Ciągłość (i nieciągłość) funkcji monotonicznych

Niech $A \subset \mathbb{R}$ i niech $f: A \to \mathbb{R}$ będzie monotoniczna. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że f jest funkcją niemalejącą; dla f nierosnącej rozważania przebiegają analogicznie (można też sprowadzić je do poprzedniego przypadku rozważając niemalejącą funkcję $-f$).

Jak pamiętamy, f ma granice jednostronne we wszystkich tych punktach zbioru A, w których jest sens o nie pytać:

- lewostronne we wszystkich $x \in Acc(A \cap (-\infty, x))$
- prawostronne we wszystkich $x \in Acc(A \cap (x, +\infty))$.

Niech teraz $a \in A$ i załóżmy, że f nie jest ciągła w a. Zauważmy, że wówczas a nie może być punktem izolowanym zbioru A, gdyż wówczas f byłaby w a ciągła. Stąd istnieje ciąg (x_n) elementów $A \setminus \{a\}$ zbieżny do a.

Mamy 3 możliwości:

- albo dddn $x_n < a$, wówczas $a \in Acc(A \cap (-\infty, a))$ (do a można podchodzić po zbiorze A od lewej strony)
- albo dddn $x_n > a$, wówczas $a \in Acc(A \cap (a, +\infty))$ (do a można podchodzić po zbiorze A od prawej strony)

• albo w ciągu (x_n) jest nieskończenie wiele wyrazów większych od a i nieskończenie wiele wyrazów mniejszych od a, możemy go więc podzielić na 2 podciągi: (y_n) i (z_n), z których pierwszy dąży do a z lewej, a drugi – z prawej strony.

Stąd jeżeli a nie jest punktem izolowanym A, to jest sens pytać o granice jednostronne f w a (w pierwszym przypadku – o $\lim_{x \to a^-} f(x)$, w drugim – o $\lim_{x \to a^+} f(x)$, w trzecim – o obie).

Dla każdego $a \in A$ oraz $x, y \in A$, $x < a < y$ zachodzą nierówności

$$f(x) \leq f(a) \leq f(y), \text{ więc}$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \to a^+} f(x) \quad \Big\} \text{ o ile tylko jest sens pytać o te granice.}$$

Jeżeli f nie jest ciągła w a, to przynajmniej jedna z tych dwóch nierówności jest ostra:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) < f(a) \quad \text{lub} \quad f(a) < \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Pamiętamy też (z dowodu tw. o granicach jednostronnych funkcji monotonicznych), że jeżeli $\lim_{x \to a^-} f(x)$ istnieje, to jest równa $\sup_{A \ni x < a} f(x)$; podobnie $\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{A \ni x > a} f(x)$.

Wiemy zatem, że:

•) jeżeli do a możemy podchodzić po zbiorze A tylko od lewej strony (nie istnieje $\lim_{x \to a^+} f(x)$) i f jest nieciągła w a, to

$$\sup_{A \ni x < a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) < f(a)$$

więc dla każdego $x < a$, $x \in A$ ~~...~~ (a takie istnieją, bo do a można podchodzić od lewej)

$$f(x) \leq \lim_{x \to a^-} f(x) < f(a).$$

Stąd w obrazie $f(A)$ funkcji f jest dziura $D_a = \left(\lim_{x \to a^-} f(x), f(a)\right)$ — do $f(A)$ należy $f(a)$, należą $f(x)$ dla $x < a$, $x \in A$, ale nie należy żaden punkt z niepustego, otwartego przedziału D_a.

••) analogicznie, jeżeli do a możemy podchodzić po zbiorze A tylko z prawej strony i f jest nieciągła w a, to

$$f(a) < \lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{A \ni x > a} f(x)$$

więc w $f(A)$ jest dziura $D_a =$

$$= \left(f(a), \lim_{x \to a^+} f(x)\right).$$

...) jeżeli zaś do a możemy podchodzić z obu stron, to wiemy, że przynajmniej jedna z nierówności

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x\to a^+} f(x)$$

jest ostra. Gdy jest to pierwsza z nich, w $f(A)$ jest dziura $D_a = \left(\lim_{x\to a^-} f(x), f(a)\right)$, gdy druga, $D_a = \left(f(a), \lim_{x\to a^+} f(x)\right)$, gdy obie, możemy za D_a przyjąć którykolwiek z przedziałów z dwóch poprzednich przypadków.

