

# Analiza matematyczna I.

## Pula jawnych zadań na kolokwia.

Wydział MliM UW, 2016/17

ostatnie poprawki: 9 listopada 2017

Szanowni Państwo,

zgodnie z zapowiedzią, na każdym kolokwium w pierwszym semestrze co najmniej jedna trzecia zadań będzie pochodziła wprost z tego zestawu, bądź będzie niewielką modyfikacją poniższych zadań.

Wśród zamieszczonych niżej zadań są łatwiejsze i trudniejsze.

Podkreślamy: *proszę się nie zrażać, jeśli nie będą Państwo umieli zrobić wszystkich od razu*. Materiał jest obszerny i dla większości z Państwa trudniejszy, niż w szkole, szczególnie na samym początku studiów. Ponadto, w matematyce *jest rzeczą normalną, że człowiek pewnych rzeczy nie potrafi zrobić*. Skuteczna nauka wymaga czasu, regularnego treningu i cierpliwości, a także bieżącego kontaktu z materiałem z wykładu. Taka inwestycja przynosi praktycznie zawsze pozytywne skutki.

## 1 Liczby rzeczywiste. Kresy zbiorów. Indukcja.

1. Udowodnić, że dla wszystkich  $x \geq 1000$  zachodzi nierówność

$$x^3 \geq 5x^2 + 14x + 17.$$

2. Udowodnić, że liczba  $\sqrt{7 + \sqrt{2}}$  jest niewymierna.

3. Wykazać, że równanie  $x/1 = (1 - x)/x$  na liczbę złotego podziału  $x \in (0, 1)$  nie ma pierwiastków wymiernych.

4. Niech  $a$  i  $b$  będą liczbami dodatnimi takimi, że  $a^2 + b^2 \leq 2$ . Udowodnić, że  $a + b \leq 2$ .

5. Płaszczyznę parametrów  $a, b \in \mathbb{R}$  podzielić na podzbiory odpowiadające stałej liczbie pierwiastków równania

$$abx^2 + (a + b)x + 1 = 0.$$

**6.** Wykazać, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych  $a, b, c$  zachodzi nierówność:

$$(a + b + c)(ab + bc + ac) \geq 9abc.$$

**7.** Wykazać, że liczba  $\sqrt{7/13} + \sqrt{13/7}$  jest niewymierna.

**8.** Rozstrzygnąć, czy liczba  $\sqrt{\sqrt{5} + 3} + \sqrt{\sqrt{5} - 2}$  jest wymierna.

**Wskazówka.** Zbadać sumę i iloczyn liczb  $\sqrt{\sqrt{5} + 3} \pm \sqrt{\sqrt{5} - 2}$ .

**9.**

**10.** Niech  $A \subset \mathbb{R}$  będzie zbiorem ograniczonym i  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Zbiór  $\lambda A$  określamy wzorem

$$\lambda A := \{\lambda a : a \in A\}.$$

Oznaczmy  $\sup A = M$  i  $\inf A = m$ . Wyznaczyć kresy zbioru  $\lambda A$ .

**11.** Udowodnić, że dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi nierówność

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}.$$

**12.** Udowodnić, że dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi nierówność

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{7}{12}.$$

**13.** Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n > 1$  zachodzą nierówności

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < n.$$

**14.** Wykazać, że dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi nierówność

$$3 \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \geq 2n\sqrt{n} + 1,$$

przy czym dla  $n > 1$  nierówność jest ostra.

**15.** Wykazać, że dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi nierówność

$$5 \sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \geq 2n^2\sqrt{n} + 3$$

**16.** Wykazać, że dla każdego  $n$  naturalnego liczba  $13^n - 7$  jest podzielna przez 6.

**17.** Wykazać, że jeśli  $n$  jest liczbą naturalną parzystą, to liczba  $n^3 + 20n$  dzieli się przez 48 ( $= 3 \cdot 2^4$ ).

**18.** Udowodnić, że dla liczb całkowitych  $0 \leq k < l \leq n/2$  mamy  $\binom{n}{k} < \binom{n}{l}$ .

**19.** Wykazać, że dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi nierówność

$$4^{n-1} \binom{3n}{n} \sqrt{n} \geq 3^{3n-2}$$

**20.** Czy zbiór  $A = \{2^n/3^k, \text{ gdzie } k, n \text{ naturalne i } k \geq n\}$  jest ograniczony z góry? A z dołu? Proszę uzasadnić obie odpowiedzi. Jeśli któraś z nich jest twierdząca, wyznaczyć odpowiedni kres zbioru  $A$ .

**21.** Dane są liczby  $a_n \in [0, 1]$ , gdzie  $n = 1, 2, \dots$ . Udowodnić, że zbiór

$$A = \left\{ \frac{a_n}{n} : n = 1, 2, \dots \right\}$$

jest ograniczony i  $\inf A = 0$ .

**22.** Udowodnić, że  $(n!)^2 \geq n^{n+1}$  dla  $n \geq 7$ .

**23.** Wyznaczyć kresy górne i dolne zbiorów

$$A = \left\{ \frac{11}{k} - \frac{3}{m} : k, m \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{2}{k} + \frac{3}{m} - \frac{4}{n} : k, m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**24.** Udowodnić, że zbiór

$$\left\{ \frac{n^n}{(n!)^2} : n = 1, 2, \dots \right\}$$

jest ograniczony. Wyznaczyć jego kresy.

**25.** Wyznaczyć kresy zbiorów

$$A = \{|x - 1| + |x + 1| : x \in \mathbb{R} \text{ oraz } |x| < 2\}, \quad B = \{|x - 1| - |x + 1| : x \in \mathbb{R}\}.$$

**26.** Znaleźć  $\inf A$  i  $\sup A$ , gdzie

$$A = \{x + y + z : x, y, z > 0, xyz = 1\}.$$

**27.** Znaleźć

a)  $\inf \left\{ \sqrt[n]{n} - \frac{1}{\sqrt[n]{n}} : n \in \mathbb{N} \right\},$

b)  $\sup \left\{ \sqrt[n]{n} - \frac{1}{\sqrt[n]{n}} : n \in \mathbb{N} \right\},$

c)  $\inf \left\{ \frac{n^{200} + 1.01^n}{n^{100} + 1.02^n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$

**28.** Zbiór niepusty  $A \subset \mathbb{R}$  ma tę własność, że dla każdego  $a \in A$  istnieje element  $b \in A$  taki, że  $b \leq a/2 + 1$ . Wykazać, że  $\inf A \leq 2$ .

**29.** Wyznaczyć kres górny i dolny zbioru  $\{(x+y)(x^{-1}+y^{-1}) \mid x, y > 0\}$ .

**30.** Wyznaczyć kres górny i dolny zbioru

$$A = \left\{ \frac{n - k^2}{n^2 + k^3} : n, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

**31.** Wyznaczyć kres górny i dolny zbioru

$$\left\{ \frac{n2^m}{m2^n} \mid n > m \geq 1 \quad n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

**32.** Wyznaczyć kres górny i dolny zbioru

$$\left\{ \frac{m^2 - n}{m^2 + n^2} : n, m \in \mathbb{N}, m > n \right\}.$$

**33.** Znaleźć kresy zbioru  $A$ , jego element największy lub wykazać, że takowy nie istnieje oraz element najmniejszy lub wykazać, że takowy nie istnieje, jeśli

$$A = \left\{ \frac{2013n + k}{n + 2013k} : n, k \in \mathbb{Z}, n, k \geq 10000 \right\}.$$

**34.** Zbiór niepusty  $A \subset (0, \infty)$  ma tę własność, że jeśli  $a \in A$ , to  $\frac{1}{a} \in A$ . Wykazać, że jeśli  $A$  jest ograniczony z góry, to  $\inf A \cdot \sup A = 1$ .

**35.** Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n > 1$  zachodzą nierówności

$$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

**36.** Wykazać, że dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi nierówność

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{n^4} \leq 2 - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

**37.** Znaleźć wzór na

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$$

i udowodnić go.

