# Szeregi potęgowe

Szereg funkcyjny postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$
nazywamy szeregiem potęgowym wokół $z_0$,
o współczynnikach $(a_n)$.

Znamy trochę szeregów tej postaci:

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \qquad \text{dla } z \in \mathbb{C}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$ i podobny szereg dla $\cos x$

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \qquad \text{dla } x \in (-1,1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \text{dla } x \in (-1,1]$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{dla } x \in (-1,1)$$
lub $x \in B(0,1) \subset \mathbb{C}$.

Stwierdzenie 1: Załóżmy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ jest zbieżny dla $z = \xi \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.
Wówczas dla każdego $\varrho \in (0, |\xi - z_0|)$ szereg ten jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie w kole domkniętym $\overline{B}(z_0, \varrho)$.

Dowód: wiemy, że $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\xi - z_0)^n$ jest zbieżny, więc
$\lim_{n\to\infty} |a_n (\xi - z_0)^n| = 0$, w szczególności ciąg

$|a_n(\xi - z_0)^n|$ jest ograniczony przez pewną stałą $M$.

Niech $z \in \overline{B}(z_0, \varrho) \Leftrightarrow |z - z_0| \leq \varrho$. Wtedy

$$|a_n(z-z_0)^n| \leq |a_n| \varrho^n = |a_n(\xi - z_0)^n| \cdot \left(\frac{\varrho}{|\xi - z_0|}\right)^n \leq$$

$$\leq M \cdot q^n, \text{ gdzie } 0 < q = \frac{\varrho}{|\xi - z_0|} < 1.$$

Szereg $\sum M q^n$ jest zbieżny, więc z kryt. Weierstrassa $\sum a_n (z-z_0)^n$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie w $\overline{B}(z_0, \varrho)$.

<u>Stwierdzenie 2</u>. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ jest rozbieżny dla $z = \zeta \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Wówczas dla każdego $z = \tilde{z}$ takiego, że $|\tilde{z} - z_0| > |\zeta - z_0|$ szereg ten jest rozbieżny.

<u>Dowód</u>: Załóżmy przeciwnie – że $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\tilde{z} - z_0)^n$ jest zbieżny; wtedy ze Stwierdzenia 1 szereg ten powinien być zbieżny również dla $z = \zeta$, bo $\zeta$ leży bliżej $z_0$ niż $\tilde{z}$. $\lightning$.

<u>Wniosek</u>: Szereg $\sum a_n (z-z_0)^n$ jest zbieżny w pewnym kole otwartym $B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ i rozbieżny poza kołem domkniętym $\overline{B}(z_0, R) =$

$$= \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}.$$

<u>Twierdzenie</u> (wzór Cauchy'ego - Hadamarda)

Niech $(a_n)$ będzie ciągiem liczb zespolonych;
$A = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty]$. Wówczas promień zbieżności $R$ szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ wynosi

a) $R = 0$, gdy $A = +\infty$

b) $R = +\infty$, gdy $A = 0$

c) $R = \frac{1}{A}$, gdy $A \in (0, +\infty)$.

Jacques Hadamard
(1865–1963)

Dowód

a) Niech $z \neq z_0$. Skoro $A = +\infty$, to znajdziemy podciąg $(a_{n_k})$ ciągu $(a_n)$ taki, że

$$\forall_k \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{2}{|z-z_0|}, \text{ czyli } |a_{n_k}(z-z_0)^{n_k}| > 2^{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$$

To znaczy, że $|a_n(z-z_0)^n| \not\to 0$, więc szereg $\sum a_n (z-z_0)$ nie jest zbieżny. Stąd szereg ten jest zbieżny tylko dla $z = z_0 \Leftrightarrow R = 0$.

b) jak poprzednio, niech $z \neq z_0$. Skoro $A = 0$, to dla dost. dużych $n$ $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|z-z_0|}$,

czyli $|a_n(z-z_0)^n| < \frac{1}{2^n}$. To dowodzi zbieżności (i to bezwzględnej) $\sum a_n (z-z_0)$, zatem $R = +\infty$.

c) Niech $z \in \mathbb{C}$ będzie takie, że $|z-z_0| < \frac{1}{A}$.
i niech $\varrho \in (|z-z_0|, \frac{1}{A})$. Mamy $\frac{1}{\varrho} > A = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

więc dla dost. dużych $n$ $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\varrho}$, czyli

$$|a_n(z-z_0)^n| < \left(\frac{|z-z_0|^n}{\varrho}\right)^n = q^n.$$

Wiemy jednak, że $q = \frac{|z-z_0|}{\varrho} < 1$, szereg $\sum q^n < \infty$,
więc $\sum a_n (z-z_0)$ jest zbieżny bezwzględnie.

Jeżeli zaś $z \in \mathbb{C}$ jest takie, że $|z-z_0| > \frac{1}{A}$,

to $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = A > \frac{1}{|z-z_0|}$, zatem

znajdziemy podciąg $(a_{n_k})$ ciągu $(a_n)$ tż.

$$\forall_k \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{|z-z_0|} \iff |a_{n_k}(z-z_0)^{n_k}| > 1.$$

Stąd $|a_n(z-z_0)^n| \not\to 0$, więc szereg
$\sum a_n (z-z_0)^n$ nie jest zbieżny.

$\square$.

Dalej badamy funkcję $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$.
Ustaliliśmy, że istnieje $R \in [0, +\infty]$ takie, że szereg definiujący $f$ jest zbieżny dla $|z-z_0| < R$ i rozbieżny dla $|z-z_0| > R$, co więcej dla każdego $\varrho \in (0,R)$ szereg jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie w kole domkniętym $\overline{B}(z_0, \varrho)$. Wynika stąd od razu, że funkcja $f$ jest ciągła w $\overline{B}(z_0,\varrho)$, a z dowolności $\varrho \in (0,R)$ — w kole otwartym $B(z_0,R)$.

