Jednostajna ciągłość

Def: Funkcja $f: A \to \mathbb{R}$ jest <u>jednostajnie ciągła</u> na A, gdy

$$\forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{\delta > 0} \ \forall_{x,y \in A} \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Porównajmy tę definicję z porządnie napisaną definicją ciągłości na A:

$$\forall_{x \in A} \ \underbrace{\forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{\delta > 0} \ \forall_{y \in A} \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon}_{\text{ciągłość } f \text{ w punkcie } x}$$

Różnica jest tylko w kolejności kwantyfikatorów: przy definicji ciągłości f na A, szukając „przepisu" jak dobierać δ do ε mamy już ustalone $x \in A$, więc dobór δ do ε może zależeć od punktu x. Gdy żądamy, by f była jednostajnie ciągła, chcemy, by ten sam przepis – dobór δ do ε – był dobry dla wszystkich $x \in A$.

<u>Przykłady</u>

1. sinus jest jednostajnie ciągły na $\mathbb{R}$

Udowodniliśmy, że $\forall_{x \in \mathbb{R}} \ |\sin x| \leq |x|$.
Stąd łatwo już wynika, że

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}} \quad |\sin x - \sin y| \leq |x-y| .$$

Mamy bowiem

$$|\sin x - \sin y| = \left|2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\right| = 2\underbrace{\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|}_{\leq \frac{|x-y|}{2}}\underbrace{\left|\cos\frac{x+y}{2}\right|}_{\leq 1}$$

$$\leq 2\cdot\frac{|x-y|}{2} = |x-y|.$$

Niech zatem, dla ustalonego $\varepsilon>0$, będzie $\delta=\varepsilon$. (przepis, niezależny od x).

Jeżeli tylko $|x-y|<\delta=\varepsilon$, to $|\sin x-\sin y|\leq \underbrace{|x-y|}_{<\varepsilon}$.

2. Funkcja $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ nie jest jednostajnie ciągła na $(0,1)$ (choć jest na tym przedziale ciągła).

Załóżmy przeciwnie – że jest jednostajnie ciągła, a zatem że możemy do $\varepsilon=\frac{1}{2}$ dobrać $\delta>0$ tż jeżeli $x,y\in(0,1)$ i $|x-y|<\delta$, to $|f(x)-f(y)|=\left|\sin\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{y}\right|<\frac{1}{2}$.

Niech teraz $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, $y_n=\dfrac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}}$.

Mamy $f(x_n)=1$, $f(y_n)=-1$, więc $\underbrace{|f(x_n)-f(y_n)|=2}_{>\frac{1}{2}}$

choć $x_n, y_n\to 0$, więc jakie by nie było $\delta>0$, to dddn $\underbrace{|x_n-y_n|}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0}<\delta$.

3. $f(x)=x^2$ nie jest jednostajnie ciągła na $(0,\infty)$.

Załóżmy, że jest i dobierzmy δ do $\varepsilon=1$.
Dla ustalonego $x\in\mathbb{R}$ niech $y=x-\delta/2$ (wtedy $|x-y|=\frac{\delta}{2}<\delta$), powinno więc być $|f(x)-f(y)|<\varepsilon=1$. (niezależnie od x)
Mamy jednak $|f(x)-f(y)|= x^2-(x-\delta/2)^2= = x\delta-\frac{\delta^2}{4}$ i jeżeli tylko weźmiemy $x>\frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{4}$, będziemy mieli

$$|f(x)-f(y)|=x\delta-\frac{\delta^2}{4}>\left(\frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{4}\right)\delta-\frac{\delta^2}{4}=1 \quad \lightning.$$

Powodem, dla którego funkcje jednostajnie ciągłe są ważne, jest następujący

<u>Fakt</u>: Jeżeli $f:A\to\mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła i (x_n) jest ciągiem Cauchy'ego(*) elementów zbioru A, to $(f(x_n))$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathbb{R}$.

(*) tzn. ciągiem spełniającym w. Cauchy'ego

Dowód: Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy doń $\delta > 0$ tak jak w definicji jednostajnej ciągłości. Skoro (x_n) jest ciągiem Cauchy'ego w A, to istnieje N_0 t. że $\forall_{n,m > N_0}$ $|x_n - x_m| < \delta$. Wówczas, z jednost. ciągłości f, $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Znaleźliśmy zatem, dla ustalonego $\varepsilon > 0$, takie N_0, że dla dowolnych $n, m > N_0$ zachodzi

$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$, a to właśnie oznacza, że $(f(x_n))$ jest ciągiem Cauchy'ego.

Def: Funkcja $f: A \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L > 0$ (jest L-lipszycowska), jeżeli $\forall_{x,y \in A}$ $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$

Przykłady:

①. $f(x) = \sin x$ jest lipszycowska ze stałą 1 na $\mathbb{R}$ (bo wykazaliśmy, że $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

②. $f(x) = x^2$ jest lipszycowska ze stałą 4 na $[0,2]$, bo $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y|\underbrace{|x + y|}_{\leq 4} \leq 4|x - y|$

gdy $x, y \in [0,2]$.

③ $f(x)=\sqrt{x}$ nie jest na $[0,1]$ lipszycowska z żadną stałą $L>0$.

