Ciągi i szeregi funkcyjne

W zeszłym semestrze wielokrotnie zajmowaliśmy się badaniem ciągów i szeregów zależnych od parametru, począwszy od pytań typu

- dla jakich $x \in \mathbb{R}$ szereg $\sum \frac{1}{n^x}$ jest zbieżny

po

- jakie własności ma funkcja $a \mapsto \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ czy też $a \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$

i zadanie z ostatniego wykładu: co wiemy o funkcji $a \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$?

Pytamy, czy są to funkcje ciągłe? różniczkowalne?

W podanych wyżej przykładach ciągów i szeregów wyrazy szeregów i ciągów są różniczkowalne ∞-razy i podobnie zdefiniowane przez nie funkcje

$$\exp(a) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$$

czy

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n.$$

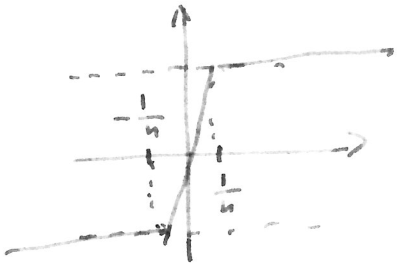
Czy to samo możemy powiedzieć o funkcji ζ Riemanna; $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$?

O granicy każdego ciągu funkcji ∞-razy różniczkowalnych i o sumie każdego takiego szeregu?

NIE.

Przykłady

• niech $f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \geq \frac{1}{n} \\ nx & x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ -1 & x \leq -\frac{1}{n} \end{cases}$



od razu widać, że $\forall_{x \in \mathbb{R}} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \operatorname{sgn} x$

funkcje ciągłe — nieciągła w 0.

No, ale f_n nie są różniczkowalne...

Zadanko: wykazać, że $\lim_{n \to \infty} \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n}\right) = \operatorname{sgn} x$

• $f_n(x) = x^n$ na przedziale $[0, 1]$

$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ funkcja nieciągła

Zadanie: Skonstruować ciąg funkcji ciągłych $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taki, że $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$ jest nieciągła na gęstym podzbiorze $\mathbb{R}$.

No to od czego zależy, czy granica ciągu funkcji o przyzwoitych cechach ~~ma te~~ dziedziczy te cechy po wyrazach ciągu?

Dotąd badaliśmy tzw. zbieżność punktową ciągów i szeregów.

<u>Def.</u> Mówimy, że ciąg funkcji (f_n), $f_n : A \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$ itp) dla $n = 1, 2, \dots$, zbiega punktowo do funkcji $f : A \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$ itp), jeżeli $\forall_{x \in A}$ $f_n(x) \to f(x)$, tzn

$$\forall_{x \in A} \ \forall_{\varepsilon > 0} \ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{zależy od } x \text{ i } n_0.}}{\exists_{n_0}} \ \forall_{n > n_0} \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

<u>Ozn:</u> $f_n \xrightarrow{n \to \infty} f$

$a_n : A \to \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$

Szereg funkcji $\sum a_n(x)$ zbiega punktowo do $S(x)$, jeżeli $\forall_{x \in A}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = S(x)$, a więc gdy ciąg sum częściowych $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ zbiega punktowo do $S(x)$.

<u>Def:</u> Ciąg funkcji $f_n : A \to \mathbb{R}$ zbiega <u>jednostajnie</u> do $f : A \to \mathbb{R}$, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{n_0} \ \forall_{x \in A} \ \forall_{n > n_0} \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

czyli gdy wybór n_0 możemy uniezależnić od $x \in A$.

Ozn.: $f_n \overset{n \to \infty}{\rightrightarrows} f$

Analogicznie szereg $\sum a_n(x)$ zbiega jednostajnie do $S(x)$, jeżeli $S_n \rightrightarrows S$.

Kryteria zbieżności jednostajnej

Jednostajny warunek Cauchy'ego

Niech, dla $n \in \mathbb{N}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$. Ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny na A wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n,m>n_0} \forall_{x\in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Uwaga: warunek $\forall_{x\in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ jest równoważny temu, że $\sup_{x\in A} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$,

a więc że $\|f_n - f_m\|_{A,\infty} \leq \varepsilon$,

a to oznacza że jednostajny warunek Cauchy'ego jest zwykłym warunkiem Cauchy'ego

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n,m>n_0} \|f_n - f_m\|_{A,\infty}$$

w sytuacji, gdy funkcje traktujemy jako punkty pewnej przestrzeni, na której odległość dana jest wzorem $d(f,g) = \|f-g\|_{A,\infty}$.

Dowód:

($\Rightarrow$) Wiemy, że $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n,m>n_0} \forall_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Wybierzmy zatem n i m większe od n_0. Mamy

$$\forall_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{oraz} \quad |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

skąd $\forall_{x\in A} |f_n(x) - f_m(x)| \overset{n.\Delta}{\leq} |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| <$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Jednostajny warunek Cauchy'ego pociąga za sobą to, że dla dowolnego $x \in A$ ciąg $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia (zwyczajny) warunek Cauchy'ego, a więc $\forall_{x\in A}$ $(f_n(x))$ jest zbieżny do jakiegoś $f(x)$.

Wiemy zatem, że ciąg (f_n) jest zbieżny punktowo do pewnego $f: A \to \mathbb{R}$.

Wypiszmy jednostajny warunek Cauchy'ego:

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_1} \forall_{n,m>n_1} \forall_{x\in A} \ |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

i przejdźmy z m do ∞. Z ciągłości modułu i tego, że $f_m(x) \xrightarrow[m\to\infty]{} f(x)$ dostajemy

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_1} \forall_{n>n_1} \forall_{x\in A} \ |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

co (z definicji) oznacza, że $f_n \rightrightarrows f$ na A.