Jak wiemy, na brzegu koła zbieżności $B(z_0,R)$ szereg może być w pewnych punktach zbieżny, w innych rozbieżny:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ $R=1$, szereg jest zbieżny (bezwzględnie!) dla wszystkich $z$: $|z| \leq 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ $R=1$, szereg jest zbieżny bezwzględnie dla wszystkich $z$: $|z|<1$, ale dla $z$: $|z|=1$, $z \neq 1$ jest zbieżny warunkowo, a dla $z=1$ jest rozbieżny.

Stąd funkcja $f$ może, ale nie musi być określona w punktach leżących na okręgu $|z-z_0| = R$.
Załóżmy, że jest określona w jakimś takim punkcie.

Czy jest w tym punkcie ciągła?

Zajmijmy się najpierw sytuacją szeregów o współczynnikach rzeczywistych

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n.$$

Twierdzenie: Załóżmy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ ma promień zbieżności $R \in (0,\infty)$ i że jest on zbieżny w punkcie $x = x_0 + R$.
Wówczas funkcja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ jest ciągła w $x = x_0 + R$, a więc

$$\lim_{x \to x_0+R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \quad \left( = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \to x_0+R} a_n (x-x_0)^n \right)$$

Dowód: Wykażemy więcej: że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ jest jednostajnie zbieżny na $[x_0, x_0+R]$. Wynika to wprost z kryterium Abela:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n R^n}_{g_n(x)} \cdot \underbrace{\left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n}_{f_n(x)}$$

Funkcje $f_n$ są nieujemne, wspólnie ograniczone na $[x_0, x_0+R]$ (przez 1), dla każdego $x \in [x_0, x_0+R]$ ciąg $(f_n(x))$ jest nierosnący, a szereg $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ jest, z założenia, zbieżny (i to jednostajnie, bo $g_n(x)$

w ogóle od $x$ nie zależy!). Z kryterium Abela więc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ jest jednost. zbieżny na $[x_0, x_0+R]$, a więc $f(x)$ jest ciągła na tym przedziale (bo ciągłe są wyrazy szeregu). $\square$

Oczywiście analogiczne twierdzenie zachodzi w drugim końcu przedziału zbieżności: $x_0-R$. Jeżeli $\sum a_n (x-x_0)^n$ jest w nim zbieżny, to $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ jest ciągła na $[x_0-R, x_0]$

<u>Wniosek</u>: Jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ jest zbieżny we wszystkich punktach przedziału domkniętego $[a,b]$, to jest na nim jednostajnie zbieżny. Stąd dalej wynika, że szereg potęgowy jest w swoim przedziale zbieżności niemal jednostajnie zbieżny.

A co dla szeregów o wyrazach zespolonych?

Przyjrzyjmy się szeregowi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \text{ gdzie } a_n = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{gdy } n = 3^k, \ k \in \mathbb{N} \\ -\frac{1}{k} & \text{gdy } n = 2 \cdot 3^k, \ k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{w pozost. przypadkach} \end{cases}$$

Łatwo możemy sprawdzić, korzystając np. z wzoru Cauchy-Hadamarda, że promień zbieżności tego szeregu wynosi 1. Łatwo też widzimy, że dla $z=1$ dostajemy

$$a_1+a_2+a_3+\ldots = 0+0+\underbrace{\tfrac{1}{1}}_{a_3}+0+0-\underbrace{\tfrac{1}{1}}_{a_6}+0+\ldots+\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{a_9}+0+\ldots-\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{a_{18}}+0\ldots$$

$= 1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\ldots$ to jest szereg zbieżny do zera.

Jeżeli więc $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, to $f(1)=0$.

Co jednak dzieje się dla $z_k = e^{i\pi/3^k}$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_k^n = z_k^3 - z_k^6 + \frac{z_k^9}{2} - \frac{z_k^{18}}{2} + \frac{z_k^{27}}{3} - \frac{z_k^{54}}{3} + \ldots$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\left(e^{i\pi/3^k}\right)^{3^l} - \left(e^{i\pi/3^k}\right)^{2\cdot 3^l}}{l} =$$

$$= \underbrace{\sum_{l=1}^{k-1} \frac{\left(e^{i\pi/3^k}\right)^{3^l} - \left(e^{i\pi/3^k}\right)^{2\cdot 3^l}}{l}}_{\text{skończone}} + \underbrace{\sum_{l=k}^{\infty} \frac{e^{3^{l-k} i\pi} - e^{2\cdot 3^{l-k} i\pi}}{l}}_{= \sum_{l=k}^{\infty} \frac{-2}{l} = -\infty,}$$

więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_k^n$ jest rozbieżny (i nieograniczony) w $z_k = e^{i\pi/3^k}$

__Ważne zadanie__: wywnioskować stąd, że

1. Dla każdego $k$ istnieje $\tilde{z}_k$ takie, że $|\tilde{z}_k| < 1$, $|\tilde{z}_k - z_k| < \frac{1}{k}$ i $|f(\tilde{z}_k)| > k$
2. funkcja $f$ nie jest ciągła w $z = 1$

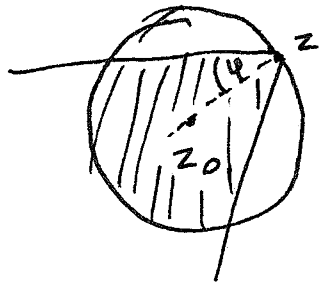
(jako funkcja określona na $B(0,1) \cup \{1\}$).

Zatem nie możemy liczyć na dokładny odpowiednik twierdzenia Abela w dziedzinie zespolonej.

Zachodzi jednak twierdzenie znane jako twierdzenie Abela o granicach kątowych, a pochodzące w rzeczywistości od Otto Stolza.

Na początek definicja (potrzebna nam w zasadzie tylko do tego jednego twierdzenia).

Dla $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ i $\varphi \in (0, \pi/2)$ obszarem kątowym $T_{z_0}(z, \varphi)$ nazywamy część wspólną koła domkniętego $B(z_0, |z - z_0|)$ i kąta otwartego o rozwartości $2\varphi$ i wierzchołku w $z$, dla którego odcinek $[z, z_0]$ leży na dwusiecznej:



Mówimy, że funkcja $f$, określona na $B(z_0, |z-z_0|)$, ma w punkcie $z$ granicę kątową równą $A$ wtedy, gdy dla każdego $\varphi \in (0, \pi/2)$ funkcja $f|_{T_{z_0}(z,\varphi)}$ ma w $z$ granicę równą $A$.

