Stała Eulera - Mascheroniego

Leonhard Euler (ur. 1707 w Bazylei, zmarł 1783 w Petersburgu) szwajcarski matematyk, jeden z największych matematyków w historii. Uczeń Jana Bernoulliego, studiował w Bazylei; po śmierci Mikołaja Bernoulliego (syna Jana) objął po nim w 1727 roku pozycję w Petersburgu. Tam współpracował m.in z kolejnym synem Jana, Danielem Bernoullim, Christianem Goldbachem i Jakubem Hermannem.
W 1741 roku przeniósł się, na zaproszenie Fryderyka II, do Berlina, by w 1766 roku wrócić do Petersburga. Mniej więcej w tym samym czasie stracił wzrok, odtąd swoje dzieła dyktował. Wniósł ogromny wkład we wszystkie istniejące wówczas dziedziny matematyki, w tym w teorię liczb, teorię szeregów, (i inne działy analizy matematycznej), analizę zespoloną, teorię funkcji specjalnych, kartografię, równania różniczkowe, rachunek wariacyjny, geometrię różniczkową, mechanikę bryły sztywnej i hydrodynamikę, astronomię, optykę, teorię muzyki, teorię grafów...
Jego „Opera Omnia", od ponad 100 lat kompletowane przez Szwajcarską Akademię Nauk, liczą na razie 72 tomy, & wciąż publikowane są (i przygotowywane do publikacji) listy Eulera – kolejne kilka~~dziesiąt~~naście tomów. W sumie Euler opublikował ok. 900 prac, w tym 40 książek. Zmarł na wylew w 1783 roku; z żoną Katarzyną Gsell miał 13 dzieci, z czego 5 dożyło dorosłego wieku.

Lorenzo Mascheroni (1750, Bergamo – 1800, Paryż)
włoski ksiądz i matematyk, początkowo uczył matematyki i fizyki w seminarium duchownym w Bergamo, potem objął katedrę algebry i geometrii w Pawii; od 1789 do 1793 był rektorem tego uniwersytetu. Miał istotny wkład w rozwój statyki, ale w matematyce pamiętany jest ze względu na 2 wyniki:

- dowód, że każdą konstrukcję, którą można wykonać przy pomocy cyrkla i linijki, można wykonać również przy pomocy samego cyrkla

  Oczywiście nie chodzi o to, by przy pomocy cyrkla rysować odcinki. Twierdzenie mówi, że <u>każdy punkt</u>, który można wyznaczyć klasyczną konstrukcją (cyrkiel + linijka) można wyznaczyć używając tylko cyrkla. (ten sam wynik, zupełnie innymi metodami, uzyskał 125 lat wcześniej duński matematyk Georg Mohr, jego praca popadła jednak w zapomnienie).

- obliczenie stałej znanej dziś jako stała Eulera–Mascheroniego z dokładnością do 32 miejsc po przecinku.

  W rzeczywistości Mascheroni pomylił się przy 20 miejscu i dalsze cyfry wyznaczył błędnie.

Zmarł w 1800 roku w Paryżu.

Przyjrzyjmy się ciągowi

$$a_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n}$$

Mianownik dąży do $+\infty$ przy $n\to\infty$, możemy więc do obliczenia $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ użyć lematu Stolza:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \overset{S}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n+1)-\ln n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln\underbrace{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]}_{\downarrow n\to\infty \atop e}} = 1.$$

Stąd, dla dużych n, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} \approx \ln n$.

Ale jak dobre jest to przybliżenie? Czy błąd rośnie, czy maleje przy $n\to\infty$? Co wiemy o $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$?

Oznaczmy $\alpha_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$.

$$\alpha_{n+1}-\alpha_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)-1-\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{n}+\ln n =$$

$$= \frac{1}{n+1}+\ln\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}+\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \underset{\uparrow}{\le} \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1} = 0$$

bo $\ln(1+t)\le t$ dla $t>-1$

Stąd $\alpha_{n+1}\le\alpha_n$ i ciąg (α_n) jest nierosnący.