<u>Kryterium Weierstrassa</u>

Jeżeli $\forall_{x\in A}$ $|b_n(x)| \leq a_n$ oraz szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na A.

<u>Dowód:</u>

Wykażemy, że ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x)$ spełnia na A jednostajny warunek Cauchy'ego.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, więc jego ciąg sum częściowych spełnia warunek Cauchy'ego:

$$\exists_{n_0} \forall_{\substack{n,m>n_0 \\ m>n}} \ \sum_{k=n+1}^{m} a_k < \varepsilon$$

(<u>uwaga</u>: $\forall_k$ $a_k \geq 0$, więc moduł niepotrzebny)

Teraz $\forall_{x\in A} \forall_{\substack{m,n>n_0\\ m>n}} \left|\sum_{k=0}^{m} b_k(x) - \sum_{k=0}^{n} b_k(x)\right| =$

$$= \left|\sum_{k=n+1}^{m} b_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{m} |b_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{m} a_k < \varepsilon .$$

$\square$.

Kryterium Weierstrassa jest bardzo wygodne, ale ma pewne ograniczenia – przede wszystkim przy jego pomocy badamy jedynie jednostajną bezwzględną zbieżność (jeżeli $\sum b_n(x)$ spełnia założenia kryt. Weierstrassa, to $\forall_{x\in A} \sum b_n(x)$ jest bezwzględnie zbieżny).

Przykład zastosowania:
szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ jest jednostajnie zbieżny na półprostej (a,∞) dla dowolnego $a>1$, gdyż dla $x\in(a,\infty)$

$$\left|\frac{1}{n^x}\right| < \frac{1}{n^a},$$ a szereg $\sum \frac{1}{n^a}$ jest zbieżny.

Szereg ten definiuje nam bardzo ważną funkcję

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \quad \text{zeta Riemanna}$$

jedną z najważniejszych funkcji w analitycznej teorii liczb, o zastosowaniach w wielu innych dziedzinach matematyki. Tu zdefiniowaliśmy ją dla $x\in(1,\infty)$; można ją rozszerzyć do funkcji określonej na $\mathbb{C}\setminus\{1\}$; pytanie o położenie miejsc zerowych tej funkcji jest treścią tzw. hipotezy Riemanna, jednego z najważniejszych otwartych problemów matematyki. (wartego 1M\$ – jest to jeden z Problemów Milenijnych)

Hipoteza Riemanna – postawiona w 1859 przez B. Riemanna; część VIII problemu Hilberta (1900); IV problem milenijny (2000).

Kryteria Abela i Dirichleta

Załóżmy, że $\forall_{n\in\mathbb{N}}$ $f_n : A \to \mathbb{R}$, $g_n : A \to \mathbb{R}$ i $\forall_{n\in\mathbb{N}}$ $f_n \geqslant 0$ oraz że $\forall_{x\in A}$ ciąg $(f_n(x))$ jest nierosnący. Jeżeli

(Abel) szereg $\sum g_n$ jest jednostajnie zbieżny i funkcja f_1 jest ograniczona

lub (Dirichlet) sumy częściowe szeregu $\sum g_n$ są wspólnie (tzn. w sposób niezależny od x) ograniczone, a (f_n) jednostajnie dąży do 0,

to szereg $\sum_n f_n g_n$ jest jednostajnie zbieżny.

<u>Lemacik</u>: Niech $G_l = \sum_{k=1}^{l} g_k$. Wówczas

$$\sum_{k=n+1}^{m} f_k g_k = \sum_{k=n+1}^{m} (G_k - G_n)(f_k - f_{k+1}) + (G_m - G_n) f_{m+1}$$

<u>Dowód lemaciku</u> Moglibyśmy ten wzór dostać dwukrotnie stosując przekszt. Abela, ale łatwiej przez indukcję po m:

~~m=k~~

$\boxed{m = n+1}$

$$f_{n+1} g_{n+1} \overset{?}{=} (G_{n+1} - G_n)(f_{n+1} - f_{n+2}) + (G_{n+1} - G_n) f_{n+2}$$
$$= g_{n+1} f_{n+1} - \cancel{g_{n+1} f_{n+2}} + \cancel{g_{n+1} f_{n+2}} \quad . \quad \text{ok.}$$

Załóżmy, że wzór jest prawdziwy dla pewnego m,

tj. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} f_k g_k = \sum_{k=n+1}^{m} (G_k - G_n)(f_k - f_{k+1}) + (G_m - G_n) f_{m+1}$

wtedy

$$\sum_{k=n+1}^{m+1} f_k g_k = \sum_{k=n+1}^{m} f_k g_k + f_{m+1} g_{m+1} \overset{\text{z. I.}}{=} \sum_{k=n+1}^{m} (G_k - G_n)(f_k - f_{k+1})$$
$$+ (G_m - G_n) f_{m+1} + f_{m+1} g_{m+1} =$$
$$= \sum_{k=n+1}^{m+1} (G_k - G_n)(f_k - f_{k+1}) - (G_{m+1} - G_n)(f_{m+1} - f_{m+2})$$
$$+ (G_m - G_n) f_{m+1} + f_{m+1} g_{m+1} = \sum_{k=n+1}^{m+1} (G_k - G_n)(f_k - f_{k+1})$$
$$+ f_{m+1} \left(-\cancel{G_{m+1}} + \cancel{G_n} + \cancel{G_m} - \cancel{G_n} + \cancel{g_{m+1}} \right) + (G_{m+1} - G_n) f_{m+2}$$

$\square$.

Po co nam lemacik? bo jego lewa strona to wielkość, która ma być mała w jednostajnym warunku Cauchy'ego.

Dowód kryt. A & D.