**38.** Udowodnić, że jeśli  $n \geq 4$  jest liczbą naturalną, to

$$\binom{2n}{n} \geq n \cdot 2^n.$$

**39.** Udowodnić, że prawdziwy jest następujący wzór:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{2 \lfloor n/2 \rfloor} = 2^{n-1}.$$

**40.** Wykazać, że

$$0^2 \binom{n}{0} + 1^2 \binom{n}{1} + 2^2 \binom{n}{2} + \cdots + n^2 \binom{n}{n} = n(1+n) \cdot 2^{n-2}.$$

**Wskazówka.** Zauważyć, że  $k^2 = k(k-1) + k$  i obliczyć dwie sumy.

**41.** Załóżmy, że  $(s_k)$  jest ciągiem liczb rzeczywistych nieujemnych,  $s_1 \leq 1$ , i dla każdego  $k \geq 1$  spełniona jest nierówność

$$s_{k+1} \leq 2k + 3 \sum_{j=1}^k s_j.$$

Wykazać, że  $s_k < 7^k$  dla wszystkich  $k$  naturalnych.

**Wskazówka.**  $2k < 1 + 2k \leq (1+2)^k$  na mocy nierówności Bernoulli'ego.

**42.** Niech  $n$  będzie liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnić nierówność

$$(n+1)^{n+1} > (n+2)^n.$$

**43.** Znaleźć kres górny zbioru

$$\{a^{2012} + b^{2012} + c^{2012} \mid a + b + c = 1, a, b, c > 0\}.$$

**44.** Niech  $(a_n)_n$  będzie ciągiem ściśle rosnącym o wyrazach naturalnych (w zadaniu przyjmujemy, że  $0 \notin \mathbb{N}$ ). Wykazać, że

a) dla dowolnego  $m \in \mathbb{N}$  ciąg  $b_n := \frac{a_n + a_m}{a_m 2^{a_n}}$  jest malejący,

b)  $\inf \left\{ \frac{a_n + a_m}{a_m 2^{a_n}} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\} = 0,$

c)  $\sup \left\{ \frac{a_n + a_m}{a_m 2^{a_n}} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\} = 2^{1-a_1}.$

## 1.1 Nowe zadania

45. Wykazać, że  $\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2}$  nie jest liczbą wymierną.

46. Wyznaczyć

- $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{3}{n}, \frac{4}{n} \right]$ ,
- $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n+1}, \frac{5}{n} + \frac{n}{10} \right)$ .

47. Wyznaczyć kresy zbiorów

- $\left\{ \frac{x}{x^2 + 1} : x \in \mathbb{R} \right\}$ ,
- $\{ 2^x + 2^{1-x} : x \in \mathbb{R} \}$ ,
- $\left\{ \frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ ,
- $\left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{n}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m}} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$ .

48. Udowodnić, że dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi nierówność  $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$ .

49. Udowodnić, że jeżeli  $a$  i  $b$  są liczbami dodatnimi, to dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi nierówność

$$\left( \frac{a+b}{2} \right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}.$$

50. Wykazać, że dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  większego od 5 zachodzą nierówności

$$\left( \frac{n}{2} \right)^n \geq n! \geq \left( \frac{n}{3} \right)^n.$$

51. Obliczyć  $\lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt[n]{n} - 1)$ .

52. O ciągu  $(a_n)$  wiemy, że istnieje liczba  $g \in \mathbb{R}$  taka, że dla dowolnego  $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{kn} = g.$$

Czy wynika stąd, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ ?

53. Wykazać, że dla każdego  $k \in \mathbb{N}$  funkcja  $f_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  dana wzorem

$$f_k(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$$

jest wielomianem stopnia  $k+1$  zmiennej  $n$ .

**54.** Zbadać czy zbiór

$$A = \left\{ \frac{a^2}{\sqrt{a^2(b^2 + c^2 + d^2)}} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2(a^2 + c^2 + d^2)}} + \frac{c^2}{\sqrt{c^2(a^2 + b^2 + d^2)}} + \frac{d^2}{\sqrt{d^2(a^2 + b^2 + c^2)}} \right\},$$

gdzie  $a, b, c, d$  są dodatnie oraz  $a + b + c + d = 1$ , jest ograniczony.

**55.** Udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$  zachodzi nierówność

$$n_1^3 + n_2^3 + \dots + n_k^3 \geq (n_1 + n_2 + \dots + n_k)^2.$$

**56.** Znaleźć kresy zbioru

$$A = \left\{ \frac{m^4 + 2n^2}{2m^2 - m^2n + n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**57.** Wyznaczyć kresy zbioru

$$X = \left\{ \frac{m^2n^3 + 3m^2n^2 + 2mn^3 + 6mn^2}{(m^2 + 2m)^2 + (n^3 + 3n^2)^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

*Wskazówka.* Można skorzystać z nierówności między średnimi, a w szczególności z tego, kiedy zachodzi w niej równość.

**58.** Udowodnić, że dla każdego  $n, l \in \mathbb{N}$  zachodzi

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{l} = \binom{n+1}{l+1}.$$

**59.** Udowodnić, że dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi

$$\sum_{k=0}^n k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

**60.** Niech

$$H_k = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}.$$

Udowodnić, że dla  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi

$$\sum_{k=0}^{n-1} kH_k = \frac{n(n-1)}{2} \left( H_n - \frac{1}{2} \right).$$

*Wskazówka.* Można przez indukcję ale może warto skorzystać z następującej obserwacji. Jeśli  $a, b : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  są ciągami i zdefiniujemy  $\Delta a(n) := a(n+1) - a(n)$ , to  $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta a(k) = a(n) - a(0)$  oraz  $\Delta(ab)(n) = a(n+1)\Delta b(n) + b(n)\Delta a(n)$ .

## 2 Ciągi i granice.

**61.** Czy któryś z poniższych ciągów jest monotoniczny? Monotoniczny dla dostatecznie dużych  $n$ ?

$$a_n = n\sqrt{n^2 + 1} - n^2, \quad b_n = n^2 - n\sqrt{n^2 - 1}.$$

Odpowiedź oczywiście należy uzasadnić.

**62.** Obliczyć granice następujących ciągów:

$$a_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2}, \quad b_n = \frac{9 + 16 + \dots + (7n + 2)}{n^2}.$$

**63.** Ciąg  $(a_n)$  jest określony rekurencyjnie:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 7, \quad a_{n+2} = 7a_{n+1} - 10a_n \quad \text{dla } n=1,2,\dots$$

Udowodnić, że  $a_n = 2^{n-1} + 5^{n-1}$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ .

**64.** Dla jakich liczb rzeczywistych  $p > 1$  ciąg  $(\sqrt[n^p]{n^p + n + 1} - \sqrt[n^p]{n^p - n + 1})$  jest ograniczony?

**65.** Obliczyć granice następujących ciągów:

$$a_n = \frac{3 + (-1)^n + 9\sqrt{n} - 7n^5 - 2[\sqrt[3]{n}]n}{(3n - 1)(n - 2)(2n - 3)(n - 4)(4n - 5) + 2^{-n}},$$

$$b_n = -3n^3 + \sqrt{9n^6 + 7n^3 + (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} - 10n^2.$$

**66.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2 + 2} + \frac{1}{n^2 + 4} + \dots + \frac{1}{n^2 + 2n} \right) n.$$

**67.** Dla każdego z poniższych ciągów zbadaj, czy ma on granicę, a jeżeli tak, to oblicz jej wartość.

$$a_n = \frac{(\sqrt{11n^2 + 3n + \sqrt{n^3}} - \sqrt{11n^2 + 1})^{15}}{(1,001 - \frac{1}{n})^n}, \quad b_n = \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n^2} k^{1000} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^k},$$
$$c_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n}}, \quad d_n = \sqrt[2^n]{2^n - n}.$$



**68.** Dla każdego z poniższych ciągów zbadaj, czy ma on granicę, a jeżeli tak, to oblicz jej wartość.

$$a_n = \sqrt[n]{3^n + n^{100} - (2,999)^n}, \quad b_n = \sqrt[n]{\frac{1}{3^n} + \frac{n^5}{5^n} + \frac{1}{2^{nn^{(10^{10})}}}},$$

$$c_n = \left(0,999 + \frac{1}{n}\right)^{n+3}, \quad d_n = \left(1,00001 - \frac{1}{n}\right)^{n+7(-1)^n}.$$

**69.** Rozstrzygnij, czy ciąg zdefiniowany poniższym wzorem jest zbieżny:

$$a_n = \sum_{k=n+2}^{2n+7} \frac{1}{k}, \quad b_n = \sum_{n+1}^{n^2} \frac{1}{k}.$$

**70.** Załóżmy, że liczby  $a, b, c \in \mathbb{R}$  mają tę własność, że dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  istnieje trójkąt o bokach  $a^n, b^n, c^n$ . Wykazać, że wśród liczb  $a, b, c$  przynajmniej dwie są sobie równe.