Zauważmy, że $f$ ma w $z$ granicę kątową równą $A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(w) = f(z_0 + (z-z_0)w)$ ma w punkcie $w=1$ granicę kątową $A$ (jeżeli $f$ jest określona na $B(z_0, |z-z_0|)$, to $g$ jest określona na $B(0,1)$).

<u>Twierdzenie</u> (Abela (Stolza) o granicach kątowych)
Jeżeli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ ma promień zbieżności $R \in (0,\infty)$ i jest zbieżny w pewnym $\tilde{z} \in \mathbb{C}$ takim, że $|\tilde{z} - z_0| = R$, to funkcja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ ma w $\tilde{z}$ granicę kątową równą $f(\tilde{z})$ (czyli, innymi słowy, funkcja $f|_{T_{z_0}(\tilde{z},\varphi)}$ jest, dla każdego $\varphi \in (0, \pi/2)$, ciągła w punkcie $\tilde{z}$).

Wspomniana uwaga o tym, że $f : B(z_0, |\tilde{z} - z_0|) \to \mathbb{C}$ ma w $\tilde{z}$ granicę kątową $A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(w) = f(z_0 + w(\tilde{z} - z_0))$ ma w $1$ granicę kątową $A$ pozwala uprościć dowód: wystarczy, że wykażemy go w szczególnym przypadku, gdy $R = 1$, $\tilde{z} = 1$, $z_0 = 0$.

Jest wiele dowodów tego twierdzenia, my wykorzystamy nieco zapomniane narzędzie z teorii szeregów liczbowych

Otto Toeplitz – ur. w Breslau 1881–1940 w rodzinie żydowskiej, studiował tamże, potem w Getyndze, Kilonii, Bonn. W 1935 roku wyrzucony przez hitlerowców z uniwersytetu, w 1939 wyjechał do Palestyny, gdzie po roku zmarł. Miał wielki wkład w analizę funkcjonalną, szczególnie w teorię równań całkowych; był jednym z założycieli Uniwersytetu Jerozolimskiego

## Twierdzenie Cauchy–Toeplitza

Załóżmy, że

- ciąg $(z_n)$ liczb zespolonych ma granicę $\zeta \in \mathbb{C}$
- $A = (a_{ij})$ jest macierzą nieskończoną $(i, j = 0, 1, 2, \ldots)$

taką, że

(a) wyrazy w każdej kolumnie dążą do zera

$$\left(\text{czyli } \forall_j \lim_{i \to \infty} a_{ij} = 0\right)$$

(b) szeregi wyrazów w każdym wierszu są bezwzględnie zbieżne i wspólnie ograniczone

$$\left(\text{czyli } \exists_{K>0} \forall_i \sum_{j=0}^{\infty} |a_{ij}| \le K\right)$$

(c) $A_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \xrightarrow[i \to \infty]{} 1$

Wówczas, jeżeli $w_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} z_j$,
to $\lim_{i\to\infty} w_i = \zeta$.

<u>Przykład zastosowania</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix}, \quad \text{to } w_i = \frac{z_0 + z_1 + \ldots + z_n}{n+1}$$

<u>Dowód</u>: Załóżmy najpierw, że $\zeta = 0$. Ustalmy $\varepsilon > 0$, istnieje wtedy $n_0$ tż. $\forall_{n > n_0} \ |z_n| < \frac{\varepsilon}{2K}$.
Mamy wówczas,
$$|w_i| = \left|\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} z_j\right| \leq \left|\sum_{j=0}^{n_0} a_{ij} z_j\right| + \underbrace{\sum_{j=n_0+1}^{\infty} |a_{ij}||z_j|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2K} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} |a_{ij}| \leq \frac{\varepsilon}{2}},$$
więc dla każdego $i$ $\quad |w_i| \leq \left|\sum_{j=0}^{n_0} a_{ij} z_j\right| + \varepsilon/2$.
Dalej $n_0$ jest już ustalone, więc $\lim_{i\to\infty} \sum_{j=0}^{n_0} a_{ij} z_j = 0$
(bo $a_{ij} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$), istnieje więc $i_0$ tż $\forall_{i > i_0} \ \left|\sum_{j=0}^{n_0} a_{ij} z_j\right| < \frac{\varepsilon}{2}$
i ostatecznie dla $i > i_0$ $|w_i| < \varepsilon$. To dowodzi, że
$w_i \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$.
Jeżeli $\zeta = \lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$, to niech $z_n' = z_n - \zeta$. Wtedy
$$w_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} z_j = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} z_j' + A_i \zeta =: w_i' + A_i \zeta$$

Na mocy pierwszej części dowodu $w' \to 0$, z (c) $A_i \to 1$, więc $w_i \xrightarrow[i\to\infty]{} \zeta$. $\square$.

Zauważmy, że gdy $\zeta = 0$, nie potrzebujemy założenia (c) – teza zachodzi i bez niego...

Wywnioskujmy teraz z tw. Cauchy'ego–Toeplitza twierdzenie o granicach kątowych.

<u>Dowód</u> (tw. Abela o granicach kątowych)

Jak wspominałem, wystarczy udowodnić szczególny przypadek, gdy $\tilde{z} = 1$, $z_0 = 0$, $R = 1$.

W tej sytuacji twierdzenie mówi, że

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in T_0(1,\varphi)}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \zeta.$$

Przyjmijmy $z_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$; wiemy, że $\lim_{n\to\infty} z_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$

i niech $v_n \to 1$, $v_n \in T_0(1,\varphi)$.