<u>Abel:</u> $\sum g_n$ jest zbieżny jednostajnie $\Rightarrow$
(G_n) spełnia jednost. warunek Cauchy'ego :

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0}\ \forall_{k,l>n_0}\ \forall_{x\in A}\quad |G_k(x)-G_l(x)| < \frac{\varepsilon}{2\sup_A f_1}$$

chyba, że $\sup_A f_1 = 0$, ale wtedy $f_1 \equiv 0 \Rightarrow \forall_n\ f_n \equiv 0$
i oczywiście $\sum f_n g_n$ jest jednost. zbieżny.

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k g_k\right| \overset{L}{\leq} \Bigg|\sum_{k=n+1}^{m} \underbrace{(G_k-G_n)}_{\substack{\text{co do}\\ \text{modułu} < \frac{\varepsilon}{2\sup_A f_1}}} \underbrace{(f_k-f_{k+1})}_{\geq 0 \text{ z zał. o } (f_n)}\Bigg| + \big|\underbrace{(G_m-G_n)}\, \underset{\substack{\vee\!\mid\\ 0}}{f_{m+1}}\big|$$

co do modułu $< \frac{\varepsilon}{2\sup_A f_1}$, o ile $m, n > n_0$.

$$\leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{m} \underset{\substack{\vee\!\mid\\ 0}}{(f_k-f_{k+1})}}_{= f_{n+1}-f_{m+1} \leq \sup f_1} \frac{\varepsilon}{2\sup f_1} + \frac{\varepsilon}{2\sup f_1} \underbrace{f_{m+1}}_{\leq \sup f_1}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Stąd $\sum f_n g_n$ spełnia jednost. warunek Cauchy'ego.

<u>Dirichlet</u> Ustalmy $\varepsilon > 0$

$$\exists_M \ \forall_{k\in\mathbb{N}} \ \forall_{x\in A} \ |G_k(x)| < M,$$

$$f_n \rightrightarrows 0 \Rightarrow \exists_{n_0} \ \forall_{n>n_0} \ \sup_A f_n < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k g_k(x)\right| \overset{L}{\leq} \left|\sum_{k=n+1}^{m} (G_k - G_n)(f_k - f_{k+1})\right| +$$

$$+ \left|(G_m - G_n) f_{m+1}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{m} 2M\left(f_k(x) - f_{k+1}(x)\right) + 2M f_{m+1}(x) \leq$$

$$\cancel{\leq} = 2M\left(\cancel{|}f_{n+1}(x) - f_{m+1}(x)\cancel{|} + |f_{m+1}(x)|\right)$$

$$= 2M f_{n+1}(x) \leq 2M \cdot \sup_A f_{n+1} < \cancel{\tfrac{\varepsilon}{2}} \ \varepsilon.$$

Zastosowania niebawem.

Ulisse Dini (1845–1918) – włoski matematyk i polityk. Całe życie związany był z Pizą: tam się urodził, tam zaczął studia na Scuola Normale Superiore di Pisa (wówczas szkole nauczycielskiej przy Uniwersytecie pizańskim). W 1865 wygrał konkurs na kontynuację studiów w Paryżu. Po powrocie objął na uniwersytecie katedrę analizy i geometrii wyższej, a od 1877 również drugą katedrę analizy infinitezymalnej. Od 1871 zajmuje się też polityką: jest radnym Pizy w latach 1871–1880, posłem do parlamentu 1880–1892, rektorem uniwersytetu 1888–1890, senatorem Republiki od 1892; od 1908 – dyrektorem Scuola Normale Superiore. Zajmował się głównie analizą funkcji jednej zmiennej, szeregami Fouriera, jest autorem licznych przykładów i kontrprzykładów. Pamiętamy jest poprzez poniższe twierdzenie, a także tzw. warunek Diniego – uogólnienie warunku Lipschitza i Höldera, i związane z nim kryterium Diniego w teorii szeregów Fouriera.

Tw. Diniego Załóżmy, że ciąg (f_n) funkcji $f_n : A \to \mathbb{R}$ jest punktowo zbieżny do pewnej funkcji $f : A \to \mathbb{R}$. Załóżmy dodatkowo, że

(1) zbiór A jest zwarty
(2) funkcje f_n są ciągłe
(3) funkcja f jest ciągła
(4) dla każdego $x \in A$ ciąg $(f_n(x))$ jest niemalejący.

Wówczas $f_n \rightrightarrows f$ na A.

Uwaga 1: Założenie, że $(f_n(x))$ jest niemalejący można zastąpić przez ($\forall_x$ $(f_n(x))$ jest nierosnący)

Zadanka: • Wykazać, konstruując kontrprzykłady, że żadnego z 4 założeń nie można pominąć.

• czy w (4) możemy założyć tylko, że $\forall_x$ $(f_n(x))$ jest monotoniczny?

Dowód (nie wprost) Załóżmy, że $f_n \not\rightrightarrows f$, a więc $\sup_A |f_n - f| \not\to 0$. Wtedy, dla pewnego $\varepsilon > 0$, znajdę podciąg (n_m) t.że $\sup_A |f_{n_m} - f| \geq \varepsilon$.

A zwarty, więc to supremum jest osiągane w pewnym punkcie $x_{n_m} \in A$:

Wtedy $\forall_m \quad |f_{n_m}(x_{n_m}) - f(x_{n_m})| \geq \varepsilon$

$$= f(x_{n_m}) - f_{n_m}(x_{n_m}),$$ bo ciąg $f_k(x)$ jest niemalejący, więc $\forall_x \; f(x) \geq f_k(x)$

Z ciągu (x_{n_m}) wybieramy podciąg zbieżny $(x_{n_{m_k}}) \xrightarrow{k\to\infty} x \in A$.

$$f(x_{n_{m_k}}) - f_{n_{m_k}}(x_{n_{m_k}}) \geq \varepsilon.$$

Ustalmy $j \in \mathbb{N}$. Dla $k > j$ $\quad n_{m_k} > j$ (dlaczego?)

i wtedy, dla $k > j$, $\quad f_j(x_{n_{m_k}}) \leq f_{n_{m_k}}(x_{n_{m_k}}) \leq f(x_{n_{m_k}})$

więc $\quad f(x_{n_{m_k}}) - f_j(x_{n_{m_k}}) \geq f(x_{n_{m_k}}) - f_{n_{m_k}}(x_{n_{m_k}}) \geq \varepsilon$

$\swarrow k \to \infty$

$$f(x) - f_j(x)$$

czyli dla każdego $j \in \mathbb{N}$ $\quad f(x) - f_j(x) \geq \varepsilon$,

ale $\quad f_j(x) \xrightarrow[j\to\infty]{} f(x) \quad$ ↯ .