**71.** Obliczyć granice następujących ciągów:

$$a_n = \frac{n^2}{7\sqrt{n}}, \quad b_n = \frac{3\sqrt{n}}{2^n}.$$

**72.** Znaleźć granicę ciągu

$$a_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right) \sqrt{2n+1}.$$

**73.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sqrt{n + \sqrt{n + 2012}} - \sqrt{n + \sqrt{n + 2010}} \right).$$

**74.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + \sqrt{n + 2012}} - \sqrt{n + \sqrt{n + 2010}}}{\sqrt[3]{n^{3/2} + 2012} - \sqrt[3]{n^{3/2} + 2010}}.$$

**75.** Niech, dla wszystkich  $k$  naturalnych,

$$s_k = \sum_{n=k}^{2k-1} \frac{n}{2^n}.$$

Wykazać, że

$$s_k = \frac{(2k+2)2^k - 4k - 2}{2^{2k}} \quad \text{dla } k \in \mathbb{N}$$

i obliczyć granicę ciągu  $(s_k)$ .

**76.** Niech, dla wszystkich  $k$  naturalnych,

$$s_k = \sum_{n=0}^{k-1} n \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Wykazać, że

$$s_k = 12 + (3k - 12) \left(\frac{4}{3}\right)^k \quad \text{dla } k \in \mathbb{N}$$

i obliczyć granicę ciągu  $c_k = s_k/2^{k/2}$ .

**77.** Niech  $a_n$  będzie ciągiem zadany rekurencyjnie:  $a_1$  jest pewną liczbą rzeczywistą, a ponadto

$$a_{n+1} = a_n^2 - 1 \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

Udowodnić, że gdy  $|a_1| \leq (1 + \sqrt{5})/2$ , to ciąg  $(a_n)$  jest ograniczony, a gdy  $|a_1| > (1 + \sqrt{5})/2$ , to ciąg  $(a_n)$  jest rozbieżny (do  $+\infty$ .)

**78.** Udowodnić, że ciąg

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 3 - \frac{2}{3}, \quad \dots, \quad a_n = 3 - \frac{2}{a_{n-1}}, \quad \dots$$

jest zbieżny i znaleźć jego granicę.

**79.** Dany jest ciąg  $(a_n)_{n \geq 1}$  taki, że  $a_1 = a_2 = 1$  oraz  $2a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$  dla  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Wykazać, że

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)^n \right].$$

Obliczyć  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ .

**80.** Niech  $(F_n)_{n \geq 0}$  będzie ciągiem spełniającym warunki  $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \geq 0$ . Udowodnij, że dla  $n \geq 2$  prawdziwa jest równość

$$F_n^4 = 1 + F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2}.$$

**81.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}.$$

**82.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3n^2 + 20n + 5)}{\ln(n^9 - 3n + 12)}.$$

**83.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \sqrt[n]{\ln n}).$$

**84.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \ln(n^2 + 1) - 2n(\ln n) \sqrt[n]{\ln n} \right).$$

**85.** Niech  $b$  będzie liczbą rzeczywistą różną od zera, zaś  $c$  - dowolną liczbą rzeczywistą. Wyznacz, lub wykaż że nie istnieje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot \frac{1}{n} \cdot c}}{2 \cdot \frac{1}{n}}$$

**86.** Udowodnić, że jeżeli dla ciągu  $(a_n)$  liczb dodatnich istnieje skończona granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^n,$$

to ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny do zera.

**87.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n + 1}} \right)$$

**88.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}) \ln \frac{2n + 1}{n}.$$

**89.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n - 1}{n + 1} \right)^{b_n},$$

gdzie  $b_n = (\sqrt{n + 1} - \sqrt{n - 1})^{-2}$ .

**90.** Ciąg  $(a_n)$  jest określony rekurencyjnie:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = 1, \quad a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \sqrt{a_{n-2}} \quad \text{dla } n \geq 3.$$

Wykazać, że ciąg  $(a_n)$  jest rosnący i ograniczony, a następnie znaleźć jego granicę.

**91.** Ciąg  $(x_n)$  jest określony rekurencyjnie:

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = f(f(x_n)) \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots,$$

gdzie  $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ . Wykazać, że  $x_n$  jest monotoniczny i ograniczony i obliczyć jego granicę.

**92.** Ciąg  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  ma wyrazy dodatnie i jest ograniczony. Wykazać, że jeśli ciąg  $(c_n)$  ma granicę równą 0, to ciąg dany wzorem

$$b_n := c_n \sqrt[n]{\ln(1+a_1) \cdot \ln(1+a_2) \cdot \dots \cdot \ln(1+a_n)}$$

też ma granicę równą 0.

**Wskazówka.** Wykorzystać nierówność  $\ln(1+x) \leq x$  dla  $x > 0$ .

**93.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + \sqrt[n]{n}}{2} \right)^{\frac{n}{\ln n}}.$$

**94.** Wykazać, że jeśli ciąg liczb rzeczywistych  $(a_n)$  spełnia jednocześnie dwa warunki:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0,$$

a ponadto

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m > N \quad |a_{3m} - a_{3n}| \leq \varepsilon,$$

to  $(a_n)$  jest zbieżny. Podać przykłady świadczące o tym, że żaden z powyższych warunków z osobna nie jest warunkiem wystarczającym zbieżności ciągu  $a_n$ .

**95.** Wykazać, że jeśli

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

jest zbiorem wyrazów zbieżnego ciągu liczb rzeczywistych  $(a_n)$ , to  $\sup A \in A$  lub  $\inf A \in A$ .

Podać przykład takiego ograniczonego ciągu rozbieżnego  $(b_n)$ , dla którego ani  $\sup B$ , ani  $\inf B$  nie są elementami zbioru  $B$  wszystkich wyrazów ciągu  $(b_n)$ .

**96.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)}.$$

**Wskazówka:** przydatne mogą być (ale nie muszą) różne własności logarytmu naturalnego.

**97.** Niech  $x > 0$ . Definiujemy ciąg  $(a_n)_{n \geq 1}$  wzorem

$$\sqrt[n]{x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1}.$$

(a) Wyznaczyć  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

(b) Zbadać monotoniczność ciągu  $a_n$ .

**98.** Załóżmy, że ciąg  $(a_{n^2})_n$  jest zbieżny do granicy skończonej, ponadto wyrazy ciągu  $(a_n)_n$  spełniają warunek

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ takie, że } \forall m > N \quad \exists n > N \text{ takie, że } |a_m - a_{n^2}| < \varepsilon.$$

Czy wynika stąd zbieżność ciągu  $(a_n)_n$ ?