Połóżmy $a_{ij} = (1-v_i)v_i^j$. Wtedy

$$w_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} z_j = (1-v_i)\sum_{j=0}^{\infty} z_j v_i^j = \sum_{j=0}^{\infty}\left(z_j v_i^j - z_j v_i^{j+1}\right) =$$

$$= z_0 v_i^0 - z_0 v_i^1 + z_1 v_i^1 - z_1 v_i^2 + \ldots = \overset{a_0}{\overset{\shortparallel}{z_0}} v_i^0 + (\overset{a_1}{\overset{\shortparallel}{z_1 - z_0}}) v_i^1 + (\overset{a_2}{\overset{\shortparallel}{z_2 - z_1}}) v_i^2 + \ldots$$

$$= \sum_{j}^{\infty} a_j v_i^j = f(v_i)$$

Aby wiedzieć, że $f(v_i) \xrightarrow[i\to\infty]{} \zeta$ (o co nam chodzi), sprawdzimy, że $A=(a_{ij})$ spełnia założenia (a), (b) i (c) Twierdzenia Cauchy'ego-Toeplitza.

(a) $\lim\limits_{i\to\infty} a_{ij} = \lim\limits_{i\to\infty} \underbrace{(1-v_i)}_{\substack{\text{to dąży do } 0,\\ \text{bo } v_i \to 1}} \underbrace{v_i^j}_{\text{to jest ograniczone}} = 0$

(c) $\lim\limits_{i\to\infty} \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{ij} = \lim\limits_{i\to\infty} \sum\limits_{j=0}^{\infty} (1-v_i)v_i^j =$

$= \lim\limits_{i\to\infty} (1-v_i)\cdot\dfrac{1}{1-v_i} = \lim\limits_{i\to\infty} 1 = 1.$

no i zostaje (b): chcemy, by $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|a_{ij}| \leq K$ dla pewnej stałej $K$ i wszystkich $i$.

$$\sum_{j=0}^{\infty}|a_{ij}| = |1-v_i|\sum_{j=0}^{\infty}|v_i|^j = \frac{|1-v_i|}{1-|v_i|} \overset{?}{\leq} K$$

I tu pojawia się obszar kątowy $T_0(1,\varphi)$. Jeżeli $z\in T_0(1,\varphi)$, to $z = 1-\varrho(\cos\theta + i\sin\theta)$, gdzie $\theta\in[0,\varphi)$

i/a $|1-z| = \varrho$, $\dfrac{|1-z|}{1-|z|} = \dfrac{\varrho(1+|z|)}{1-|z|^2} = \dfrac{\varrho(1+|z|)}{1-((1-\varrho\cos\theta)^2+\varrho^2\sin^2\theta)} =$

$= \dfrac{1+|z|}{2\cos\theta-\varrho}$. Skoro teraz $z$ leży też w $B(0,1)$ i to dostatecznie blisko 1 (a więc $\varrho$ jest małe), to, dla $\varrho < \cos\varphi$, $2\cos\theta - \varrho > 2\cos\theta - \cos\varphi > \cos\varphi$, $|z| < 1$, zatem

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} = \frac{1+|z|}{2\cos\theta - \varrho} < \frac{2}{\cos\varphi} =: K.$$

Możemy oczywiście założyć, że wszystkie $v_i$ leżą w obszarze $T_0(1,\varphi) \cap \{\varrho = |z-1| < \cos\varphi\}$ (najwyżej odrzucimy pierwsze ileś wyrazów ciągu $v_i$, leżące za daleko 1). Stąd spełniony jest też warunek (b), zatem z tw. Cauchy'ego-Toeplitza $\lim_{i\to\infty} f(v_i) = \zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. □

<u>Wniosek</u>: Funkcja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ jest funkcją ciągłą wewnątrz koła zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, a w punktach okręgu zbieżności (czyli na brzegu koła zbieżności), w których jest określona (czyli szereg jest zbieżny) ma granice kątowe równe sumie szeregu w tych punktach.

No dobrze - jest ciągła. A czy jest różniczkowalna?

Lemat: Załóżmy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ ma promień zbieżności $R \in [0,+\infty]$. Wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ również ma promień zbieżności $R$.

Lemat ten można łatwo udowodnić korzystając z wzoru Cauchy–Hadamarda (zadanie), można też wprost, powtarzając argumentację z dowodu twierdzenia o promieniu zbieżności.

Dowód

Załóżmy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ jest zbieżny dla pewnego $x \in \mathbb{C}$, $x \neq x_0$. Niech $y \in \mathbb{C}$ spełnia $|y-x_0| < |x-x_0|$. Wykażemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (y-x_0)^{n-1}$ jest zbieżny.

Jeżeli $y = x_0$, to nie ma co dowodzić, założmy więc, że $y \neq x_0$. Niech $\varrho \in (|y-x_0|, |x-x_0|)$.

Wiemy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ jest zbieżny, więc ciąg $a_n (x-x_0)^n$ jest zbieżny do zera $\Rightarrow$ jest ograniczony: $\exists_{M>0} \forall_n |a_n (x-x_0)^n| \leq M$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (y-x_0)^{n-1} = \frac{1}{y-x_0} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (y-x_0)^n ;$$

$$|n a_n (y-x_0)^n| = |a_n (x-x_0)^n| \cdot n \frac{|y-x_0|^n}{|x-x_0|^n} \leq M \cdot n \frac{\varrho^n}{|x-x_0|^n}$$

szereg $\sum_{n=1}^{\infty} M n \cdot \left(\frac{\rho}{|x-x_0|}\right)^n$ jest zbieżny, więc

z kryterium Weierstrassa szereg $\sum n a_n (y-x_0)^n$

(a za nim $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (y-x_0)^{n-1}$) jest zbieżny.

