalności funkcji monotonicznej $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest miary zero.

Wiemy zatem, że funkcja monotoniczna jest ciągła poza zbiorem (co najwyżej) przeliczalnym i różniczkowalna poza zbiorem miary zero.

tu możemy dać dowolny przedział otwarty

<u>Wniosek</u>: Jeżeli $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest wypukła, to f jest ciągła, różniczkowalna poza zbiorem przeliczalnym i dwukrotnie różniczkowalna poza zbiorem miary zero.

Potrzebne nam będzie ważne narzędzie, które zawdzięczamy Giuseppe Vitaliemu (1875-1932), uczniowi m.in. Diniego i Arzeli.

<u>Def</u>: Pokryciem Vitaliego zbioru $E \subset \mathbb{R}$ nazywamy taką rodzinę $\mathcal{J}$ odcinków o dodatniej długości, że

- $\mathcal{J}$ jest pokryciem E, tzn $E \subset \bigcup_{I \in \mathcal{J}} I$
- dla każdego $x \in E$ w rodzinie $\mathcal{J}$ istnieją dowolnie

krótkie odcinki zawierające x, tzn.

$$\forall_{x \in E} \inf \{ |I| : I \in \mathcal{J}, x \in I \} = 0$$

(warunek Vitaliego).

<u>Lemat pokryciowy Vitaliego</u> (jeden z kilku)

Niech $E \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem ograniczonym i $\mathcal{J}$ niech będzie pokryciem Vitaliego zbioru E. Istnieje wówczas ciąg $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ elementów $\mathcal{J}$ taki, że

- I_i, I_j są rozłączne dla $i \neq j$
- $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \infty$
- $E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ jest miary zero.

(a więc z pokrycia Vitaliego można wybrać przeliczalne „prawie-pokrycie" odcinkami rozłącznymi).

<u>Dowód Lematu Vitaliego</u>

Zaczniemy od uproszczenia rodziny $\mathcal{J}$, poprzez pozbycie się z niej części odcinków.

- wyrzucamy z $\mathcal{J}$ wszystkie odcinki długości większej niż 1.

Warunek Vitaliego gwarantuje, że

$\mathcal{J}' = \{ I \in \mathcal{J} : |I| \leq 1 \}$ jest nadal pokryciem

Vitaliego zbiom E.

- zbiór E jest ograniczony — istnieje $M>0$ t. że $E \subset [-M, M]$. Niech $\mathcal{U} = (-M-2, M+2)$.

  Możemy z $\mathcal{J}'$ wyrzucić wszystkie odcinki niezawarte w $\mathcal{U}$ (bo jeżeli $I \not\subset \mathcal{U}$ i $|I| \leq 1$, to $I \cap E = \emptyset$). Zostaje nam podrodzina $\mathcal{J}'' \subset \mathcal{J}$.

- na koniec, możemy założyć, że wszystkie odcinki w $\mathcal{J}''$ są domknięte. Jeżeli bowiem umiemy udowodnić tezę ~~lematu~~ dla $\tilde{\mathcal{J}} = \{\overline{I} : I \in \mathcal{J}''\}$, a więc znaleźć ciąg (I_k) elementów $\mathcal{J}''$ takich, że $\overline{I}_k$ są parami rozłączne, $\sum_k |\overline{I}_k| < \infty$ i $E \setminus \bigcup_k \overline{I}_k$ jest miary zero, to również I_k są parami rozłączne, $\sum_k |I_k| = \sum_k |\overline{I}_k| < \infty$,

$$\underbrace{E \setminus \bigcup_k I_k}_{\text{stąd to też jest miary zero.}} = \Big(\underbrace{E \setminus \bigcup_k \overline{I}_k}_{\text{zbiór miary zero}}\Big) \cup \underbrace{\begin{pmatrix}\text{pewne końce} \\ \text{odcinków } I_k\end{pmatrix}}_{\text{zbiór przeliczalny, więc miary zero}}$$

Teraz konstruujemy ciąg (I_k).