**99 (trudniejsze).** Niech  $x_1, x_2, \dots, x_n$  będą rzeczywiste i dodatnie. Przyjmijmy  $x_{n+1} = x_1$ . Proszę udowodnić, że

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^3}{x_{i+1}^2} \geq \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{x_{i+1}}.$$

## 2.1 Nowe zadania

**100.** Niech ciąg  $(a_n)$  będzie zbieżny do  $a$  i niech ciąg  $(b_n)$  będzie określony wzorem

$$b_n = \frac{n^3 a_n + 2n^2 - n}{2n^3 a_n + 5n + 2}.$$

Wykazać, że:

- a) jeśli  $a \neq 0$ , to ciąg  $(b_n)$  jest zbieżny,
- b) jeśli  $a = 0$ , to ciąg  $(b_n)$  może być rozbieżny.

**101.** Wykazać tożsamość

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n^3 - n)3^n} = -\frac{1}{2} + \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}.$$

**102.** Dla liczby naturalnej  $l$  oznaczmy przez  $s(l)$  sumę cyfr jej rozwinięcia dziesiętnego. Niech ciąg  $(a_n)$  liczb naturalnych będzie określony rekurencyjnie:  $a_1 = k$ ,  $a_{n+1} = s(a_n)$ . Wykazać, że ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny.

**103.** Zbadać zbieżność i, jeżeli istnieją, obliczyć granice ciągów

- a)  $a_n = \frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n}$ , gdzie  $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3) \cdot (2n-1)$ .
- b)  $b_n = n \log \left( \frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1} \right)$ ,
- c)  $c_n = n \left( (n+1)^{\frac{1}{100}} - n^{\frac{1}{100}} \right)$ .

**104.** Obliczyć

- a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n^5 + (n+1)^5 + (n+2)^5 + \cdots + (n+n)^5}$ ,
- b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} \right)$ .
- c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( 1 + \frac{2}{1 + \sqrt{2}} + \frac{3}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{n}{1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}} \right)$ .

**105.** Dana jest liczba wymierna  $a > 0$ . Określamy ciąg liczb wymiernych  $a_1, a_2, \dots$  rekurencyjnie:  $a_1 = a$ , zaś dla  $n > 1$  określamy  $a_n = \frac{q+n}{p+n}$ , przy czym liczba  $\frac{p}{q}$  jest liczbą  $a_{n-1}$  zapisaną w postaci ułamka nieskracalnego. Dowieść, że ciąg  $a_1, a_2, \dots$  jest zbieżny.

**106.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[n]{7} + 2\sqrt{n^2 + \ln 3} - 2\sqrt{n^2 + \ln 2} \right)^n.$$

*Wskazówka.* Jeśli  $na_n \rightarrow g$ , to  $(1 + a_n)^n \rightarrow \exp(g)$ .

### 3 Szeregi liczbowe i okolice

**Uwaga:** wszędzie w tym podrozdziale symbol  $[x]$  oznacza część całkowitą (tzn. *entier*) liczby rzeczywistej  $x$ , inaczej *podłogę*  $x$ , a symbol  $\lceil x \rceil$  – tzw. *sufit* liczby  $x$ , tzn.  $\lceil x \rceil = [x]$  dla  $x \in \mathbb{Z}$  oraz  $\lceil x \rceil = [x] + 1$  dla  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

**107.** Zbadać zbieżność szeregów

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

**108.** Zbadać zbieżność szeregów

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n \ln n} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(1-\sqrt[n]{2})}$$

**109.** Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}.$$

**110.** Znaleźć wszystkie wartości parametru  $a \in \mathbb{R}$ , dla których szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\varepsilon_n}, \quad \text{gdzie } \varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2} - 1},$$

jest zbieżny.

**111.** Znaleźć wszystkie wartości parametru  $p \in \mathbb{R}$ , dla których szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n!} \right)^p$$

jest zbieżny.

**112.** Niech  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  będzie dowolnym szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich. Czy szereg:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[4]{a_n^5}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin a_n$$

są zbieżne? Uzasadnić odpowiedź, podając dowód lub kontrprzykład.

**113.** Niech  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  będzie dowolnym szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich. Czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{\ln n} (n^{a_n} - 1)$$

jest zbieżny? Uzasadnić odpowiedź.

**114.** Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^5(2n^7 + 13) + 10 \sin(n)}{n \ln^6(n^{\frac{7}{8}} + 2\sqrt{n} - 1) \ln(\ln(n + (-1)^n))}.$$

**115.** Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{\lceil 1 + \sin^2 n^5 \rceil} \left( \frac{n^2 + 3n + 10}{n^2 + 5n + 17} \right)^{n^2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})}.$$

**116.** Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left( \cos \sqrt[3]{n^3 + \sqrt{n} + 7} - \cos \sqrt[3]{n^3 - 2\sqrt{n} + 3} \right).$$

**117.** Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\exp n}{\exp(n \sqrt[n]{n}) \ln^2 n}.$$

**118.** Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)!(n+1)^{n-1}}{n^{2n}}.$$

**119.** Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{\lfloor \frac{n^3+n+1}{3n^2-1} \rfloor} \frac{\ln n}{n}.$$

**120.** Niech

$$S_k := \sum_{n=2}^k (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{1}{\ln n}.$$

Czy ciąg  $S_{(2k)^2}$  jest zbieżny? Czy ciąg  $S_k$  jest zbieżny? Obie odpowiedzi proszę uzasadnić.

**121.** Dany jest ciąg  $(a_n)$  o wyrazach zespolonych taki, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny. Niech  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  będzie bijekcją, o której wiadomo, że istnieje takie  $M \in \mathbb{N}$ , że dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi nierówność  $|\sigma(n) - n| \leq M$ . Wykazać, że wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

jest zbieżny.

**122.** Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{n^2 + 7} - \sqrt[3]{n^3 + 8n + 1} \right) (\ln(n+1) - \ln n).$$

**123.** Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=13}^{\infty} (-1)^{\lfloor \frac{n}{13} \rfloor} \frac{\ln n}{n \ln(\ln n)}.$$

**124.** Czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n^2}{\sqrt{n+1}} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

jest zbieżny? Uzasadnić odpowiedź.

**125.** Dany jest zbieżny szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Czy wynika stąd, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/\sqrt{n}$  jest a) zbieżny, b) bezwzględnie zbieżny? Odpowiedź uzasadnić, podając dowód lub kontrprzykład.

**126.** Szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n a_n$ , gdzie  $a_n > 0$  jest zbieżny. Czy jest zbieżny szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ? Odpowiedź uzasadnić, podając dowód lub kontrprzykład.

**127.** Zbadać zbieżność szeregów

$$\begin{aligned} \text{a)} & \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots \\ \text{b)} & \quad \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \dots \end{aligned}$$



**128.** Wykazać, że iloczyn Cauchy'ego szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$$

jest rozbieżny. Czy odpowiedź zmieni się, gdy pierwszy szereg zamienimy na  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-5/4}$ ?

**129.** Wykazać tożsamość

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n^3 - n)3^n} = -\frac{1}{2} + \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}.$$

**130.** Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n} + (-1)^{n(n+1)/2}}.$$

**131.** Udowodnić tożsamość

$$\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} = -1.$$

**132.** Udowodnić, że liczby zespolone  $z, w \in \mathbb{C}$  są równe wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następujący warunek:

(\*)  $\exp z = \exp w$  i dla pewnego  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  spełniona jest równość  $\exp(\alpha \cdot z) = \exp(\alpha \cdot w)$ .

**133.** Wykazać, że każda liczba zespolona  $w \in \mathbb{C}$  należy do zbioru wartości funkcji  $\cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

**134.** Dla  $\varepsilon > 0$  połóżmy

$$S_\varepsilon := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \varepsilon y > |x|, |z| < \varepsilon\} \subset \mathbb{C}.$$

Niech  $f(z) = \exp(1/z)$  dla  $z \neq 0$ . Wykazać, że  $f: S_\varepsilon \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  jest surjekcją.

**135.** Szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o wyrazach zespolonych jest zbieżny. Udowodnić, że istnieje ciąg nieograniczony  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  liczb dodatnich taki, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  też jest zbieżny.