Tw. Polya (zwane też drugim tw. Diniego)

Załóżmy, że funkcje $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ zbiegają punktowo do funkcji $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ oraz że

(1) funkcje f_n są, dla każdego n, niemalejące

(2) funkcja f jest ciągła na $[a,b]$

Wówczas $f_n \rightrightarrows f$.

György / George / Jerzy Polya (1887 – 1985)
węgiersko - amerykański matematyk, jeden z największych matematyków XX wieku. Jego ojciec nosił nazwisko Pollák, ale zmienił je w 1882 roku na bardziej węgiersko brzmiące (i nie jednoznacznie żydowskie, w odróżnieniu od poprzedniego) Polya. Studiował w Budapeszcie, Wiedniu (m.in. u Mertensa), Getyndze (u Kleina, Hilberta i innych), Paryżu, w końcu zatrudniono go w ETH w Zurichu. Tam pracował do 1940 roku, ~~odwi~~ z przerwami na dłuższe pobyty w Londynie (Hardy, Littlewood) i Princeton; w 1940 roku wyjechał do USA i osiadł na Uniw. Stanford.
Ojciec heurystyki matematycznej - znają Państwo pewnie jego książkę „Jak to rozwiązać?" - jeżeli nie, to proszę się z nią zaprzyjaźnić. Miał ogromny wkład w kombinatorykę, fizykę matematyczną, rachunek prawdopodobieństwa, geometrię algebraiczną, analizę zespoloną, równania różniczkowe....
i w nauczanie matematyki na wszystkich poziomach.

Dowód tw. Polya

f jest ciągła na $[a,b]$, jest więc jednost. ciągła: $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x,y\in[a,b]}\ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$

Ustalamy $\varepsilon>0$ i dobieramy doń $\delta>0$.

Dzielimy $[a,b]$:

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k = b \qquad x_i - x_{i-1} < \delta$$

dla $i=1,2,\ldots,k$.

Punktów (x_i) jest skończenie wiele,

$f_n(x_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_i)$ dla $i=0,1,2,\ldots,k$, więc

znajdziemy $n_0\in\mathbb{N}$ tż $\forall_{n>n_0} \forall i\in\{0,1,\ldots,k\}$

$|f_n(x_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Skoro $\forall_n$ f_n jest niemalejąca, tj

$$\forall_{\substack{x,y\in[a,b]\\ x<y}} \qquad f_n(x) \leq f_n(y)$$

$$\downarrow n\to\infty$$

$$f(x) \leq f(y)$$

czyli to f też jest niemalejąca.

Niech teraz $x\in[a,b]$. Istnieje ~~$i\in\{0,1,\ldots,k+1\}$ tże~~

$i\in\{1,2,\ldots,k\}$ tż $\quad x_{i-1} \leq x \leq x_i$

więc
$$f_n(x_{i-1}) \leq f_n(x) \leq f_n(x_i)$$
$$f(x_{i-1}) \leq f(x) \leq f(x_i)$$

Dla $n>n_0$

$$f(x)-f_n(x) \leq f(x_{i+1}) - f_n(x_i) \leq |f(x_{i+1})-f(x_i)| +$$
$$+|f(x_i)-f_n(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Analogicznie

$$f_n(x) - f(x) \leq f_n(x_{i+1}) - f(x_i) \leq$$

$$\leq \underbrace{|f_n(x_{i+1}) - f(x_{i+1})|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{|f(x_{i+1}) - f(x_i)|}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon,$$

Stąd $\forall_{x\in[a,b]} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, o ile $n > n_0$.

$\square$.

Tw. Weierstrassa (o przybliżaniu funkcji ciągłych wielomianami) 1885

Każda funkcja ciągła na $[a,b]$ o wartościach rzeczywistych jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów o współczynnikach rzeczywistych.

Równoważnie: każdą funkcję $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, ciągłą na $[a,b]$, można przybliżyć z zadaną dokładnością wielomianem $P:[a,b]\to\mathbb{R}$, tzn.

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\substack{P:[a,b]\to\mathbb{R}\\ \text{wielomian}}}\ \forall_{x\in[a,b]}\ |f(x)-P(x)|<\varepsilon.$$

W latach 30-tych XX wieku wielki matematyk amerykański, Marshall Harvey Stone (1903-1989, jeden z ojców współczesnej analizy funkcjonalnej) podał ważne uogólnienie tego twierdzenia, znane dziś jako tw. Stone'a-Weierstrassa.

Tw. Stone'a-Weierstrassa (wersja rzeczywista)

Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną funkcji ciągłych na zbiorze zwartym K, o wartościach rzeczywistych. Załóżmy, że

(1) $\mathcal{A}$ jest algebrą rzeczywistą, tzn. dla dowolnych $f,g\in\mathcal{A}$ oraz $\lambda\in\mathbb{R}$ mamy $\lambda f\in\mathcal{A}$, $f+g\in\mathcal{A}$, $f\cdot g\in\mathcal{A}$.