Za I_1 wybieramy jakikolwiek odcinek z $\mathcal{J}''$ spełniający
$$|I_1| > \frac{1}{2} \sup_{I\in \mathcal{J}''} |I| .$$

Niech $\mathcal{J}_1 = \{ I \in \mathcal{J}'' : I \cap I_1 = \emptyset \}$

Dalej indukcyjnie: załóżmy, że mamy już wybrane $I_1, I_2, \dots, I_{k-1}$ i $\mathcal{J}_{k-1}$ oznacza rodzinę wszystkich odcinków z $\mathcal{J}''$, rozłącznych z $I_1, \dots, I_{k-1}$.

Wybieramy $I_k \in \mathcal{J}_{k-1}$ takie, by $|I_k| > \frac{1}{2} \sup_{I\in \mathcal{J}_{k-1}} |I|$

W ten sposób dostajemy ciąg (I_k).

Pozostaje sprawdzić, że ma on pożądane własności.

$$\mathcal{J}_k = \{ I \in \mathcal{J}_{k-1} : I \cap I_k = \emptyset \}$$

Oczywiście z konstrukcji odcinki I_k są parami rozłączne, wiemy też, że $\bigcup_k I_k \subset \mathcal{U}$, więc
$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \le |\mathcal{U}| = 2M + 4 < \infty$$

Stąd w szczególności wynika, że $|I_k| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Skoro $|I_k| \geq \frac{1}{2} \sup\limits_{I \in \mathcal{J}_{k-1}} |I|$, to również

$$\sup_{I \in \mathcal{J}_k} |I| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 .$$

Pozostaje nam sprawdzić, że $E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ jest miary zero.

Ustalmy $N \in \mathbb{N}$ i niech $x \in E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{N} I_k$.

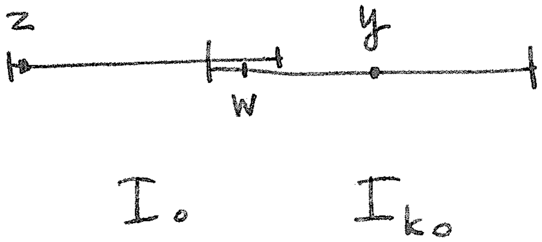
Zbiór $\bigcup\limits_{k=1}^{N} I_k$ jest domknięty (to skończona suma odcinków domkniętych), więc $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{N} I_k$ jest otwarty, zatem istnieje $\delta > 0$ że $(x-\delta, x+\delta) \subset \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{N} I_k$, czyli $(x-\delta, x+\delta) \cap \bigcup\limits_{k=1}^{N} I_k = \emptyset$.

W rodzinie $\mathcal{J}''$ znajdziemy odcinek I_0 zawierający x, o długości mniejszej niż δ, a więc rozłączny z $I_1, I_2, \ldots, I_N$. To znaczy, że $I_0 \in \mathcal{J}_N$.

Czy może się zdarzyć tak, że $\forall_{k \in \mathbb{N}} \; I_0 \in \mathcal{J}_k$?

Nie, bo $\sup\limits_{I \in \mathcal{J}_k} |I| \to 0$, a $|I_0| > 0$. Stąd istnieje $k_0 > N$ takie, że $I_0 \in \mathcal{J}_{k_0-1}$, ale $I_0 \notin \mathcal{J}_{k_0}$; równoważnie: I_0 jest rozłączny z $I_1, \ldots, I_{k_0-1}$, ale $I_0 \cap I_{k_0} \neq \emptyset$.

Skoro $I_0 \in \mathcal{J}_{k_0-1}$, to $|I_0| \leq \sup_{I \in \mathcal{J}_{k_0-1}} |I| < 2|I_{k_0}|$



odległość dowolnego punktu $z \in I_0$ od środka odcinka I_{k_0} (ozn. y) jest $\leq \underbrace{|y-w|}_{\leq \frac{1}{2}|I_{k_0}|} + \underbrace{|w-z|}_{\leq |I_0| < 2|I_{k_0}|}$,

gdzie $w \in I_{k_0} \cap I_0$

czyli $|z-y| < \frac{5}{2}|I_{k_0}|$. Jeżeli więc oznaczymy przez $5I_{k_0}$ odcinek o tym samym środku, co I_{k_0}, ale 5 razy większej długości, to $I_0 \subset 5I_{k_0}$.

Stąd $x \in I_0 \subset 5I_{k_0} \subset \bigcup_{k>N} 5I_k$, co z dowolności $x \in E \setminus \bigcup_{k=1}^{N} I_k$ daje $E \setminus \bigcup_{k=1}^{N} I_k \subset \bigcup_{k>N} 5I_k$.