## 4 Granica i ciągłość funkcji

**Uwaga:** w rozwiązaniach zadań o granicach proszę posługiwać się wyłącznie faktami znanymi z wykładu.

136. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}.$$

137. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{x \cdot \sin(\sin x)}.$$

138. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \left( \sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x^2 + 2} \right).$$

139. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\sqrt{x}}.$$

140. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^{1/\pi}}{1 - x^{1/e}}.$$

141. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^2 + x + 1}{2x + 1} \right)^{1/(x^2 - 1)}.$$

142. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x} - 1}{x^2}.$$

143. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt[3]{x + 20}}{\sqrt[4]{x + 9} - 2}.$$

144. Obliczyć

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos \sqrt{x})^{1/x}.$$

**Wskazówka:** Można wykorzystać wzór  $\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/24 - \dots$ , a także jedną z wersji lematu o potęgach ciągów szybko zbieżnych do 1.

145. Obliczyć

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$$

dla  $m, n \in \mathbb{N}$ .

146. Dla jakich parametrów  $a, b, c \in \mathbb{R}$  funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + a^2} & \text{dla } |x| > 1, \\ ax^2 + bx + c & \text{dla } |x| \leq 1 \end{cases}$$

jest ciągła na  $\mathbb{R}$ ?

**147.** Niech  $P(x)$  i  $Q(x)$  będą wielomianami takimi, że  $P(0) = Q(0) = 0$ . Jakie możliwe wartości (włączając  $+\infty$  i  $-\infty$ ) może przyjąć wyrażenie

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{Q(x)} ?$$

Scharakteryzować te pary  $(P, Q)$ , dla których powyższa granica istnieje i jest różna od 0 i  $\pm\infty$ .

**148.** Niech  $f(x) = \ln(1 - x^2)$ ,  $|x| < 1$ . Naszkicować wykres tej funkcji i scharakteryzować wszystkie wielomiany  $Q$ , dla których granica

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Q(x)}{f(x)}$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą.

**149.** Podać przykład funkcji  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , która ma granicę tylko w punktach 0 i 1.

**150.** Wyznaczyć stałe rzeczywiste  $a, c$  tak, by funkcja

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \exp(\operatorname{tg} x) / (1 + \exp(\operatorname{tg} x)) & \text{dla } |x| < \pi/2, \\ \exp(c \cdot x) - 2 & \text{dla } |x| \geq \pi/2 \end{cases}$$

była ciągła na prostej  $\mathbb{R}$ .

**151.** Niech

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

i niech  $g(x) = x^2$  dla  $x \in \mathbb{R}$ . Zbadać ciągłość funkcji  $f \circ g$  oraz  $g \circ f$  na całej prostej rzeczywistej.

**152.** Wyznaczyć stałe dodatnie  $A, B, C$ , dla których istnieje funkcja ciągła  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  taka, że

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{A\sqrt{x} - B}{x^2 - 4} && \text{dla } x > 2, \\ f(x) &= \frac{\ln(Cx)}{x - 2} && \text{dla } 0 < x < 2. \end{aligned}$$

**153.** Dla jakich stałych rzeczywistych  $A$  funkcja

$$f(x) = [x] \cos(Ax), \quad x \in \mathbb{R},$$

gdzie  $[x]$  oznacza część całkowitą liczby  $x$ , jest ciągła na  $\mathbb{R}$ ?

**154.** Zbadać, czy istnieje taka liczba  $a \in \mathbb{R}$ , dla której funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x(\cos x - a)}{\sin x}, & x \neq 0, x \in (-\pi, \pi) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

jest ciągła na przedziale  $(-\pi, \pi)$ .

**155.** Funkcja  $f$  jest ciągła na przedziale  $[1/(2\sqrt{2}), 2\sqrt{2}]$  i spełnia warunek

$$f(2\sqrt{2}) - f(1/(2\sqrt{2})) = 3.$$

Wykazać, że dla pewnej liczby  $x$  zachodzi równość  $f(2x) - f(x) = 1$ .

**156.** Funkcja  $f$  jest ciągła na  $[0, 1]$  i spełnia zależność

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + 1/3) + f(x + 2/3)}{x} = 1.$$

Udowodnić, że istnieje punkt  $x_0 \in [0, 1]$  taki, że  $f(x_0) = 0$ .

**157.** Bez pomocy kalkulatora wyznaczyć rzeczywisty pierwiastek wielomianu  $x^3 + x^2 + 2x + 1$  z dokładnością co najmniej  $\frac{1}{16}$ .

**158.** Funkcja  $f$  jest ciągła na przedziale  $[a, b]$ . Określamy

$$g(x) = \sup_{t \in [a, x]} f(t).$$

Dowieść, że  $g$  jest ciągła na przedziale  $[a, b]$ .

**159.** Funkcja  $f$  jest ciągła na  $(-1, 1]$ . Dla  $x \in (-1, 1]$  określamy

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^n).$$

Udowodnić, że  $g$  jest funkcją ciągłą wtedy i tylko wtedy, gdy  $f(0) = f(1)$ .

**160.** Niech  $[x]$  oznacza część całkowitą liczby  $x$ . Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left[ \frac{1}{x} \right].$$

**161.** Wykazać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{k \rightarrow \infty} (\cos(|n!\pi x|)^{2k}) \right) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

## 5 Rachunek różniczkowy

**162.** Funkcja różniczkowalna  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia równanie  $f(x) = f'(x)$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ . Ponadto  $f(0) = a$ . Wykazać, że  $f(x) = ae^x$ .

**163.** Wielomian  $W(x)$  ma  $n$  różnych pierwiastków rzeczywistych. Wykazać, że dla dowolnej liczby  $\alpha \in \mathbb{R}$  wielomian  $\alpha W(x) + W'(x)$  ma co najmniej  $n - 1$  różnych pierwiastków rzeczywistych.

**164.** Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x} \exp(-1/|x|) & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

jest w punkcie  $x_0 = 0$  ciągła? różniczkowalna? Odpowiedzi proszę uzasadnić. Obliczyć kres górny i kres dolny  $f$  na zbiorze  $\mathbb{R}$ .

**165.** Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne funkcji  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1} \sqrt[5]{x^2-2x+1}.$$

**166.** Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne funkcji  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem

$$f(x) = \sqrt[5]{x-2} \sqrt[9]{x-7}.$$

**167.** Znaleźć kresy zbioru

$$A = \{ \sqrt[n^2]{n^2 + 2n + 1} \mid n \in \mathbb{N} \}.$$

**168.** Niech  $f(x) = \sin \ln x$  dla  $x > 0$ . Proszę wyznaczyć:

- (a) wszystkie  $a > 0$ , dla których  $f$  jest jednostajnie ciągła na  $(0, a]$ ;
- (b) wszystkie  $b > 0$ , dla których  $f$  jest jednostajnie ciągła na  $[b, \infty)$ ,
- (c) wszystkie  $c > 0$ , dla których  $f$  jest lipschitzowska na  $[c, \infty)$ ,
- (d) wszystkie  $d > 0$ , dla których  $f$  jest lipschitzowska na  $(0, d]$ .

**169.** Znaleźć ekstrema i zbadać wypukłość funkcji  $f : (0, e^2) \rightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem

$$f(x) = \frac{-2}{\ln(x) - 2}.$$

Czy istnieje takie  $n \in \mathbb{N}$ , że funkcja  $g(x) = (f(x))^n$  jest wypukła na przedziale  $(0, e^2)$ ? Odpowiedź uzasadnić.

**170.** Niech  $f_n(x) = \sqrt[n]{\exp(x)} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Czy istnieje takie  $n \in \mathbb{N}$ , że  $f_n$  jest wklęsła na przedziale  $[0, 1]$ ? Odpowiedź uzasadnić.

**171.** Niech  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ciągła, wypukła i ściśle rosnąca oraz  $f(a) = c$  i  $f(b) = d$ . Wykazać, że funkcja odwrotna  $f^{-1} : [c, d] \rightarrow [a, b]$  jest wklęsła.