Podobnie, jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (y-x_0)^{n-1}$ jest zbieżny

dla pewnego $y \neq x_0$, a $z \in \mathbb{C}$ jest takie, że

$|z-x_0| < |y-x_0|$, to biorąc $\sigma \in (|z-x_0|, |y-x_0|)$

dostajemy

$$|a_n(z-x_0)^n| = \underbrace{|n a_n (y-x_0)^{n-1}|}_{\substack{\text{dąży do 0, więc jest} \\ \text{ograniczony przez pewne} \\ M>0}} \cdot \underbrace{\frac{|y-x_0|}{n}}_{\substack{\text{ogr. przez} \\ |y-x_0|}} \underbrace{\left(\frac{|z-x_0|}{|y-x_0|}\right)^n}_{< \left(\frac{\sigma}{|y-x_0|}\right)^n}$$

$$\leq \underbrace{M|y-x_0|\left(\frac{\sigma}{|y-x_0|}\right)^n}$$

szereg o takim wyrazie jest zbieżny,

bo $\frac{\sigma}{|y-x_0|} < 1$. Z kryt. Weierstrassa

$\sum a_n (z-x_0)^n$ jest zbieżny.

Stąd wynika już, że szeregi $\sum a_n (x-x_0)^n$ i

$\sum n a_n (x-x_0)^{n-1}$ mają ten sam promień zbieżności.

Z tego prostego lematu wynika cała seria ważnych wniosków.

1. <u>Twierdzenie</u> (o różniczkowaniu szeregu potęgowego wyraz po wyrazie)

Niech funkcja $F$ będzie dana szeregiem potęgowym o dodatnim promieniu zbieżności $R$:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{dla } z \in B(z_0, R)$$

Wówczas $F$ jest różniczkowalna w $B(z_0, R)$

i $$F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1} \quad \text{dla } z \in B(z_0, R)$$

<u>Dowód</u>: Wystarczy zastosować twierdzenie o różniczkowaniu szeregów funkcyjnych: ustalmy $\varrho \in (0, R)$,

szereg $\sum a_n (z-z_0)^n$ jest zbieżny dla $z = z_0$,

szereg pochodnych $\sum n a_n (z-z_0)^{n-1}$ jest jednostajnie zbieżny na $\overline{B(0,\varrho)} \Rightarrow F'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n\right)' =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n (z-z_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1};$$

tw. o różn. szeregów funkc.

z dowolności $\varrho \in (0, R)$ wzór działa dla wszystkich $z \in B(0, R)$.

2. Jeżeli $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ i szereg ten ma promień zbieżności $R$, to $F$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w $B(z_0, R)$

(wystarczy zastosować tw. o różniczkowaniu szeregu pot. wyraz po wyrazie do $F'$, $F''$ itd.)

i $$(F(z))^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n (z-z_0)^{n-k}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+k)!}{l!} a_{l+k} (z-z_0)^l .$$

3. Jeżeli $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ dla $z \in B(z_0, R)$; $R > 0$, to

$$F^{(k)}(z_0) = k!\, a_k ;$$

szereg Taylora funkcji $F$ wokół $z_0$

$$\boxed{F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k}$$

4. Jeżeli dwa szeregi potęgowe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$ mają dodatnie promienie zbieżności i są równe w pewnym otoczeniu $z_0$:

$$\exists_{\rho > 0} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n \quad \text{dla } z \in B(z_0, \rho),$$

to $a_n = b_n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

(bo współczynniki obu szeregów są jednoznacznie wyznaczone przez pochodne ich sum w $z_0$, a te są równe)

A co w końcach obszaru zbieżności?
To pytanie ma sens dla szeregów zmiennej rzeczywistej - wtedy możemy mówić o pochodnej lewo- lub prawostronnej.

Jeżeli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ jest zbieżny w $x_0+R$, to nie znamy jeszcze, że $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ będzie w $x_0+R$ zbieżny:

<u>Zadanko</u>: Sprawdzić, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n$

- ma promień zbieżności 1
- jest zbieżny (i to bezwzględnie) dla $x=-1$
- szereg pochodnych $\sum_{n=1}^{\infty} n \binom{1/2}{n} x^{n-1}$ dla $x=-1$ jest rozbieżny do $+\infty$.

Jeżeli jednak $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ jest zbieżny w $x_0+R$, to $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ ma w $x_0+R$ pochodną lewostronną $F'_-(x_0+R)$, bo szereg pochodnych jest wówczas jednostajnie zbieżny na $[x_0, x_0+R]$ i możemy zastosować twierdzenie o różniczkowaniu szeregów funkcyjnych.

<u>Definicja</u>: Niech $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ lub $\mathbb{R}$ będzie zbiorem otwartym. Funkcję $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ nazywamy <u>analityczną</u> (lub, dla podkreślenia, czy jest to funkcja zmiennej rzeczywistej, czy zespolonej, $\mathbb{R}$-analityczną / $\mathbb{C}$-analityczną), jeżeli dla każdego $x_0 \in \mathcal{U}$ istnieje $r_{x_0} > 0$ t.ż.

$$\forall_{x \in B(x_0, r_{x_0})} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

dla pewnego ciągu $(a_n)$, zależnego od $x_0$,

$B(x_0, r_{x_0})$ — to jest kula w $\mathbb{R}$ lub w $\mathbb{C}$

a więc $f$ w otoczeniu każdego punktu swojej dziedziny dana jest jako suma szeregu potęgowego o dodatnim promieniu zbieżności.

Oczywiście każda funkcja analityczna jest niesk. wiele razy różniczkowalna w każdym punkcie swojej dziedziny.

Istnieją jednak funkcje niesk. wiele razy różniczkowalne, które nie są analityczne:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ e^{-1/x^2} & x \neq 0 \end{cases}$$

Jak już wiemy, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest $\infty$-wiele razy różniczkowalna, ale $\forall_{k=0,1,2,\dots}$ $f^{(k)}(0)=0$.

Stąd, gdyby dla pewnych $(a_n)$ i $r>0$

$f(x) = \sum a_n x^n$ dla wszystkich $x \in (-r,r)$,

to $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$, więc $f(x) = 0$ na $(-r,r)$

a wiemy, że $f(x) \neq 0$ dla $x \neq 0$.

<u>Twierdzenie</u> Jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ ma dodatni promień zbieżności $R$ $(\in (0,\infty])$, to funkcja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ jest analityczna w kole otwartym $B(z_0, r)$.