(2) $\mathcal{A}$ rozdziela punkty zbioru K, tzn. dla dowolnych różnych punktów $x, y \in K$ istnieje $f \in \mathcal{A}$ taka, że $f(x) \neq f(y)$

(3) $\mathcal{A}$ nie znika w żadnym punkcie K, tzn.
$\forall_{x \in K} \exists_{f \in \mathcal{A}} \quad f(x) \neq 0.$

Wówczas każda funkcja ciągła $f: K \to \mathbb{R}$ jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji z $\mathcal{A}$, czyli – równoważnie – $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{h \in \mathcal{A}} \forall_{x \in K} \ |f(x) - h(x)| < \varepsilon$

Do dowodu potrzebujemy kilku lematów.
Po pierwsze – ważnej własności zbiorów zwartych, opisanej przez poniższe twierdzenie:

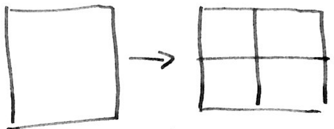
<u>Twierdzenie Heine-Borela</u>:

Niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem zwartym, a $\{U_j\}_{j \in J}$ niech będzie rodziną zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^n$ taką, że $K \subset \bigcup_{j \in J} U_j$ ($\{U_j\}$ nazywamy pokryciem zbioru K).
Wówczas istnieją $j_1, \dots, j_m \in J$ takie że
$K \subset U_{j_1} \cup U_{j_2} \cup \dots \cup U_{j_m}$.

<u>Inaczej</u>: Z każdego pokrycia zbioru zwartego K można wybrać podpokrycie skończone.

Nie wprost.

Dowód: Zacznijmy jak w tw. Bolzano-Weierstrassa: istnieje $M > 0$ takie, że $K \subset [-M, M]^n = Q_0$.

Kostkę Q_0 możemy podzielić na 2^n identycznych kostek $Q_{1,i}$, $i = 1, 2, \dots, 2^n$;  , w ten sposób dzielimy K na 2^n zwartych podzbiorów $K_{1,i} = K \cap Q_{1,i}$.

Gdyby do pokrycia każdego z $K_{1,i}$ wystarczało skończenie wiele zbiorów rodziny $\{U_j\}$, to również K można by przykryć skończoną liczbą zbiorów z $\{U_j\}$.

Stąd wśród $\{K_{1,i}\}_{i=1,\dots,2^n}$ istnieje K_{1,i_1}, który nie daje się przykryć skończoną liczbą zbiorów z $\{U_j\}$.

No to teraz dzielimy dalej Q_{1,i_1} na 2^n kostek $Q_{2,i}$, $i = 1, 2, \dots, 2^n$, i dostajemy $K_{2,i} = Q_{2,i} \cap K$.

Wśród nich znajdziemy K_{2,i_2}, którego nie da się pokryć skończoną liczbą zbiorów z U_j, itd...

W ten sposób otrzymujemy ciąg K_{ℓ,i_ℓ} zwartych podzbiorów K, $K \supset K_{1,i_1} \supset K_{2,i_2} \supset \dots$.

Dla każdego $\ell = 1, 2, \dots$ znajdziemy parę punktów x_ℓ, y_ℓ o tej własności, że nie istnieje $U \in \{U_i\}_{i \in J}$ takie, że oba należą do U.

Łatwo widzimy, że (x_ℓ) jest ciągiem Cauchy'ego

$$\left(\text{dla } m > \ell \quad |x_\ell - x_m| \le \operatorname{diam} Q_{\ell,i_\ell} = \sqrt{n} \cdot 2^{-\ell} \cdot 2M \xrightarrow{\ell \to \infty} 0\right),$$

więc $x_\ell \longrightarrow x \in K$; oczywiście $|x_\ell - y_\ell| \le$ —— " —— $\to 0$, więc również $y_\ell \to x$.

Z drugiej strony $x \in K_\ast \subset \bigcup_{j\in J} U_j$, więc dla pewnego $j \in J$ $x \in U_j$. Zbiór U_j jest otwarty $\Leftarrow$ zawiera, wraz z x, pewną kulę o środku w x i promieniu $\varepsilon > 0$.

Skoro $x_\ell \to x$ i $y_\ell \to x$, to dla dost. dużych ℓ

$|x_\ell - x| < \varepsilon$ i $|y_\ell - x| < \varepsilon \Rightarrow x_\ell \in U_j$ oraz $y_\ell \in U_j$ $\lightning$.

<u>Lemat 1</u>: Ustalmy $x_1, x_2 \in K$ oraz stałe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Wówczas istnieje $f \in \mathcal{A}$ takie, że $f(x_1) = \lambda_1$, $f(x_2) = \lambda_2$

<u>Dowód lematu</u>

Z założeń o $\mathcal{A}$ znajdziemy $g \in \mathcal{A}$ takie, że $g(x_1) \neq g(x_2)$; $h \in \mathcal{A}$ takie, że $h(x_1) \neq 0$ oraz $k \in \mathcal{A}$ takie, że $k(x_2) \neq 0$.

Zdefiniujmy $u(x) = (g(x) - g(x_1))\,k(x)$; $u \in \mathcal{A}$

Wtedy $u(x_1) = 0$, $u(x_2) \neq 0$

Analogicznie $v(x) = (g(x) - g(x_2))\,h(x)$; $v \in \mathcal{A}$

$v(x_1) \neq 0$, $v(x_2) = 0$.

Teraz kładziemy $f(x) = \dfrac{\lambda_1 v(x)}{v(x_1)} + \dfrac{\lambda_2 u(x)}{u(x_2)}$.

$\square$.

Lemat 2

Niech $\mathcal{B}$ oznacza rodzinę wszystkich funkcji, które są jednostajnymi granicami ciągów funkcji z $\mathcal{A}$ (mówimy, że $\mathcal{B}$ jest jednostajnym domknięciem zbioru $\mathcal{A}$). Wówczas $\mathcal{B}$ też jest algebrą.