**172.** Niech  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją wypukłą. Wiadomo, że istnieje punkt  $x \in (a, b)$  taki, że dla każdego  $y \in [a, b]$  zachodzi  $f(x) \geq f(y)$ . Udowodnić, że  $f$  jest funkcją stałą.

**173.** Niech  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  będą funkcjami ciągłymi i wypukłymi. Wykazać, że funkcja  $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem

$$h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

też jest wypukła.

**174.** Niech  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją wypukłą i ciągłą. Wykazać, że funkcja  $m : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem

$$m(x) = \max\{f(y) : y \in [a, x]\}$$

też jest wypukła.

**175.** Znaleźć wszystkie pary liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$ , dla których funkcja

$$f(x) = \begin{cases} a(x+1) + \sin(bx) & \text{dla } x \geq 0 \\ \frac{\cos x - 1}{x \sin x} & \text{dla } x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

jest różniczkowalna na przedziale  $(-\pi, \infty)$ .

**176.** Wyznaczyć kresy zbioru wartości funkcji  $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$ .

**177.** Wykazać, że równanie

$$(x - \sqrt{2}) \ln(x - \sqrt{2}) + (x + \sqrt{2}) \ln(x + \sqrt{2}) = 2x$$

ma co najwyżej dwa rozwiązania w  $\mathbb{R}$ .

**178.** Znaleźć minimum objętości stożków opisanych na kuli o promieniu  $r$ .

**179.** Spośród wszystkich deltoidów o obwodzie  $l$  wskazać ten o największym polu.

**180.** Wśród wszystkich trójkątów o obwodzie równym 3 znaleźć trójkąt o największym polu.

**181.** Obliczyć kres dolny na przedziale  $(0, \infty)$  funkcji

$$f(x) = \ln(e^x - 1) + \frac{2}{x} - x.$$

**182.** Niech  $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\sin 2x}$  dla  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Wykazać, że  $f$  osiąga swój kres dolny na przedziale  $(0, \frac{\pi}{2})$  w dokładnie jednym punkcie  $u \in (0, \frac{\pi}{2})$  oraz osiąga swój kres górny w dokładnie jednym punkcie  $v$  tego przedziału. Obliczyć  $u + v$ .

**183.** Dana jest funkcja  $f(x) = e^{-|2x+1|}(x^2 + 2x + 3)$ .

(a) wyznaczyć przedziały monotoniczności  $f$ ;

(b) wskazać przedziały, na których  $f$  jest wypukła;

(c) rozstrzygnąć, czy  $f$  jest jednostajnie ciągła na  $\mathbb{R}$ .

**184.** Wykorzystując wzór Taylora dla  $n = 3$ , wyznaczyć przybliżoną wartość  $\sqrt[3]{e}$ . Oszacować błąd przybliżenia.

**185.** Niech

$$f(x) = \frac{(\sqrt[3]{x})^5 + 3\sqrt[3]{x^8}}{x \cdot \sqrt[6]{x}} \quad \text{dla } x > 0.$$

Dowieść, że jeśli  $a, b, c > 0$  i  $a + b + c = 3$ , to  $f(a) + f(b) + f(c) \geq 12$ .

**Wskazówka.** Sprawdzić, na jakich przedziałach  $f$  jest wypukła.

**186.** Wykazać, że

$$1 + \exp \frac{a + b + c + d}{4} \leq \sqrt[4]{(1 + e^a) \cdot (1 + e^b) \cdot (1 + e^c) \cdot (1 + e^d)}$$

dla wszystkich  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

**187.** Wykazać, że dla  $|x| < 1$  błąd przybliżenia

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

nie przekracza  $\frac{1}{720}$ .

**188.** Udowodnić, że dla wszystkich  $x > 0$  spełniona jest nierówność

$$\ln(1 + x) > \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{1 + x}.$$

**189.** Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich  $x$  i  $y$  zachodzi nierówność

$$x^x \cdot y^y \geq \left(\frac{x + y}{2}\right)^{x+y}.$$

**190.** Niech  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją wypukłą. Załóżmy, że  $h'(0)$  istnieje i jest liczbą większą od 1, a  $h(0) \geq 0$ . Wykazać, że  $h(x) > x$  dla  $x > 0$ .

**191.** Zbadać przebieg zmienności funkcji  $f(x) = (2 + x) \exp(1/x)$ .

**192.** Wykazać, że dla  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  zachodzi nierówność

$$\frac{2 \ln(\cos x)}{x^2} < \frac{x^2}{12} - 1.$$

**193.** Wykazać, że jeśli  $e < y < x$ , to

$$x^y < y^x.$$

**194.** Niech  $f(x) = x^{-1}e^x$  dla  $x > 0$  i niech

$$M(t) = \sup_{x \in [t, t+1]} f(x), \quad t > 0.$$

Wyznaczyć kres dolny funkcji  $M: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

**195.** Obliczyć  $n$ -tą pochodną funkcji  $x^n e^{-x}$  w zerze.

**196.** Znaleźć rozwinięcie Taylora wokół  $x = 2$  funkcji  $f(x) = x^5 + x^4 + 2x + 1$ .

**197.** Znaleźć piąty wyraz rozwinięcia Taylora funkcji  $\sin(\operatorname{tg} x)$  wokół  $x = 0$ .

**198.** Wyznaczyć trzeci wyraz rozwinięcia Taylora wokół  $x = 0$  funkcji

$$f(x) = \frac{(1+x)^4}{(1+2x)^3(1-2x)^2}.$$

**199.** Niech

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) \cdot \exp(-1/x^2) & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Czy  $f''(0)$  istnieje? Czy  $x_0 = 0$  jest punktem przegięcia  $f$ ? Odpowiedzi proszę uzasadnić.

**200.** Posługując się tylko wzorem Taylora, obliczyć  $\ln 3 - \ln 2$  z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

**201.** Wyznaczyć wszystkie pary liczb  $a, b \in \mathbb{R}$ , dla których granica

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (a + b \cos x) \sin x}{x^5}$$

jest skończona.

**202.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} (\operatorname{arc} \operatorname{tg}(\sqrt{n+1}) - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{n}).$$



**203.** Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

**204.** Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{\operatorname{tg} x - x}.$$

**205.** Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x}{\ln(1 + \frac{1}{x})}.$$

**206.** Obliczyć granicę ciągu

$$a_n = \left( \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)^n$$

**207.** Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{x + \varphi(x)}\right)} - \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{x + \psi(x)}\right)} \right],$$

gdzie

$$\varphi(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad \psi(x) = \sqrt[x]{x} \quad \text{dla } x > 0.$$

**Wskazówka:** wykorzystać twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej dla funkcji  $1/\sin(1/x)$ .

**208.** Udowodnić, że jeśli funkcja różniczkowalna  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia warunek

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = g \in \mathbb{R},$$

to  $f$  jest jednostajnie ciągła na całej prostej  $\mathbb{R}$ .

**Wskazówka.** Czy  $f$  spełnia warunek Lipschitza na przedziale  $[a, \infty)$ , gdy liczba  $a$  jest dostatecznie duża?

**209.** Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x \sin x \operatorname{tg}(x \sin x)} - \frac{1}{x^2 \sin^2 x} \right).$$

**210.** Niech  $f(x) = 2 - 2 \cos x - x \cdot \sin(\sin x)$  i niech  $a_n = f(\frac{1}{n})$  dla  $n \in \mathbb{N}$ . Wyznaczyć wszystkie wykładniki  $w > 0$ , dla których szereg  $\sum a_n^w$  jest zbieżny.