Dalej, zauważmy, że gdy $a, b \in A$ są dwoma różnymi punktami nieciągłości f, to dziury D_a i D_b są rozłączne.

Rozważmy bowiem na początek przypadek, gdy

- do a nie można podchodzić w A z prawej strony (nie istnieje $\lim_{x\to a^+} f(x)$)
- do b nie można podchodzić w A z lewej strony (nie istnieje $\lim_{x\to b^-} f(x)$).

Wówczas $D_a = \left(\lim_{x\to a^-} f(x), f(a)\right)$, $D_b = \left(f(b), \lim_{x\to b^+} f(x)\right)$ i $f(a) \leq f(b)$ (bo $a < b$) $\Rightarrow D_a \cap D_b = \emptyset$.

We wszystkich pozostałych przypadkach wiemy, że istnieje $c \in (a,b) \cap A$ (bo albo możemy podchodzić w A do a z prawej strony, istnieją więc w A punkty $c > a$ leżące bliżej a niż b, albo możemy podchodzić do b z lewej strony i znajdziemy $c \in A$, $c < b$ leżące bliżej b niż a).

Wówczas $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \inf\limits_{A \ni x \to a} f(x) \le f(c)$ o ile granica istnieje

$$i \quad f(a) \le f(c)$$

i analogicznie $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$, o ile istnieje, jest nie mniejsza niż $f(c)$; oczywiście też $f(c) \le f(b)$.

Mamy $D_a = \begin{cases} (\lim\limits_{x \to a^-} f(x), f(a)) \\ (f(a), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)) \end{cases}$ ← w zależności od przypadku

$$D_b = \begin{cases} (\lim\limits_{x \to b^-} f(x), f(b)) \\ (f(b), \lim\limits_{x \to b^+} f(x)) \end{cases}$$

i widzimy, że niezależnie od przypadku prawy koniec D_a jest $\le f(c)$, a lewy koniec D_b jest $\ge f(c)$, zatem D_a i D_b są rozłączne.

Z tych rozważań wynikają dwa ważne wnioski:

<u>Wniosek 1</u>

Funkcja monotoniczna $f: A \to \mathbb{R}$ ma co najwyżej przeliczalnie wiele punktów nieciągłości.

<u>Dowód</u>: Każdemu punktowi nieciągłości a funkcji f możemy przypisać niepusty przedział otwarty D_a, przy czym różnym punktom nieciągłości przypisujemy rozłączne przedziały.
Dostajemy w ten sposób funkcję

$$\{\text{punkty nieciągłości funkcji } f\} \to \left\{ \begin{array}{l} \text{pewna rodzina} \\ \text{niepustych,} \\ \text{parami rozłącznych} \\ \text{przedziałów.} \end{array} \right.$$

Teraz każdemu przedziałowi D_a przypiszmy liczbę wymierną q_a tak, by $q_a \in D_a$ (jakkolwiek, takich liczb wymiernych w D_a jest nieskończenie wiele).
W ten sposób dostajemy funkcję

$$\{\text{punkty nieciągłości } f\} \xrightarrow{F} \mathbb{Q}$$

$$\begin{array}{ccc} \Psi & & \Psi \\ a & \longmapsto & q_a = F(a) \end{array}$$

i dzięki rozłączności D_a mamy pewność, że różnym punktom a przypisujemy różne liczby wymierne q_a. To oznacza, że

F jest różnowartościowa, zatem

$$\left| \left\{ \begin{matrix} \text{zbiór punktów} \\ \text{nieciągłości } f \end{matrix} \right\} \right| \le |\mathbb{Q}| = \aleph_0 .$$

Wniosek 2

Jeżeli $f : A \to \mathbb{R}$ jest monotoniczna i $f(A)$ jest przedziałem (tzn. punktem, odcinkiem, półprostą lub prostą), to funkcja f jest ciągła na A.

Dowód: Załóżmy przeciwnie: że istnieje $a \in A$ w którym f jest nieciągła. Wówczas w $f(A)$ jest dziura D_a, tzn w $f(A)$ są liczby leżące po obu stronach D_a, ale $D_a \cap f(A) = \emptyset$. No, ale przedziały (z definicji) dziur nie mają $\lightning$.