<u>Dowód</u>: Musimy wykazać, że dla każdego $y_0 \in B(z_0,r)$ istnieje $\rho_{y_0} > 0$ tż. $f$ daje się przedstawić jako suma szeregu potęgowego wokół $y_0$ o promieniu zbieżności $\rho_{y_0}$.

Wykażemy, że $\rho_{y_0}$ jest równy co najmniej $R - |y_0 - z_0|$, a więc odległości $y_0$ do brzegu koła zbieżności $B(z_0, R)$ szeregu $\sum a_n (z-z_0)^n$.

Potrzebny nam będzie lemat

Lemat: („duże" twierdzenie o zamianie kolejności sumowania)

Niech $a_{ij} \in \mathbb{C}$ dla $i,j = 0,1,2,\dots$

Oznaczmy $b_i = \sum_{j=0}^{\infty} |a_{ij}|$. Jeżeli $\sum_{i=0}^{\infty} b_i < \infty$, to

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$$

czyli można zamienić kolejność sumowania

Dowód: Niech $A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\} \subset \mathbb{R}$.

Niech $g_i, h : A \to \mathbb{R}$ dla $i = 0,1,2,\dots$

$$g_i(0) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$$

skąd wiemy, że ta suma istnieje i jest skończona?

$$g_i\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} \qquad h(x) := \sum_{i=0}^{\infty} g_i(x)$$

0 jest jedynym punktem skupienia zbioru $A$,

$$\lim_{n\to\infty} g_i\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n} a_{ij} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = g_i(0),$$

więc funkcje $g_i$ są ciągłe na $A$.

Wiemy też, że $\forall_i\ |g_i(x)| \le b_i$ i $\sum_{i=0}^{\infty} b_i < \infty$,

więc z kryt. Weierstrassa szereg $\sum g_i(x)$ jest jednostajnie zbieżny na $A \Rightarrow h$ jest ciągła na $A$. Stąd

$$\lim_{n\to\infty} h\left(\frac{1}{n}\right) = h(0) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$$

ale

$$\lim_{n\to\infty} h\left(\tfrac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}}_{\substack{\text{sumę skończoną}\\ \text{z nieskończoną}\\ \text{wolno zamienić}}} a_{ij} = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$$

$$\| $$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}.$$

## Dowód twierdzenia

Niech $y_0 \in B(z_0, r)$, $y_0 \neq z_0$, i niech $z \in \mathbb{C}$ spełnia $|z-y_0| < R - |y_0 - z_0|$. Stąd od razu $|z-z_0| < |z-y_0| + |y_0-z_0| < R$, więc $z \in B(z_0, R)$.

Mamy $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - y_0 + y_0 - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (z-y_0)^k (y_0 - z_0)^{n-k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_n \binom{n}{k} (z-y_0)^k (y_0-z_0)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk}$$

przyjmujemy, zgodnie zresztą z def., że $\binom{n}{k} = 0$ gdy $k > n$, $n \in \mathbb{N}$

Sprawdzimy, że $(\alpha_{nk})$ spełnia założenia Lematu:

$$\beta_n = \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_{nk}| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_n| \binom{n}{k} |y_0 - z_0|^{n-k} |z - y_0|^k =$$

$$= |a_n| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |z-y_0|^k |y_0 - z_0|^{n-k} = |a_n| \left(|z-y_0| + |y_0 - z_0|\right)^n$$

Czy $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ jest zbieżny?

Szeregi $\sum a_n (z-z_0)^n$ i $\sum |a_n| t^n$ mają ten sam promień zbieżności $R$ (np. z wzoru Cauchy'ego-Hadamarda). Wiemy, że $|z-y_0|+|y_0-z_0| = t < R$, więc

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(|z-y_0| + |y_0-z_0|\right)^n \quad \text{jest zbieżny.}$$

$$\overset{\shortparallel}{\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n}$$

Możemy zatem zamienić kolejność sumowania:
(i po zamianie szeregi są dalej zbieżne)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{n}{k} (y_0 - z_0)^{n-k} (z-y_0)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left( \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} (y_0-z_0)^{n-k} \right)}_{b_k} (z-y_0)^k.$$

$\square$

Wiemy skądinąd, że $b_k = f^{(k)}(y_0)/k!$
Możemy to też sprawdzić bezpośrednio:

$$f^{(k)}(y_0) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+k)!}{l!} a_{l+k} (y_0 - z_0)^l \overset{l=n-k}{=}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (y_0 - z_0)^{n-k}$$

i $$b_k = \frac{f^{(k)}(y_0)}{k!} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} a_n (y_0-z_0)^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (y_0 - z_0)^{n-k}.$$

$\square$

Jeżeli $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ dla $z \in B(z_0, R_1)$,

$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$ dla $z \in B(z_0, R_2)$,

to oczywiście dla $z \in B(z_0, R)$, gdzie $R = \min(R_1, R_2)$

$$(f \pm g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(z-z_0)^n$$

więc suma i różnica funkcji analitycznych na zbiorze otwartym $U$ są również analityczne na $U$.

Podobnie dowodzimy (korzystając z tego, że wewnątrz koła zbieżności szereg potęgowy jest bezwzględnie zbieżny), że

$$(f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k \cdot b_{n-k} (z-z_0)^{n-k}}_{\text{iloczyn Cauchy'ego szeregów } \sum a_n (z-z_0)^n \text{ i } \sum b_n (z-z_0)^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) (z-z_0)^n$$ dla wszystkich $z \in B(z_0, R)$.

więc iloczyn funkcji analitycznych na $U$ też jest funkcją analityczną.

Twierdzenie: Jeżeli funkcje $f$ i $g$ są analityczne na zbiorze otwartym $\mathcal{U}$, to funkcja $\frac{f}{g}$ jest analityczna na $\mathcal{U} \setminus \{g=0\}$.

(Skąd wiemy, że $\mathcal{U} \setminus \{g=0\}$ jest zbiorem otwartym?)

Dowód: Mamy wykazać, że dla każdego $w \in \mathcal{U}$ takiego, że $g(w) \neq 0$ funkcja $\frac{f}{g}$ daje się przedstawić w otoczeniu $w$ jako suma szeregu potęgowego wokół $w$, o dodatnim promieniu zbieżności.