**211.** Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x) - x}{\operatorname{tg}(2x) - 2 \ln(1+x) - x^2}.$$

**212.** Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(1 - \cos(x)) - \operatorname{tg}^2(\sin(x))}{(\cos(x) - 1)^2}.$$

**213.** Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin(\ln(\arcsin(\operatorname{tg}(\exp(x) - 1) - \sin(x) + 1))))}{(\arcsin(x) - \sin(x))^{2/3}}.$$

**214.** Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1 - \sin(x)} - \cos(x) - \operatorname{tg}(x) - \frac{3}{2} \arcsin(\operatorname{tg}^2(x))}{\arcsin^3(\sin(x))}.$$

## 6 Zbieżność jednostajna i szeregi potęgowe

**215.** Wykazać, że jeśli  $a_n$  jest ciągiem monotonicznie zbieżnym do  $a$ , zaś  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcją ciągłą i monotoniczną, to ciąg funkcji

$$f_n(x) := f(x + a_n)$$

jest zbieżny jednostajnie na każdym przedziale  $[-M, M] \subset \mathbb{R}$ .

**216.** Podać przykład ciągu funkcji  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takiego, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  jest zbieżny jednostajnie, ale szereg norm  $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty}$  jest rozbieżny.

**217.** Wykazać, że granica punktowa ciągu funkcji wypukłych jest funkcją wypukłą.

**218.** Zbadać zbieżność jednostajną szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{(n + x^2) \ln^2 n}.$$

**219.** Zbadać zbieżność jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{x+n}}$$

na przedziale  $[0, +\infty)$ .

**220.** Znaleźć zbiór  $X \subset \mathbb{R}$  punktów zbieżności szeregu funkcyjnego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \sqrt{\cos\left(\frac{2n+3}{5n^2-7}\right)} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^n.$$

**221.** Znaleźć zbiór  $X \subset \mathbb{R}$  punktów zbieżności szeregu funkcyjnego

$$\sum_{n=1}^{\infty} x \sin\left(\frac{x}{1+n^2x^2}\right).$$

Czy szereg ten jest zbieżny jednostajnie na zbiorze  $X$ ? Odpowiedź proszę uzasadnić.

**222.** Niech  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ciągiem funkcyjnym, zbieżnym jednostajnie na  $\mathbb{R}$  do funkcji  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dla  $n \in \mathbb{N}$  kładziemy

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \exp(-(f_n(x))^2), & g(x) &= \exp(-(f(x))^2), \\ h_n(x) &= (f_n(x))^2, & h(x) &= (f(x))^2. \end{aligned}$$

Czy ciąg  $g_n$  zbiega jednostajnie na  $\mathbb{R}$  do funkcji  $g$ ? A czy ciąg  $h_n$  zbiega jednostajnie na  $\mathbb{R}$  do funkcji  $h$ ? Obie odpowiedzi proszę uzasadnić.

**223.** Zbadać, czy suma szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{nx} \cos \frac{x}{n}$$

jest ciągła na zbiorze  $(0, \pi)$ .

**224.** Zbadać zbieżność jednostajną i punktową ciągu

$$f_n(x) = n^2 \frac{1 - \cos\left(\frac{x}{n}\right)}{x}$$

na zbiorach  $(0, +\infty)$  i  $(0, a]$ , gdzie  $a > 0$ .

**225.** Zbadać zbieżność jednostajną i punktową ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \exp\left(x + \frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right) + \cos\left(\frac{x}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}\right)$$

na prostej rzeczywistej  $\mathbb{R}$ .

**226.** Zbadać zbieżność jednostajną i punktową ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = n^3 x \exp(-nx^2), \quad n = 1, 2, \dots$$

na odcinku  $[0, 1]$ .

**227.** Rozważmy funkcję  $f(x) = \frac{x}{\exp(2x)}$ . Definiujemy ciąg funkcyjny  $(f_n)$  przez wielokrotne składanie funkcji  $f$ :

$$f_n(x) := f^{\circ n}(x) = f \circ f \circ \dots \circ f(x).$$

Zbadać zbieżność jednostajną tego ciągu na zbiorze  $x \geq 0$ .

**228.** Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{x^5 + n^5}$$

jest dobrze określona i klasy  $C^1$  na  $[0, +\infty)$ .

**229.** Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 x)$$

jest dobrze określona i klasy  $C^1$  na  $(0, +\infty)$ .

**230.** Funkcja analityczna  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  (szereg ma promień zbieżności  $R > 0$ ) spełnia w przedziale  $(-R, R)$  równanie

$$f'(x) = x^2 f(x)$$

i ponadto  $f(0) = \pi$ . Wyznaczyć  $a_6$ .

**231.** Wyznaczyć promienie zbieżności następujących szeregów potęgowych:

a) 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \cdot 3^{n^2} \cdot 4^{n^3}}{n + n^2 + n^3} x^{2n^3},$$

b) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 + (-1)^n 2)^{2n}}{n} x^{2n+(-1)^n},$$

c) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (5n + (-1)^n)^n x^{2n},$$

d) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} 8^n \sqrt{n} x^{n+1}.$$

**232.** Szereg potęgowy  $\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n$  ma skończony promień zbieżności  $R > 0$ . Proszę wyznaczyć promień zbieżności szeregu  $\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^{n^2}$ .

**233.** Czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1 + (x - n)^2)}$$

jest zbieżny jednostajnie na  $(0, +\infty)$ ? Odpowiedź proszę uzasadnić.

**234.** Szereg potęgowy  $\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n$  ma skończony promień zbieżności  $R > 0$ . Proszę wyznaczyć promień zbieżności szeregu  $\sum_{n=3}^{\infty} 3^n a_n x^{n^3}$ .

**235.** Rozwinąć w szereg Taylora–Maclaurina funkcję  $f(x) = \sin(x^2) \cdot \cos(x^2)$ .

**236.** Rozwinąć szereg Taylora–Maclaurina funkcję

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x \cdot \operatorname{arc\,tg} x^2.$$

Obliczyć promień zbieżności tego szeregu.

**237.** Zbadać zbieżność jednostajną i niemal jednostajną szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  na przedziale  $(0, 1)$ , gdzie

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{dla } x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{dla } x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

**238.** Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

spełnia tożsamość

$$xf(x) = \frac{x}{1-x} + \ln(1-x), \quad x \in (-1, 1).$$

**Wskazówka.**  $n/(n+1) = 1 - \frac{1}{n+1}$ .

**239.** Czy suma szeregu

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x}{n} - \left(1 + \frac{x}{n}\right) \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \right)$$

jest funkcją dobrze określoną i różniczkowalną na  $(0, +\infty)$ ? Odpowiedzi proszę uzasadnić.

**240.** Udowodnić, że funkcja  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |\sin x|^{\sqrt{n}}$  jest ciągła na  $(-1, 1)$ . Zbadać jej różniczkowalność na tym przedziale.

**241.** Załóżmy, że  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ . Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{arc\,tg} nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**242.** Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \operatorname{arc\,tg} nx - \frac{\pi}{2} \right), \quad x > 0.$$

**243.** Wykazać, że funkcja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n^2}, \quad -3 < x < 3,$$

jest różniczkowalna i wyrazić jej pochodną jawnym, prostym wzorem.

**244.** Obliczyć sumę szeregu  $1/2 - 1/5 + 1/8 - 1/11 + \dots$ .

**Wskazówka.** Rozważać funkcję  $F(x) = x^2/2 - x^5/5 + \dots$ .

**245.** Załóżmy, że  $f \in C([0, \infty))$  nie jest funkcją stałą. Udowodnić, że rodzina  $f_n(t) := f(nt)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , nie jest równością na  $[0, 1]$ .

**246.** Udowodnić, że

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2 \arctg \sqrt{nx}}{1 + n^2 x^2} = \frac{\pi^3}{12}.$$

**247.** Dla  $x \in \mathbb{R}$  i  $n \in \mathbb{N}$  połączmy  $f_n(x) := x^2 + n^{-1} \sin nx$ . Udowodnić, że ciąg  $f_n$  jest zbieżny jednostajnie na całej prostej  $\mathbb{R}$ , ale nie jest rodziną równością na  $\mathbb{R}$ , tzn. nie jest prawdą, że dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$  takie, że nierówność  $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$  zachodzi dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$  i wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $|x - y| < \delta$ .