Twierdzonko: Jeżeli $h: A \to \mathbb{R}$ jest ciągła w $a \in A$ i $h(a) > 0$, to istnieje $\delta > 0$ taka, że $\forall_{x \in (a-\delta, a+\delta) \cap A} \; h(x) > 0$.

Dowód (dowodzik?)

Skoro h jest ciągła w a, to

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in A} \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |h(x) - h(a)| < \varepsilon.$$

Przyjmijmy $\varepsilon = h(a) > 0$ i dobierzmy doń $\delta > 0$.

Wówczas jeżeli $\underbrace{x \in A \text{ i } |x-a| < \delta}_{\text{tzn. } x \in A \cap (a-\delta, a+\delta)}$, to

$$|h(x) - h(a)| < h(a) \Leftrightarrow h(x) \in (0, 2h(a)),$$

w szczególności $h(x) > 0$.

$\square$.

Twierdzenie Bolzano-Cauchy'ego o własności Darboux

Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ będzie ciągła i niech ξ leży pomiędzy $f(a)$ a $f(b)$. Istnieje wówczas $c\in[a,b]$ takie, że $f(c)=\xi$.

Dowód:

Twierdzenie jest oczywiste, gdy $\xi=f(a)$ (wystarczy wziąć $c=a$) lub gdy $\xi=f(b)$ (bierzemy $c=b$). Możemy więc dalej założyć, że 1° $f(a)<\xi<f(b)$ albo 2° $f(b)<\xi<f(a)$. Udowodnię twierdzenie przy założeniu, że zachodzi przypadek 1°; przypadek 2° dowodzi się analogicznie.

Niech $A=\{x\in[a,b]: f(x)<\xi\}$.

(•) oczywiście $a\in A$, $b\notin A$.

(••) funkcja $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-\xi$ spełnia $g(a)<0$ i jest ciągła na $[a,b]$, więc z Twierdzonka (zastosowanego do funkcji g) istnieje $\delta_1>0$ takie, że $\forall y\in[a,b]$ $|a-y|<\delta_1 \Rightarrow g(y)<0$, a więc $g(y)<0$ dla wszystkich $y\in[a,a+\delta_1]$. Tym samym $f(y)<\xi$ dla $y\in[a,a+\delta_1]$, więc $[a,a+\delta_1]\subset A$.

(⁘) Analogicznie $g(b)>0$, więc z Twierdzonka zastosowanego tym razem już do g istnieje $\delta_2>0$ taka, że $g(y)>0$ dla $y\in[b-\delta_2,b]$. Tym samym $f(y)>\xi$ dla $y\in[b-\delta_2,b]$, więc $[b-\delta_2,b]\cap A=\emptyset$.

Niech $c=\sup A$ (zbiór A jest niepusty, bo $a\in A$ i ograniczony z góry przez b)

Z (∴) i (∵) wynika, że $a+\delta_1 \leq c \leq b-\delta_2$, więc $c \in (a,b)$. Stąd, dla dostatecznie dużych n, $(n>n_0)$

$c-\frac{1}{n}, c+\frac{1}{n} \in (a,b)$.

Oczywiście $c+\frac{1}{n} \notin A$, bo $c+\frac{1}{n} > \sup A$. Stąd

$$\underset{n>n_0}{\forall} f(c+\tfrac{1}{n}) \geq \xi \Rightarrow f(c) = f\left(\lim_{n\to\infty}(c+\tfrac{1}{n})\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} f(c+\tfrac{1}{n}) \geq \xi \quad \text{z tw. o szacowaniu}$$

Nie mamy gwarancji, że $c-\frac{1}{n} \in A$, ale wiemy, że

$c-\frac{1}{n} < \underset{\overset{\shortparallel}{c}}{\sup A}$, więc $\forall_{n>n_0} \exists_{\substack{x_n \in (c-\frac{1}{n}, c) \\ x_n \in A}}$ (w przeciwnym razie $c-\frac{1}{n}$ byłoby ogr. górnym zbioru A)

Oczywiście

$$c-\tfrac{1}{n} < x_n < c \Rightarrow x_n \to c,$$

$$x_n \in A \Leftrightarrow f(x_n) < \xi \Rightarrow f(c) \leq \xi.$$

Skoro $f(c) \geq \xi$ i $f(c) \leq \xi$, to $f(c) = \xi$.

Twierdzenie (Weierstrassa o przyjmowaniu kresów).