Niech $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-w)^n$ dla $z \in B(w, R_1)$

$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-w)^n$ dla $z \in B(w, R_2)$.

i $b_0 = g(w) \neq 0$.

Wykażemy, że $\frac{f}{g}(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-w)^n$,

gdzie $(c_n)$ jest dany rekurencyjnie: $c_0 = \frac{a_0}{b_0}$,

$c_n = \frac{1}{b_0}\left(a_n - \sum_{k=1}^{n} b_k c_{n-k}\right)$ i że szereg ten ma dodatni promień zbieżności.

Sprawdzimy najpierw, że rzeczywiście, o ile $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-w)^n$ jest zbieżny i $|z-w| < \min(R_1, R_2)$, to

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-w)^n \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-w)^n}_{= g(z)} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-w)^n}_{= f(z)}.$$

Wiemy, że $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-w)^n$ jest zbieżny bezwzględnie, więc z tw. Mertensa

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-w)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-w)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k (z-w)^k \cdot c_{n-k} (z-w)^{n-k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^n \sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^n \left( b_0 c_n + \sum_{k=1}^{n} b_k c_{n-k} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^n \left( a_n - \sum_{k=1}^{n} b_k c_{n-k} + \sum_{k=1}^{n} b_k c_{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-w)^n .$$

Pozostaje więc wykazać, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-w)^n$ ma dodatni promień zbieżności.

Niech teraz $\varrho \in (0, \min(R_1, R_2))$. Wiemy, że dla $z = z_0 + \varrho$ szeregi $\sum a_n (z-z_0)^n$ i $\sum b_n (z-z_0)^n$ są zbieżne bezwzględnie, zatem zbieżne są szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \varrho^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \varrho^n$ $\Rightarrow \exists_{M>0} \forall_n$ $|a_n|\varrho^n < M$, $|b_n| \varrho^n < M$

(bo $|a_n|\varrho^n \to 0$ i $|b_n|\varrho^n \to 0$, a ciągi zbieżne są ograniczone).

Udowodnimy przez indukcję, że

$$|c_n| \leq \frac{M}{|b_0|\varrho^n}\left(1+\frac{M}{|b_0|}\right)^n \qquad (\star).$$

Dla $n=0$ $\quad |c_0| = \left|\frac{a_0}{b_0}\right| \leq \frac{M}{|b_0|}$.

Załóżmy, że $(\star)$ zachodzi dla $n = 1, 2, \ldots, m-1$.

$$|c_m| = \left|\frac{1}{b_0}\left(a_m - \sum_{k=1}^{m} b_k c_{m-k}\right)\right| \leq \frac{1}{|b_0|}\left(|a_m| + \sum_{k=1}^{m}|b_k||c_{m-k}|\right)$$

$$\leq \frac{1}{|b_0|}\left(\frac{M}{\varrho^m} + \sum_{k=1}^{m}\frac{M}{\varrho^k}\cdot\frac{M}{|b_0|\varrho^{m-k}}\left(1+\frac{M}{|b_0|}\right)^{m-k}\right) =$$

$$= \frac{M}{|b_0|\varrho^m}\left(1 + \frac{M}{|b_0|}\sum_{k=1}^{m}\left(1+\frac{M}{|b_0|}\right)^{m-k}\right) =$$

$$= \frac{M}{|b_0|\varrho^m}\left(1 + \cancel{\frac{M}{|b_0|}}\cdot\frac{\left(1+\frac{M}{|b_0|}\right)^m - 1}{\cancel{1+\frac{M}{|b_0|} - 1}}\right) =$$

$$= \frac{M}{|b_0|\varrho^m}\cdot\left(1+\frac{M}{|b_0|}\right)^m.$$

Stąd $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} \leq \limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{M}{|b_0|\varrho^n}\left(1+\frac{M}{|b_0|}\right)^n} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{M}{|b_0|}}\cdot\frac{1}{\varrho}\left(1+\frac{M}{|b_0|}\right) = \frac{1}{\varrho}\left(1+\frac{M}{|b_0|}\right)$$

więc promień zbieżności $R$ szeregu $\sum c_n(z-z_0)^n$ spełnia

$$R = \frac{1}{\limsup\sqrt[n]{|c_n|}} \geq \frac{\varrho}{1+M/|b_0|} > 0.$$

$\square$.

# Charakteryzacja funkcji analitycznych

Naszym celem jest dowód następującego twierdzenia:

**Twierdzenie**: Niech $U \subset \mathbb{R}$ (lub $\mathbb{C}$) będzie otwarty. Funkcja $f : U \to \mathbb{R}$ (lub $\mathbb{C}$) jest analityczna na $U$ wtedy i tylko wtedy, gdy

dla każdego $y \in U$ istnieją $r, C > 0$ t.ż. $B(y,r) \subset U$ oraz dla wszystkich $z \in B(y,r)$ i $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$|f^{(m)}(z)| \leq \frac{C\, m!}{r^m}. \qquad (*)$$

**Dowód**: Łatwo możemy sprawdzić, że jest to warunek dostateczny: jeżeli na kuli $B(y,r)$ zachodzi warunek $(*)$, to $\forall_{z \in B(y,r)}$

$$\left| f(z) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(y)}{j!}(z-y)^j \right| \leq \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |z-y|^{n+1}$$

dla pewnego $\xi$ między $z$ a $y$

$$\leq C \left( \frac{|z-y|}{r} \right)^{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

więc $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(y)}{j}(z-y)^j$ na $B(y,r)$.

{ Tu jest drobne oszustwo dla funkcji zespolonych: reszta w postaci Lagrange'a wyprowadziliśmy korzystając z tw. Cauchy'ego o wart. średniej (lub tw. Lagrange'a). Można to poprawić, korzystając z zespolonej „protezy" tw. Lagrange'a, którą dowodziliśmy przy okazji tw. o różniczkowaniu.

Pozostaje udowodnić, że jeżeli $f$ jest analityczna, to spełnia nierówność (*).