Stąd, dla każdego $N \in \mathbb{N}$,

$$E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \subset E \setminus \bigcup_{k=1}^{N} I_k \subset \bigcup_{k>N} 5I_k.$$

Mamy jednak $\sum_{k>N} |5I_k| = 5 \sum_{k>N} |I_k| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$,

bo szereg $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k|$ jest zbieżny, a zatem

$E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ można pokryć odcinkami $\{5I_k : k>N\}$ o dowolnie małej sumie długości. $\square$.

Dowód tw. Lebesgue'a

Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ możemy zdefiniować górną i dolną pochodną (Diniego) funkcji f:

$$\overline{D}f(x) = \limsup_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$$\underline{D}f(x) = \liminf_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$ Oczywiście $\overline{D}f(x) \geq \underline{D}f(x)$.

Funkcja f jest różniczkowalna w x wtedy i tylko wtedy, gdy $\underline{D}f(x) = \overline{D}f(x) \in \mathbb{R}$ (a więc nie jest $\pm\infty$).

Na początek wykażemy, że $\{x \in \mathbb{R} : \overline{D}f(x) = +\infty\}$ jest miary zero.

Wystarczy wykazać to dla funkcji f określonej na przedziale domkniętym $[a,b]$ (dlaczego?) (a nie na $\mathbb{R}$).

Możemy też bso założyć, że f jest niemalejąca.

<u>Lemat 1</u>: Niech $E_\alpha = \{x \in (a,b) : \overline{D}f(x) \geq \alpha\}$.
Wówczas $\mu^*(E_\alpha) \leq \dfrac{f(b) - f(a)}{\alpha}$.

<u>Wniosek</u>: $E_\infty = \{x \in (a,b) : \overline{D}f(x) = +\infty\}$ jest miary zero, bo $E_\infty \subset E_\alpha$ dla każdego $\alpha > 0$.

Dowód Lematu 1:

Rozważmy rodzinę przedziałów $\mathcal{J} = \{[c,d] \subset (a,b) : f(d)-f(c) \geqslant \alpha'(d-c)\}$.

Jeżeli $x \in E_\alpha$, to $\limsup\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqslant \alpha$ $(*)$.

więc istnieją dowolnie krótkie przedziały $[x, x+h_i]$ (lub $[x+h_i, x]$), dla których zachodzi nierówność $(*)$ $\Rightarrow$ $\mathcal{J}$ jest pokryciem Vitaliego zbioru E_α. Istnieją zatem rozłączne przedziały $[c_k, d_k] \in \mathcal{J}$, $k \in \mathbb{N}$, takie, że $E_\alpha \setminus \bigcup_k [c_k, d_k]$ jest miary zero.

Mamy też $\sum\limits_k |[c_k,d_k]| = \sum\limits_k (d_k - c_k) \leq \cancel{\frac{1}{\alpha'}\sum\limits_k (f(d_k)-f(c_k))}$

$$\leq \frac{1}{\alpha}\sum_k \left(f(d_k)-f(c_k)\right) \leq \frac{1}{\alpha}\left(f(b)-f(a)\right),$$

bo f niemalejąca.

Stąd E_α jest sumą zbioru miary zero (który można pokryć odcinkami o dow. małej sumie długości) i zbioru $E_\alpha \cap \bigcup_k [c_k,d_k]$, pokrytego odcinkami $[c_k,d_k]$ o sumie długości $\leq \frac{1}{\alpha}(f(b)-f(a))$.

To dowodzi, że $\mu^*(E_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha}(f(b)-f(a))$. $\square$

Zadanko: Co ze zbiorem $E_{-\infty} = \{x \in (a,b) : \overline{D}f(x) = -\infty\}$?

Aby dokończyć dowód tw. Lebesgue'a, wystarczy wykazać, że $E = \{x \in (a,b) : \overline{D} f(x) > \underline{D} f(x)\}$ jest miary zero. Zauważmy, że

$$E = \bigcup_{\substack{\alpha < \beta \\ \alpha, \beta \in \mathbb{Q}}} E_{\alpha\beta} \text{ , gdzie } E_{\alpha\beta} = \{x \in (a,b) : \overline{D} f(x) > \alpha > \beta > \underline{D} f(x)\} .$$

Wystarczy więc wykazać, że $\forall_{\substack{\alpha < \beta \\ \alpha, \beta \in \mathbb{Q}}} E_{\alpha\beta}$ jest miary 0.