Niech $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas istnieją $x_0, y_0 \in [a,b]$ takie, że

$$f(x_0) = \inf_{[a,b]} f \quad \text{oraz} \quad f(y_0) = \sup_{[a,b]} f.$$

Dowód

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ liczba $\inf_{[a,b]} f + \frac{1}{n}$ jest większa niż $\inf_{[a,b]} f = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$, istnieją więc elementy zbioru $f([a,b]) = \{f(x) : x \in [a,b]\}$ mniejsze niż $\inf_{[a,b]} f + \frac{1}{n}$. Innymi słowy zbiór $A_n = \{x \in [a,b] : f(x) < \inf_{[a,b]} f + \frac{1}{n}\}$ jest niepusty.

Wybierzmy ciąg (x_n) tak, by $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ x_n \in A_n$.

(pewnik wyboru)

Z ciągu (x_n) możemy, na mocy tw. Bolzano-Weierstrassa, wybrać podciąg (x_{n_k}) zbieżny do pewnego $x_0 \in [a,b]$. Wykażemy, że $f(x_0) = \inf_{[a,b]} f$.

Mamy oczywiście $f(x_0) \geq \inf_{[a,b]} f(x)$.

Z drugiej strony

$$\inf_{[a,b]} f \leq f(x_{n_k}) \leq \inf_{[a,b]} + \frac{1}{n_k}$$

biorąc $k \to \infty$ dostajemy

$$\inf_{[a,b]} f \le \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \le \inf_{[a,b]} f$$

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \overset{\leftarrow \text{ z ciągłości } f}{=} f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) = f(x_0)$$

więc $f(x_0) = \inf_{[a,b]} f$.

Analogicznie dowodzimy istnienia y_0:
zbiór $B_n = \{ y \in [a,b] : f(y) > \sup_{[a,b]} f - \frac{1}{n} \}$
jest, dla każdego n, niepusty, możemy więc wybrać ciąg (y_n) tak, by $\forall_n \; y_n \in B_n$, z (y_n) wybieramy (tw. B.-W.) podciąg zbieżny do pewnego $y_0 \in [a,b]$, wówczas (y_{m_k})

$$\sup_{[a,b]} f - \frac{1}{m_k} < f(y_{m_k}) \le \sup_{[a,b]} f$$

$$\downarrow k\to\infty \qquad\qquad \downarrow k\to\infty$$

$$\sup_{[a,b]} f \le f(y_0) \le \sup_{[a,b]} f$$

i stąd $f(y_0) = \sup_{[a,b]} f$. $\square$.

<u>Wniosek</u>: funkcja ciągła na przedziale domkniętym jest ograniczona.

Dowód: Ani $\sup\limits_{[a,b]} f$ nie może być równe $+\infty$, ani $\inf\limits_{[a,b]} f$ nie może być $-\infty$, bo obie są równe wartościom funkcji f w pewnych punktach $x_0, y_0 \in [a,b]$. $\square$.

Ważny wniosek z tw. Bolzano - Cauchy'ego

Obrazem funkcji $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, tzn. $\forall_{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}} \exists_{w \in \mathbb{C}} \ \exp(w) = z$.

Uwaga: takie w („logarytm" z liczby zespolonej z) nie jest wyznaczone jednoznacznie: jeżeli $\exp(w) = z$, to dla $m \in \mathbb{Z}$ $\exp(w + 2m\pi i) = z$.

Dowód wniosku: Ustalmy $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Możemy wówczas z zapisać jako $z = |z|\left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} + i\frac{\operatorname{Im} z}{|z|}\right)$; oczywiście $\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ oraz $\frac{\operatorname{Im} z}{|z|}$ leżą w przedziale $[-1, 1]$.

Rozważmy 4 przypadki, odpowiadające 4 ćwiartkom, w których może znajdować się z:

1) $\operatorname{Re} z \geq 0$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ (pierwsza ćwiartka).

Wówczas $\cos 0 = 1 \geq \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \geq 0 = \cos\frac{\pi}{2}$, więc z ciągłości cosinusa oraz własności Darboux istnieje $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ takie, że $\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \cos\varphi$

Wówczas $\left(\frac{\operatorname{Im} z}{|z|}\right)^2 = \frac{(\operatorname{Im} z)^2}{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = 1 - \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{|z|^2} = 1 - \cos^2\varphi = \sin^2\varphi$,

wiemy też, że $\frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \geq 0$ oraz $\sin\varphi \geq 0$ (bo $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$), skąd $\frac{\operatorname{Im} z}{|z|} = \sin\varphi$.