<u>Lemacik</u> $\sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)\,x^{k-m} = \frac{m!}{(1-x)^{m+1}}$ dla $x \in (-1,1)$.

Dowód zostawiam Państwu, wskazówka: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ gdy $x \in (-1,1)$.

---

Skoro $f$ jest analityczna, to dla każdego $y \in \mathcal{U}$ istnieje $\rho_y > 0$ t.ż. $B(y,\rho_y) \subset \mathcal{U}$ i $f$ jest w $B(y,\rho_y)$ sumą szeregu potęgowego wokół $y$, którego promień zbieżności jest co najmniej $\rho_y$.

Wiemy już też, że ten szereg potęgowy musi być szeregiem Taylora funkcji $f$ w punkcie $y$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(z-y)^k \quad \text{dla } z \in B(y,\rho_y).$$

Ustalmy $R \in (0,\rho_y)$; w punkcie $z = y+R$ powyższy szereg jest bezwzględnie zbieżny (bo $R$ jest mniejsze niż promień zbieżności): $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|f^{(k)}(y)|}{k!} R^k < \infty$, co w szczególności oznacza, że ciąg wyrazów tego ostatniego szeregu jest ograniczony (bo dąży do zera).

istnieje $\tilde{C} > 0$ t.ż. dla $k = 0,1,2,\dots$ $\frac{|f^{(k)}(y)|}{k!} R^k < C$

czyli równoważnie $|f^{(k)}(y)| < \frac{\tilde{C}\, k!}{R^k}$

(dla każdego $y \in \mathcal{U}$ istnieją $\tilde{C}, R > 0$ t. że ... ).

No dobrze, ale my chcemy, by ta nierówność zachodziła nie tylko w $y$, ale też we wszystkich $z \in B(y,r)$, dla pewnego $r>0$. (z $r$ w miejsce $R$ po prawej stronie).

Przyjmijmy $\tilde{r} = R/2$ i niech $z \in B(y,\tilde{r}) = B(y, R/2)$.

Mamy $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(z-y)^k$, zatem

$$f^{(m)}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-m+1)\frac{f^{(k)}(y)}{k!}(z-y)^{k-m},$$

więc

$$|f^{(m)}(z)| \leq \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-m+1)\frac{|f^{(k)}(y)|}{k!}|z-y|^{k-m}$$

$$\leq \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-m+1)\frac{\tilde{C}\, k!}{(2\tilde{r})^k}\,\frac{\tilde{r}^{k-m}}{k!} =$$

$$= \frac{\tilde{C}}{\tilde{r}^m}\sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-m+1)\cdot\frac{1}{2^k} \overset{\text{Lemacik}}{=} \frac{\tilde{C}\, m!}{\tilde{r}^m\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}} =$$

$$= \frac{2\tilde{C}\, m!}{(\tilde{r}/2)^m}$$ dla $z \in B(y,\tilde{r})$. Zatem dla $r = \frac{\tilde{r}}{2}$, $C = 2\tilde{C}$ i wszystkich $z \in B(y,r)$ $\quad |f^{(m)}(z)| \leq \frac{C\, m!}{r^m}$. $\square$.

Z istotnych operacji na funkcjach pozostało nam jeszcze ich składanie.

Na początek trochę kombinatoryki.

Łatwo można udowodnić, że dla dowolnych $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{N}$

$$(x_1+x_2+\dots+x_n)^k = \sum_{k_1+\dots+k_n=k} \frac{k!}{k_1!\,k_2!\dots k_n!} x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$$

(pewnie znają Państwo ten wzór, jeżeli nie – – proszę to potraktować jako proste zadanko).

bł. Francesco Faà di Bruno (1825 – 1888)

<u>Twierdzenie</u> (wzór Faà di Bruno). Załóżmy, że $A, B$ są otwarte w $\mathbb{R}$ (lub $\mathbb{C}$) i że $f \in C^\infty(A, B)$, $g \in C^\infty(B)$. Wówczas $h = g \circ f : A \to \mathbb{R}$ (lub $\mathbb{C}$) spełnia

$$h^{(n)}(t) = \sum \frac{n!}{k_1!\,k_2!\dots k_n!} g^{(k)}(f(t)) \cdot \prod_{i=1}^{n} \left( \frac{f^{(i)}(t)}{i!} \right)^{k_i}$$

gdzie $k = k_1 + \dots + k_n$ i sumę bierzemy po wszystkich $k_1, k_2, \dots, k_n$ takich, że $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$.

Sprawdźmy dla $n = 3$

$$(g(f(t)))''' = (g'(f(t))\cdot f'(t))'' = (g''(f(t))\cdot(f'(t))^2 +$$

$$+ g'(f(t))\cdot f''(t))' =$$

$$= g'''(f(t))\cdot(f'(t))^3 + g''(f(t))\cdot 2f'(t)f''(t) +$$

$$+ g''(f(t))\cdot f'(t)f''(t) + g'(f(t))\cdot f'''(t) =$$

$$= g'(f(t))\cdot f'''(t) + g''(f(t))\cdot 3f'(t)f''(t)$$

$$+ g'''(f(t))\cdot(f'(t))^3.$$

Jak teraz możemy we wzorze Faà di Bruno dobrać $k_1, k_2, k_3$, by $k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 3$?

| $k = k_1 + k_2 + k_3$ | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $= 1$ | $0$ | $+\,0$ | $+\,1$ | $g'(f(t))\cdot\left(\frac{f'''(t)}{3!}\right)^1\cdot\frac{3!}{0!\cdot 0!\cdot 1!}$ |
| $2$ | $1$ | $+\,1$ | $+\,0$ | $g''(f(t))\cdot\left(\frac{f'(t)}{1!}\right)^1\cdot\left(\frac{f''(t)}{2!}\right)^1\cdot\frac{3!}{1!\cdot 1!}$ |
| $3$ | $3$ | $+\,0$ | $+\,0$ | $g'''(f(t))\cdot\left(\frac{f'(t)}{1!}\right)^3\cdot\frac{3!}{3!\,0!\,0!}$ |

zgadza się.