Dowód zostawiam Państwu jako zadanko, poniżej wskazówki:

- trzeba wykazać, że jeżeli $f_n \rightrightarrows f$, to dla $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda f_n \rightrightarrows \lambda f$; a jeżeli dodatkowo $g_n \rightrightarrows g$, to
$$f_n g_n \rightrightarrows fg$$
$$f_n + g_n \rightrightarrows f + g.$$
- pomocne będzie to, że funkcje f i f_n, g i g_n są ciągłe na zbiorze zwartym K, więc są ograniczone, a jeżeli $f_n \rightrightarrows f$, to ciąg (f_n) jest <u>wspólnie</u> ograniczony (uzasadnić!).

Lemat 3 (szczególny przypadek tw. Weierstrassa).

Funkcja $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, $a > 0$ jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów o wsp. rzeczywistych.

Dowód w zadaniach

Rozważmy ciąg rekurencyjny

$$P_0 = 0, \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x^2 - P_n^2(x)}{2}.$$

Oczywiście dla każdego $n \in \mathbb{N}$ funkcja P_n jest wielomianem.

- sprawdzić, że $\forall_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$
$$|x| - P_{n+1}(x) = \big(|x| - P_n(x)\big)\left(1 - \frac{|x| + P_n(x)}{2}\right)$$
- wykazać, że ciąg $(P_n(x))$ jest dla każdego $x \in [-1,1]$
  - nieujemny
  - niemalejący
  - ograniczony z góry przez $|x|$
- wywnioskować, że $P_n(x) \longrightarrow |x|$
- wykazać, że dla $n = 0, 1, 2, \dots$ i $|x| \leq 1$
$$0 \leq |x| - P_n(x) \leq |x|\left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^n$$
wskazówka – indukcja
- wywnioskować, że dla $|x| \leq 1$ $0 \leq |x| - P_n(x) \leq \frac{2}{n+1}$,
więc $P_n(x) \rightrightarrows |x|$ na $[-1,1]$

- wywnioskować stąd, że $\widetilde{P}_n(x) = P_n\left(\frac{x}{a}\right)$
spełnia $\widetilde{P}_n \rightrightarrows f$ na $[-a,a]$
- zauważyć przy okazji, że $\forall_n \; P_n(0) = 0$.

Dowód tw. Stone'a - Weierstrassa

Jak w Lemacie 2, oznaczmy przez $\mathcal{B}$ rodzinę tych wszystkich funkcji, które są granicami jednostajnie zbieżnych ciągów funkcji z $\mathcal{A}$.

Równoważnie: są przybliżalne z ustaloną dokładnością funkcjami z $\mathcal{A}$.

Wiemy, że $\mathcal{B}$ jest algebrą i że

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{C}(K) \leftarrow \text{algebra wszystkich funkcji ciągłych na } K;$$

skoro $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, to również $\mathcal{B}$ rozdziela punkty K i nie znika w żadnym punkcie K.

Dowód będzie w 4 krokach, dowodzonych po kolei.

Krok 1 Jeżeli $f \in \mathcal{B}$, to $|f| \in \mathcal{B}$.

Dowód Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $a = \sup_K |f|$.

Z Lematu 3. istnieje wielomian $P : [-a, a] \to \mathbb{R}$ taki, że $\forall_{y \in [-a,a]} \ \big| P(y) - |y| \big| < \varepsilon/2$.

W szczególności $\forall_{x \in K} \ \big| P(f(x)) - |f(x)| \big| < \varepsilon/2$

Zauważmy jednak, że jeżeli $P(y) = \sum_{i=0}^{m} c_i y^m$, to $P(f) = \sum_{i=0}^{m} c_i f^m$ i jeżeli $f \in \mathcal{B}$, to $P(f) \in \mathcal{B}$, bo $\mathcal{B}$ jest algebrą.

Stąd $P(f)$ można przybliżyć z dokładnością $\frac{\varepsilon}{2}$ funkcją $h \in \mathcal{A}$: $\forall_{x \in K} \ |P(f(x)) - h(x)| < \varepsilon/2$.

Wtedy $\forall_{x \in K} \ \big| h(x) - |f(x)| \big| \leq |h(x) - P(f(x))| + \big| P(f(x)) - |f(x)| \big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Krok 2

Jeżeli $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{B}$, to $\min(f_1, \dots, f_m)$ oraz $\max(f_1, \dots, f_m)$ też należą do $\mathcal{B}$.

Dowód.

$\min(f_1, \dots, f_m) = \min(\min(f_1, \dots, f_{m-1}), f_m)$, analogicznie maksimum, więc wystarczy udowodnić, że gdy $f, g \in \mathcal{B}$, to $\min(f, g)$ i $\max(f, g) \in \mathcal{B}$, a dalej przez indukcję.

Mamy jednak
$$\min(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$$
$$\max(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2},$$
więc teza wynika z kroku 1 i tego, że $\mathcal{B}$ jest algebrą.

Krok 3 Umiemy w każdym punkcie $x \in K$, dla zadanej funkcji ciągłej f, zbliżyć się funkcjami z $\mathcal{B}$ „od góry": Niech $f: K \to \mathbb{R}$ będzie ciągła.

Dla każdego $x \in K$ i $\varepsilon > 0$ istnieje $g_x \in \mathcal{B}$ taka, że $g_x(x) = f(x)$,
$$g_x(t) > f(t) - \varepsilon \text{ dla wszystkich } t \in K$$

Dowód: Ustalmy $x \in K$ i $\varepsilon > 0$.