Ostatecznie $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ dla pewnego $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

2) $\operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ (druga ćwiartka).

tak samo jak poprzednio znajdujemy φ, tym razem w przedziale $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, takie, że $\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \cos\varphi$, wtedy $\sin\varphi \geq 0$ i $\sin^2\varphi = \left(\frac{\operatorname{Im} z}{|z|}\right)^2$,

więc $\frac{\operatorname{Im} z}{|z|} = \sin\varphi$ i $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Podobnie w dwóch pozostałych przypadkach:

3) $\operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z < 0$ (trzecia ćwiartka)

i 4) $\operatorname{Re} z \geq 0$, $\operatorname{Im} z < 0$ (czwarta ćwiartka)

znajduję φ, odpowiednio w przedziałach $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$ i $[\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$, takie, że $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

W ten sposób udowodniliśmy istnienie postaci trygonometrycznej liczby zespolonej $z \neq 0$.

Aby dokończyć dowód, bierzemy $r = \ln|z|$.

Wtedy $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = e^{\ln|z|} \cdot e^{i\varphi} = e^{r+i\varphi}$

i wystarczy przyjąć $w = r + i\varphi$.

□.

Twierdzenie: Niech I będzie przedziałem i niech $f: I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas funkcja f jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy jest ściśle monotoniczna.

Dowód: Oczywiście gdy f jest ściśle monotoniczna, to jest różnowartościowa, dowodu wymaga przeciwna implikacja. Załóżmy zatem, że $f: I \to \mathbb{R}$ jest ciągła i różnowartościowa, ale nie jest ściśle monotoniczna (dowód nie wprost).

To ostatnie oznacza, że istnieje para punktów $x, y \in I$ takich, że $x < y$ oraz $f(x) < f(y)$ oraz para $s, t \in I$ takich, że $s < t$ oraz $f(s) > f(t)$.

Nim pociągniemy dowód dalej, udowodnijmy użyteczny lemacik:

Lemat: Jeżeli $\alpha, \beta, \gamma \in I$, $\alpha < \beta < \gamma$, to $f(\beta)$ leży między $f(\alpha)$ a $f(\gamma)$.

Dowód Lematu: Załóżmy przeciwnie - wówczas $f(\beta)$ leży poza przedziałem o końcach $f(\alpha)$ i $f(\gamma)$.

Przyjmijmy, dla ustalenia uwagi, że $f(\alpha) < f(\gamma)$ (w przeciwnym przypadku zastępujemy funkcję f przez $-f$)

Jeżeli $f(\beta) < f(\alpha)$, to $f(\alpha) \in (f(\beta), f(\gamma))$, więc z tw. Bolzano-Cauchy'ego w przedziale (β, γ) znajdziemy

punkt ξ taki, że $f(\xi) = f(\alpha)$
– i oczywiście $\xi \neq \alpha$, bo $\alpha \notin (\beta, \gamma)$.
To przeczy różnowartościowości f.
Tak samo gdy $f(\beta) > f(\gamma)$, $f(\gamma) \in (f(\alpha), f(\beta))$,
więc znajdziemy $\zeta \in (\alpha, \beta)$ t.ż. $f(\zeta) = f(\gamma)$ $\lightning$.

$\square$

Wróćmy do dowodu twierdzenia.

Liczby $x, y, s, t \in I$ mogą różnie leżeć względem siebie; mamy 6 możliwości:

① $s < t < x < y$ ② $s < x < t < y$ ③ $s < x < y < t$

④ $x < s < t < y$ ⑤ $x < s < y < t$ ⑥ $x < y < s < t$.

Wykażemy, przy pomocy Lematu, że w każdym z przypadków $f(s) < f(t)$, wbrew założeniu, co zakończy dowód nie wprost.

① $f(x) < f(y)$ i (z Lematu) $f(x)$ leży między $f(t)$ a $f(y)$, więc $f(t) < f(x)$. Dalej, $f(t)$ leży między $f(s)$ a $f(x)$ (znów Lemat) i $f(t) < f(x)$, więc $f(s) < f(t)$.