<u>Lemat 2</u>: Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\mathcal{U} \subset (a,b)$ otwarty taki, że $E_{\alpha\beta} \subset \mathcal{U}$ i $\mu^*(\mathcal{U}) \leq \mu^*(E_{\alpha\beta}) + \varepsilon$

<u>Dowód</u>: Z def. miary zewnętrznej istnieje ciąg przedziałów (P_k) t.ż. $E_{\alpha\beta} \subset \bigcup_k P_k$

$$\text{i } \sum_k |P_k| \leq \mu^*(E_{\alpha\beta}) + \varepsilon/2$$

Niech teraz Q_k będzie, dla $k = 1, 2, \ldots$, przedziałem otwartym zawierającym P_k, takim, że $|Q_k| = |P_k| + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$

Wtedy $\mathcal{U} = \bigcup_k Q_k$ jest otwarty, $\mu^*(\mathcal{U}) \leq \sum_k |Q_k| =$

$$= \sum_k |P_k| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \mu^*(E_{\alpha\beta}) + \varepsilon ;$$

oczywiście $E_{\alpha\beta} \subset \bigcup_k P_k \subset \bigcup_k Q_k$.

$\square$

Zauważmy, że dla każdego $x \in E_{\alpha\beta}$ istnieją dowolnie krótkie odcinki $[c,d]$ takie, że $x \in [c,d]$, $[c,d] \subset \mathcal{U}$ (to można zagwarantować biorąc odcinek dost. krótki) i $f(d)-f(c) < \beta(d-c)$
(jak w dowodzie Lematu 1 są to odcinki postaci $[x, x+h_i]$ lub $[x+h_i, x]$ dla takiego ciągu $h_i \to 0$, ~~że~~ że $\frac{f(x+h_i)-f(x)}{h_i} \to \underline{D} f(x)$.).

Stąd, biorąc wszystkie takie odcinki $[c,d]$, dostajemy pokrycie Vitaliego zbioru $E_{\alpha\beta}$. Możemy więc wybrać ciąg odcinków $[c_k, d_k]$, rozłącznych, takich, że

$E_{\alpha\beta} \setminus \bigcup_k [c_k, d_k]$ jest miary zero,

$\bigcup_k [c_k, d_k] \subset \mathcal{U}$,

$\forall_k \; f(d_k) - f(c_k) < \beta(d_k - c_k)$

więc $\sum_k (f(d_k) - f(c_k)) < \beta \sum_k (d_k - c_k) \leq \beta \mu^*(\mathcal{U})$

$$\leq \beta(\mu^*(E_{\alpha\beta}) + \varepsilon)$$

Ustalmy teraz $k \in \mathbb{N}$.
Na zbiorze $E_{\alpha\beta} \cap [c_k, d_k]$ mamy $\overline{D} f > \alpha$, więc z Lematu 1 $\mu^*(E_{\alpha\beta} \cap [c_k, d_k]) \leq$

$$\leq \frac{1}{\alpha}(f(d_k) - f(c_k))$$

Stąd

$$\mu^*(E_{\alpha\beta}) \leq \sum_k \mu^*(E_{\alpha\beta} \cap [c_k, d_k])$$

$$\leq \frac{1}{\alpha} \sum_k \left(f(d_k) - f(c_k)\right) \leq \frac{\beta}{\alpha}\left(\mu^*(E_{\alpha\beta}) + \varepsilon\right)$$

i nierówność ta zachodzi dla każdego $\varepsilon > 0$,

więc $\mu^*(E_{\alpha\beta}) \leq \frac{\beta}{\alpha} \mu^*(E_{\alpha\beta})$

To jednak, ze względu na to że $0 < \frac{\beta}{\alpha} < 1$

i $\infty > \mu^*(E_{\alpha\beta}) \geq 0$, oznacza że $\mu^*(E_{\alpha\beta}) = 0$

□.

bo $E_{\alpha\beta} \subset [a,b]$, więc $\mu^*(E_{\alpha\beta}) \leq b - a$.