Dla każdego $y \in K$ znajdziemy (Lemat 1) funkcję $h_y \in \mathcal{B}$ spełniającą $h_y(x) = f(x)$

a nawet w $\mathcal{A}$

$$h_y(y) = f(y)$$

Funkcja ciągła $h_y - f : K \to \mathbb{R}$ spełnia $(h_y - f)(y) = 0$, więc istnieje zbiór otwarty $\mathcal{U}_y$ taki, że dla $t \in K \cap \mathcal{U}_y$ $(h_y - f)(t) > -\varepsilon$, czyli

$$h_y(t) > f(t) - \varepsilon.$$

Oczywiście $y \in \mathcal{U}_y$, zatem $\bigcup_{y \in K} \mathcal{U}_y \supset K$, czyli $\{\mathcal{U}_y : y \in K\}$ jest pokryciem zbioru K.

Z tw. Heine - Borela istnieją $y_1, \dots, y_m \in K$ takie, że $K \subset \mathcal{U}_{y_1} \cup \mathcal{U}_{y_2} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{y_m}$.

Niech $g_x = \max(h_{y_1}, \dots, h_{y_m})$. Z Kroku 2. $g_x \in \mathcal{B}$; jeżeli $t \in K$, to $\exists_{i \in \{1, \dots, m\}}$ $t \in \mathcal{U}_{y_i}$, więc

$$g_x(t) \geq h_{y_i}(t) > f(t) - \varepsilon,$$ zaś

$$g_x(x) = \max(h_{y_1}(x), \dots, h_{y_m}(x)) = f(x).$$

Krok 4 Niech $f: K \to \mathbb{R}$ będzie ciągła.

Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $h \in \mathcal{B}$ taka, że

$$\forall_{x \in K} \; |f(x) - h(x)| < \varepsilon.$$

Dowód Z kroku 3 dla każdego $x \in K$ znajdziemy $g_x \in \mathcal{B}$ takie, że $g_x(x) = f(x)$,
$g_x(t) > f(t) - \varepsilon$ dla $t \in K$.

Skoro $g_x(x) = f(x)$, to $g_x(t) < f(t) + \varepsilon$ dla t dostatecznie bliskich x, a więc z $K \cap V_x$, gdzie V_x jest niepustym zbiorem otwartym. ($x \in V_x$)

Jak w Kroku 3, $K \subset \bigcup_{x \in K} V_x$, więc z tw. Heine-Borela istnieją $x_1, \ldots, x_m$ takie, że $K \subset V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_m}$.

Bierzemy $h = \min(g_{x_1}, \ldots, g_{x_m})$, oczywiście $h \in \mathcal{B}$ i

$$f(t) - \varepsilon < g_{x_i}(t) = h(t) \le g_{x_j}(t) < f(t) + \varepsilon$$

dla wszystkich $t \in K$ i dowolnego i; dla jakiegoś i; dla dowolnego j; dla $t \in V_{x_j}$

a że każde $t \in K$ należy do jakiegoś V_{x_j}, to $\forall_{t \in K} \; f(t) - \varepsilon < h(t) < f(t) + \varepsilon$.

Końcówka:

Ustalmy $\varepsilon>0$, dla funkcji ciągłej $f: K \to \mathbb{R}$ znajdziemy $\tilde{h} \in \mathcal{B}$ tż $\forall_{x \in K} |\tilde{h}(x) - f(x)| < \varepsilon$,

a dla $\tilde{h} \in \mathcal{B}$ znajdziemy $h \in \mathcal{A}$ tż $\forall_{x \in K} |\tilde{h}(x) - h(x)| < \varepsilon$.

Wtedy $\forall_{x \in K} |f(x) - h(x)| < 2\varepsilon$.

$\square$.

A co z funkcjami o wartościach zespolonych?

Okazuje się, że potrzebujemy wówczas dodatkowego warunku:

Twierdzenie (Stone'a – Weierstrassa, wersja zespolona)

Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną funkcji ciągłych na zbiorze zwartym K, o wartościach zespolonych.

Załóżmy, że

(1) $\mathcal{A}$ jest algebrą zespoloną, tzn. dla dowolnych $f, g \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ mamy $\lambda f \in \mathcal{A}$, $f+g \in \mathcal{A}$, $f \cdot g \in \mathcal{A}$

(1') $\mathcal{A}$ jest samosprzężona, tzn. jeżeli $f \in \mathcal{A}$, to $\overline{f} \in \mathcal{A}$

(2) $\mathcal{A}$ rozdziela punkty K

(3) $\mathcal{A}$ nie znika w żadnym punkcie K

Wówczas dla każdej funkcji ciągłej $f: K \to \mathbb{C}$ i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $h \in \mathcal{A}$ tż $\forall_{x \in K} |f(x) - h(x)| < \varepsilon$

Dowód:

Oznaczmy przez $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ podrodzinę rodziny $\mathcal{A}$ złożoną z tych funkcji z $\mathcal{A}$, które mają wartości rzeczywiste.

Niech teraz $f \in \mathcal{A}$ i niech $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, a więc $f = u + iv$, gdzie $u, v : K \to \mathbb{R}$.

Zauważmy teraz, że $u = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$, $v = \frac{1}{2i}(f - \overline{f})$, więc z założeń o $\mathcal{A}$ wynika, że $u, v \in \mathcal{A}$, a że są to funkcje o wartościach rzeczywistych, to $u, v \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$. Oczywiście $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ jest też algebrą rzeczywistą.

Wykażemy teraz, że $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ spełnia pozostałe założenie Tw. Stone'a-Weierstrassa w wersji rzeczywistej:

- $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ rozdziela punkty: jeżeli $x, y \in K$, $x \neq y$, to istnieje $f \in \mathcal{A}$ t.ż. $f(x) = 1$, $f(y) = 0$ (Lemat $1\frac{1}{2}$, dowód w $\mathbb{C}$ bez zmian).

  Wtedy $u = \operatorname{Re} f \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$, $u(x) = 1$, $u(y) = 0$.