**248 (z gwiazdką, tylko dla zainteresowanych).** Funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest klasy  $C^1$  i okresowa z okresem  $T = 1$ . Ponadto  $f(0) = 0$  i  $|f'| \leq 1$  na całej prostej  $\mathbb{R}$ . Dla  $n \in \mathbb{N}$  kładziemy

$$f_n(x) = \frac{f(2^n x)}{(\sqrt{2})^n} \quad \text{oraz} \quad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

1. Niech  $k, n \in \mathbb{N}$ ,  $\theta \in (0, 1)$ . Połączmy  $x = \frac{k}{2^n}$  oraz  $y = x + \frac{\theta}{2^{n+1}}$ . Wykazać, że istnieje stała  $C_1$ , niezależna od  $k, n$  i  $\theta$ , taka że

$$|F(x) - F(y)| \leq C_1 2^{-n/2}.$$

2. Wywnioskować z poprzedniego punktu, że  $F$  spełnia warunek Höldera z wykładnikiem  $\frac{1}{2}$ , tzn. istnieje taka stała  $C_2$ , że

$$|F(x) - F(y)| \leq C_2 |x - y|^{1/2} \quad \text{dla wszystkich } x, y \in \mathbb{R}.$$

3. Zbadać różniczkowalność  $F$ .

**249.** Sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4n + 3}$$

przedstawić wyraźnym, konkretnym wzorem jako funkcję zmiennej  $x$ . Na jakim przedziale słuszny jest otrzymany wzór?

## 7 Rachunek całkowy

250. Rozłożyć na ułamki proste funkcję wymierną

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 6}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2}.$$

251. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int (2x^3 + x) (\operatorname{arc\,tg} x)^2 dx.$$

252. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \exp(2x) \cos^3(x) dx.$$

253. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x} dx$$

254. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{\sin^2 x \cdot \operatorname{ctg} x}{(1 + \sin^2 x) \cos^2 x} dx$$

255. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji  $f(x) = x^2 \sqrt{4 - x^2}$ .

256. Funkcja  $f(x)$  dana jest wzorem

$$f(x) = \int_x^{\sqrt{x^2+1}} \sin(t^2) dt.$$

Obliczyć  $f'(x)$ .

257. Znaleźć kres dolny i górny funkcji

$$F(x) = \int_0^x \frac{5t + 3}{t^3 - 7t^2 + 16t - 12} dt$$

na przedziale  $[-1, 1]$ .

258. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} x} dx}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin x} dx}.$$

**259.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{k}{n^2}.$$

**260.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{2n^2 + kn - k^2}}{n^2}.$$

**261.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{\frac{(n+1)^{n+1}(n+2)^{n+2} \cdot \dots \cdot (2n)^{2n}}{n^{n+1}n^{n+2} \cdot \dots \cdot n^{2n}}}.$$

**262.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{n^5}{(n^2 + k^2)^3}.$$

**263.** Skonstruować przykład ciągu funkcji ciągłych  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  takiego, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$  dla każdego  $x \in [0, 1]$ , ale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = +\infty.$$

**264.** Wykazać, że

$$\int_0^2 e^{x^2-x} dx$$

należy do przedziału  $[2e^{-1/4}, 2e^2]$ .

**265.** Wykazać, że dla  $n = 3, 4, 5, \dots$  prawdziwa jest równość

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x dx.$$

**266.** Niech  $f$  będzie funkcją dodatnią, ciągłą i rosnącą na przedziale  $[a, b]$  i niech  $a' = f(a), b' = f(b)$ . Wykazać, że

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{a'}^{b'} f^{-1}(y) dy = bb' - aa',$$

gdzie  $f^{-1}$  oznacza funkcję odwrotną do  $f$ .

**Wskazówka:** Wykorzystać geometryczną interpretację całek.



**267.** Niech  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą o wartościach dodatnich. Wykazać, że dla każdego  $x > 0$  prawdziwa jest nierówność

$$\int_0^x t^2 f(t) dt \cdot \int_0^x f(t) dt \geq \left( \int_0^x t f(t) dt \right)^2.$$

**Wskazówka:** zróżniczkować badane wyrażenie względem  $x$ .

**268.** Niech  $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą okresową, o okresie  $T = 1$  i całce oznaczonej  $\int_0^1 f_0(x) dx = 1$ . Dla  $n \in \mathbb{N}$  definiujemy

$$f_n(x) = \frac{f_0(5^n x)}{2^n}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

$$\text{oraz } F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Wykazać, że szereg  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  jest zbieżny jednostajnie na całej prostej  $\mathbb{R}$  i  $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x f_n(t) dt$

**269.** Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{x},$$

gdzie  $F$  jest funkcją z poprzedniego zadania.

**270.** Funkcja  $f$ , ciągła i nieujemna na przedziale  $[a, b]$ , ma na tym przedziale kres górny  $M$ . Dowieść, że ciąg

$$\left( \int_a^b f(x)^n dx \right)^{1/n}$$

ma granicę równą  $M$ .

**271.** Obliczyć całkę funkcji  $f(x) = x \exp(-\sqrt{x})$  po maksymalnym przedziale półosi dodatniej, na którym ta funkcja jest wklęsła.

**272.** Wyznaczyć liczbę dodatnią  $x$ , dla której wartość całki

$$\int_0^{\sqrt{x}} \sin(2\pi t/(t+2)) dt$$

jest największa.

**273.** Wykazać, że jeśli funkcja  $f$  jest ciągła na przedziale  $[a, b]$ , to

$$n \int_a^b f(x) \left( \int_a^x f(y) dy \right)^{n-1} dx = \left( \int_a^b f(x) dx \right)^n$$

dla każdej liczby naturalnej  $n$ .

**274.** Punkt  $A$  znajduje się w środku układu współrzędnych w  $\mathbb{R}^2$ . Prosta  $\ell$  przechodzi przez  $A$ . W chwili  $t_0 = 0$  punkt  $A$  zaczyna się poruszać po prostej  $\ell$  ze stałą prędkością 1 m/s, a jednocześnie prosta  $\ell$  zaczyna się obracać ze stałą prędkością kątową 1 radiana na sekundę. Obliczyć długość krzywej, jaką punkt  $A$  zakresli, poruszając się od  $t_0 = 0$  do  $t_1 = 1$  s.

**275.** Zbadać zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^\pi \frac{(\sin x)^a}{x^b + (\pi - x)^c} dx,$$

gdzie  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

**276.** Zbadać zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^\infty \frac{x^a \cdot |\sin x|^b}{\exp(x^2) - 1} dx,$$

gdzie (wariant 1)  $a, b > 0$ , (wariant 2, trudniejszy)  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**277.** Niech  $f \in C((0, 1])$  będzie taka, że  $\int_0^1 |f(x)| dx$  jest zbieżna. Niech  $\alpha \in (0, 1)$  będzie dowolną liczbą. Wykazać, że

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r^{1-\alpha}} \int_0^r |f(x)|^\alpha dx = 0.$$

**Wskazówka:** Zastosować nierówność Höldera z wykładnikiem  $p = 1/\alpha$ .

**278.** Niech  $\alpha \in (0, 1)$ . Obliczyć granicę

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r |\ln r|^\alpha} \int_0^r |\ln x|^\alpha \exp(-x^2) dx.$$

Poszczególne kroki w obliczeniach proszę starannie uzasadnić.

**Wskazówka:** Można zastosować nierówność Höldera z wykładnikiem  $p = 1/\alpha$ , a następnie spróbować wykorzystać twierdzenie o 3 funkcjach i monotoniczność logarytmu.

**279.** Niech  $f \in C(\mathbb{R})$  i niech  $M > 0$ . Udowodnić, że ciąg funkcyjny

$$f_n(z) = \frac{n}{2} \int_{z-\frac{1}{n}}^{z+\frac{1}{n}} f(y) dy$$

jest zbieżny do  $f$  jednostajnie na  $[-M, M]$ .

**280.** Załóżmy, że  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia warunek Lipschitza. Wykazać, że istnieje stała  $C > 0$  taka, że dla każdego  $k = 1, 2, \dots$  jest

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx \leq \frac{C}{k}.$$