② $f(x) < f(y)$ i $f(t) \in (f(x), f(y)) \Rightarrow f(t) > f(x)$;
$f(x)$ leży między $f(s)$ a $f(t)$ i $f(t) > f(x) \Rightarrow f(s) < f(x)$
$\Rightarrow f(s) < f(t)$.

③ $f(x)$ leży między $f(s)$ a $f(y)$ i $f(x) < f(y) \Rightarrow f(s) < f(x)$
i tak samo $f(y)$ leży między $f(x)$ a $f(t)$ i $f(y) > f(x)$
$\Rightarrow f(t) > f(y) \Rightarrow f(s) < f(x) < f(y) < f(t)$.

Pozostałe 3 przypadki idą dokładnie w ten sam sposób, pozostawiam je Państwu jako ćwiczenie.

Twierdzenie: Niech I będzie przedziałem i niech $f: I \to \mathbb{R}$ będzie ciągła i różnowartościowa. Wówczas funkcja odwrotna do f,

$$f^{-1}: f(I) \to I$$

jest ciągła na $f(I)$.

Przedstawię Państwu dwa dowody tego twierdzenia:

Dowód 1

Z poprzedniego twierdzenia wiemy, że funkcja f jest ściśle monotoniczna. Łatwo wówczas wykazać (proszę to zrobić - ćwiczonko z WdM), że $f^{-1}: f(I) \to I$ też jest ściśle monotoniczna, a jej obrazem jest przedział. Wówczas, na mocy tw. z poprzedniego wykładu, f^{-1} jest ciągła.

Drugi dowód działa tylko w przypadku, gdy I jest odcinkiem domkniętym, $I = [a,b]$, ale w przyszłości (niedalekiej) pozwoli nam uogólnić twierdzenie na inne ważne zbiory.

Dowód 2: $I = [a,b]$; dowód nie wprost.

Skoro f^{-1} nie jest ciągła w $f(I)$, to istnieje ciąg (z_n) elementów $f(I)$ taki, że $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z_0 \in f(I)$, ale $\sim \left(f(z_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(z_0) \right)$.

To ostatnie oznacza, że

$$\sim\left(\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N_0} \forall_{n>N_0} |f(z_n)-f(z_0)|<\varepsilon \right),$$

czyli równoważnie

$$\exists_{\varepsilon>0} \forall_{N_0} \exists_{n>N_0} |f(z_n)-f(z_0)| \geq \varepsilon . \qquad (*)$$

Biorąc w (*) $N_0 = 1$ znajdziemy zatem n_1 t.ż. $|f(z_{n_1})-f(z_0)| \geq \varepsilon$. Biorąc następnie w (*) $N_0 = n_1$ znajdujemy $n_2 > n_1$ t.ż. $|f(z_{n_2})-f(z_0)| \geq \varepsilon$ itd. znajdujemy podciąg (z_{n_k}) ciągu (z_n) taki, że $\forall_k \; |f(z_{n_k})-f(z_0)| \geq \varepsilon$.

Oznaczmy $x_k = f^{-1}(z_{n_k})$, $x_0 = f^{-1}(z_0)$; wiemy, że dla każdego k zachodzi $|x_k - x_0| \geq \varepsilon$

Z ciągu (x_k) (punktów z $I=[a,b]$) możemy, dzięki tw. Bolzano-Weierstrassa, wybrać podciąg (x_{k_ℓ}) zbieżny do pewnego $\tilde{x}_0 \in I$, oczywiście $\forall_\ell \; |x_{k_\ell} - x_0| \geq \varepsilon \Rightarrow |\tilde{x}_0 - x_0| \geq \varepsilon$, więc $\tilde{x}_0 \neq x_0$. Z drugiej strony

$$f(\tilde{x}_0) = f\left(\lim_{\ell\to\infty} x_{k_\ell}\right) \overset{\text{bo } f \text{ ciągła}}{=} \lim_{\ell\to\infty} f(x_{k_\ell}) = \lim_{\ell\to\infty} z_{n_{k_\ell}} \overset{\text{bo } (z_{n_{k_\ell}}) \text{ to podciąg } (z_n)}{=}$$

$$= z_0 = f(x_0),$$

co przeczy różnowartościowości funkcji f.

<u>Uwaga</u>: Jedyna własność I, z jakiej korzystaliśmy, to to, że dla $I=[a,b]$ zachodzi tw. Bolzano-Weierstrassa.