- $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ nie znika w żadnym punkcie:

Skoro $\mathcal{A}$ nie znika w żadnym punkcie, to $\forall_{x \in K} \exists_{g \in \mathcal{A}}\ g(x) \neq 0$. Wtedy $f(t) = \overline{g(x)}\, g(t)$ należy do $\mathcal{A}$ i $f(x) = |g(x)|^2 > 0$, więc $u = \operatorname{Re} f \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ i $u(x) > 0$.

To oznacza, że każdą funkcję ciągłą o wartościach rzeczywistych na K można przybliżać funkcjami z $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$.

Niech teraz $f : K \to \mathbb{C}$ będzie ciągła, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Istnieją $p, r \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ takie, że $\sup_K |p-u| < \varepsilon$ i $\sup_K |r-v| < \varepsilon$.

Wtedy, dla $g = \underset{\mathcal{A}}{\underset{\cap}{p}} + i \underset{\mathcal{A}}{\underset{\cap}{r}} \in \mathcal{A}$ mamy

$$\sup_K |f-g| = \sup_K \sqrt{(p-u)^2 + (r-v)^2} < \sqrt{2}\,\varepsilon .$$

$\square$.

Jeszcze parę uwag o tw. Stone'a-Weierstrassa

Co się dzieje, gdy zbiór K nie jest zwarty?

Przykłady:

1. funkcja sin nie jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów na $\mathbb{R}$.

Dowód: Załóżmy przeciwnie: że istnieje ciąg $P_n \overset{\text{na } \mathbb{R}}{\rightrightarrows} \sin$, wtedy w szczególności istnieje wielomian $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taki, że $\forall_{x \in \mathbb{R}} \, |P(x) - \sin x| < \frac{1}{2}$. Stąd wielomian P jest ograniczony:

$$|P(x)| \leq |P(x) - \sin x| + |\sin x| < \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2},$$

a więc jest stały, ale funkcją stałą nie można przybliżyć sinusa dla wszystkich x z dokładnością lepszą niż 1.

Zadanie: $\sin\frac{1}{x}$ nie jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów na $(0,1)$.

Możemy jednak łatwo udowodnić uogólnienie tw. Stone'a-Weierstrassa na przypadek pewnych zbiorów niezwartych, zamieniając jednostajną zbieżność na niemal jednost. zbieżność.

<u>Przypomnienie</u> Ciąg $f_n : A \to \mathbb{R}$ (lub $\mathbb{C}$), $n = 1, 2, \ldots$ jest niemal jednost. zbieżny, jeżeli dla każdego zwartego podzbioru $K \subset A$ zachodzi $f_n \rightrightarrows f$ na K.

<u>Twierdzenie</u>: Niech $P \subset \mathbb{R}^m$ będzie przedziałem (otwartym, domkniętym, otwarto-domkniętym etc.), $\mathcal{A}$ niech będzie samosprzężoną algebrą funkcji ciągłych na P, rozdzielającą punkty P i nieznikającą w żadnym punkcie P. Wówczas każda funkcja ciągła $f : P \to \mathbb{C}$ jest granicą niemal jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji z $\mathcal{A}$.

<u>Dowód</u>:

Przedział $P \subset \mathbb{R}^m$ to produkt przedziałów z $\mathbb{R}$:

$$P = \{a_1, b_1\} \times \{a_2, b_2\} \times \ldots \times \{a_m, b_m\}$$

zamiast tych falbanek wstawiamy nawiasy ( ) lub [ ].

Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że

$P = [a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3] \times [a_4, b_4] \subset \mathbb{R}^4$.

Zdefiniujemy ciąg zbiorów zwartych K_i o tej własności, że

(1) $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$

(2) $P = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$

(3) dla każdego zwartego $K \subset P$ istnieje $j \in \mathbb{N}$ t. że $K \subset K_j$.

$K_i = [a_1, b_1 - \frac{1}{i}] \times [a_2 + \frac{1}{i}, b_2 - \frac{1}{i}] \times [a_3 + \frac{1}{i}, b_3] \times [a_4, b_4]$

Własności (1) i (2) są oczywiste, sprawdźmy (3).

Funkcje $h_1(\underbrace{x_1, x_2, x_3, x_4}_{x}) = x_1$, $h_2(x) = x_2$ i $h_3(x) = x_3$ są ciągłe na $\mathbb{R}^4$, więc i na P. (i na K).

$h_1(K) \subset [a_1, b_1)$, ale $\sup_K h_1 = h_1(\tilde{x}) \subset [a_1, b_1)$,

jest gdzieś osiągane

więc $h_1(K) \subset [a_1, \sup_K h_1] \subset [a_1, b_1)$; w szczególności

$\sup_K h_1 < b_1 \Rightarrow \sup_K h_1 < b_1 - \frac{1}{i}$ dla dost. dużych i

~~$h_1(K$~~ $h_1(K) \subset [a_1, b_1 - \frac{1}{i}]$

Tak samo $\inf_K h_2 > a_2$ i $\sup_K h_2 < b_2$, więc

dla dost. dużych i $h_2(K) \subset [a_2 + \frac{1}{i}, b_2 - \frac{1}{i}]$ itd,

ostatecznie $K \subset$ ~~K_i~~ K_i dla dost. dużych i.

Teraz dla każdego i rodzina $\mathcal{A}$ jest samosprzężoną algebrą funkcji ciągłych na K_i, nieznikającą na K_i i rozdzielającą punkty K_i. Stąd, dla ustalonej funkcji $f: A \to \mathbb{C}$ znajdziemy $f_i \in \mathcal{A}$ t.ż.

$\sup_{K_i} |f - f_i| < \frac{1}{i}$, ale wtedy dla dost. dużych i

(takich, by $K \subset K_i$) $\sup_{K} |f - f_i| < \frac{1}{i} \Rightarrow f_i \underset{\text{na } K}{\rightrightarrows} f$.