Załóżmy bowiem przeciwnie: że istnieje $L>0$ taka, że

$$\forall_{x,y\in[0,1]} \quad \underbrace{|f(x)-f(y)|}_{=|\sqrt{x}-\sqrt{y}|} \leq L|x-y|,$$

a więc $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq L|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\,|\sqrt{x}+\sqrt{y}|$

i nier. ta ma zachodzić dla wszystkich $x,y\in[0,1]$, w szczególności dla $x\neq y$, więc

$$\forall_{\substack{x,y\in[0,1]\\ x\neq y}} \quad 1\leq L|\sqrt{x}+\sqrt{y}|.$$

Tak jednak być nie może, bo prawa strona może być, dla $x,y\in[0,1]$, dowolnie mała (biorąc np. $y=0$, $x=\min\left(1,\frac{1}{4L^2}\right)$ mamy $1\leq L|\sqrt{x}+\sqrt{y}|\leq L\left(\frac{1}{2L}+0\right)=\frac{1}{2}$ ↯)

<u>Tw.</u> Jeżeli $f: A\to\mathbb{R}$ spełnia na A warunek Lipschitza (z jakąkolwiek stałą), to jest na A jednostajnie ciągła (w szczególności jest ciągła).

<u>Dowód</u> W zasadzie powtarzamy rozumowanie dla sinusa: Ustalmy $\varepsilon>0$ i niech L będzie stałą Lipschitza funkcji f (tj. taką $L>0$, że f jest L-lipszycowska).

Przyjmijmy $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Wówczas, jeżeli $|x-y|<\delta$, to $|f(x)-f(y)| \leq L|x-y| < L\delta = \varepsilon$. $\square$.

<u>Twierdzenie Heinego - Cantora</u>

Jeżeli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$, to jest na $[a,b]$ jednostajnie ciągła.

<u>Innymi słowy</u>: funkcja ciągła na odcinku domkniętym jest na nim jednostajnie ciągła.

<u>Dowód</u>: Załóżmy przeciwnie, a więc że $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła, ale nie jest jednostajnie ciągła:

$$\sim\left(\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x,y\in[a,b]}\ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon\right)$$

cyli $\exists_{\varepsilon>0}\ \forall_{\delta>0}\ \exists_{x,y\in[a,b]}\ |x-y|<\delta \wedge |f(x)-f(y)|\geq\varepsilon$,

a więc dla pewnego $\varepsilon>0$ zbiór

$$A_\delta = \{(x,y)\in[a,b]\times[a,b] : |x-y|<\delta \wedge |f(x)-f(y)|\geq\varepsilon\}$$

jest, dla dowolnego $\delta>0$, niepusty.

Możemy zatem (pewnik wyboru!) wybrać, dla dowolnych $n\in\mathbb{N}$, $(x_n,y_n)\in A_{1/n}$

a więc parę ciągów $(x_n),(y_n)$ elementów $[a,b]$ takich, że $|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$, ale $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon$.

Wybierzmy z ciągu (x_n), korzystając z tw. Bolzano-Weierstrassa, podciąg (x_{n_k}) zbieżny do pewnego $\tilde{x}$. Wiemy, że $x_{n_k} - \frac{1}{n_k} \leq y_{n_k} \leq x_{n_k} + \frac{1}{n_k}$ i $n_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$, więc z tw. o 3 ciągach również (y_{n_k}) jest zbieżny do $\tilde{x}$.

Wiemy jednak, że $(x_{n_k}, y_{n_k}) \in A_{1/n_k}$, więc

$$0 < \varepsilon \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \xrightarrow{k\to\infty} |f(\tilde{x}) - f(\tilde{x})| = 0$$

z ciągłości funkcji f

co jest sprzeczne z twierdzeniem o szacowaniu ↯.

<u>Wniosek</u>: Istnieją funkcje jednostajnie ciągłe na $[0,1]$, które nie są lipszycowskie (np $\sqrt{x}$ jest ciągły na $[0,1]$ $\Rightarrow$ jest jednost. ciągły na $[0,1]$)

<u>Def</u>: Mówimy, że $f: A \to \mathbb{R}$ spełnia na A warunek Höldera ze stałą $L > 0$ i wykładnikiem $\alpha \in (0,1]$, gdy

$$\forall_{x,y \in A} \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|^{\alpha}. \qquad (*)$$

(dla $\alpha = 1$ dostajemy warunek Lipschitza)

Zadania

1. Jeżeli $f : \overset{A}{\overset{\shortparallel}{[a,b]}} \to \mathbb{R}$ spełnia $(*)$ z wykładnikiem $\alpha > 1$, to f jest stała

2. Jeżeli $f : A \to \mathbb{R}$ spełnia war. Höldera (z dowolnymi $L > 0$, $\alpha \in (0,1]$), to f jest jednostajnie ciągła na A

3. $f(x) = \sqrt{x}$ spełnia na $[0,1]$ warunek Höldera (z jaką stałą i wykładnikiem?)

4. Istnieją funkcje ciągłe na $[0,1]$ (a więc jednost. ciągłe na $[0,1]$), które nie spełniają warunku Höldera z żadną stałą $L>0$ i z żadnym wykładnikiem $\alpha \in (0,1]$.