A teraz rozważmy ciąg

$$\beta_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \ln n = \alpha_n - \frac{1}{n} \qquad (\text{dla } n \geqslant 2)$$

$$\beta_{n+1} - \beta_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \ln\frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{\uparrow}{\geqslant} \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0$$

jak poprzednio, $\ln(1+t) \leq t$ dla $t > -1$

Tak więc (β_n) jest niemalejący. Oczywiście

$\forall_n$

$$\beta_1 \leq \beta_2 \leq \ldots \leq \beta_n \qquad \leq \qquad \alpha_n \leq \alpha_{n-1} \leq \ldots \leq \alpha_2 \leq \alpha_1$$

więc (β_n) jest ograniczony z góry ($\Rightarrow$ zbieżny) a (α_n) – z dołu. Widzimy też, że

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \lim_{n\to\infty}\left(\alpha_n - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$$

Oznaczmy tę wspólną granicę (α_n) i (β_n) przez γ.

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \beta_n \leq \gamma \leq \alpha_n .$$

$$\beta_4 \approx 0{,}447 \leq \gamma \leq \alpha_4 \approx 0{,}697$$

$$\beta_{10} \approx 0{,}5264 \leq \gamma \leq \alpha_{10} \approx 0{,}6264$$

$$\vdots$$

$\gamma \approx 0{,}57721566\ldots$ stała Eulera-Mascheroniego, pojawia się w różnych dziwnych miejscach w teorii liczb, teorii funkcji specjalnych, kwantowej teorii pola...

Nie wiadomo, czy γ jest liczbą wymierną!

Przykład zastosowania:

Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot\frac{1}{k} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}\right)$

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2[n/2]}\right)$$

$$= 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{[n/2]}\right)$$

$$= 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{[n/2]}-\ln[n/2]\right)$$

$$+\ln n-\ln\left[\frac{n}{2}\right] = \alpha_n-\alpha_{[n/2]}+\ln\frac{n}{[n/2]}$$

$\alpha_n\to\gamma$, więc $\alpha_{[n/2]}\to\gamma$, $\frac{n}{[n/2]}=\begin{cases}2 & n \text{ parzyste}\\ \frac{n}{\frac{n-1}{2}}=2\frac{n}{n-1} & \text{gdy } n \text{ nieparzyste.}\end{cases}$

stąd $\frac{n}{[n/2]}\xrightarrow{n\to\infty}2$

$\ln\frac{n}{[n/2]}\longrightarrow\ln 2$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\gamma-\gamma+\ln 2=\ln 2$$

Wykażemy ważny wzór:

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \quad \cancel{\sum_{k=1}} \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^k}{k!}\right)=\exp(x).$$

Dla $x=0$ jest to oczywiście prawda. Zajmijmy się teraz $x>0$.

Oznaczmy $S_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$

Mamy
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!\,x^k}{k!(n-k)!\,n^k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\,\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n}= \qquad (☆)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)=(*)$$

$$\le\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}=S_n(x).$$

Jeżeli teraz urwiemy sumę $(*)$ na m-tym wyrazie, to, dla $n\geq m$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \qquad \text{SUMA 1}$$

$$\geq\sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \qquad \text{SUMA 2}$$

gubimy nieujemne wyrazy

W sumie (SUMA 1) nie możemy przejść łatwo z n do ∞, bo długość tej sumy zwiększa się wraz z n (i dla takich sum nie działa tw. o arytmetycznych własnościach granicy). SUMA 2 jednak jest już skończoną sumą o ustalonej długości, więc

$$(\odot)\quad \exp(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\geq\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)=S_m(x)$$

Stąd ciąg $(S_n(x))$ jest

(•) rosnący (oczywiste z definicji)

(••) i ograniczony z góry (więc zbieżny)

Z rachunku (☆) i tw. o szacowaniu

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le \lim_{n\to\infty} S_n(x) \le \exp(x)$$

z rachunku (⊙)

więc $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \exp(x)$.

Wniosek:

e jest liczbą niewymierną.

Dowód

$$\cancel{e = \exp(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{\ }}$$

$$e = \exp(1) = \lim_{n\to\infty}\Big(\underbrace{1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}}_{e_n}\Big)$$

Ciąg (e_n) jest rosnący; oszacujmy $e-e_n$:

$$0 < e-e_n = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\dots+\frac{1}{k!}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\lim_{k\to\infty}\Big(\cancel{1}\ 1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\dots+\cancel{\frac{1}{(n+2)\cdot\ldots\cdot(k-1)k}}_{\cancel{(k-n-1)}}$$
$$+\frac{1}{(n+2)\cdot\ldots\cdot(k-1)k}\Big)$$

$$\le \frac{1}{(n+1)!}\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2}+\dots+\frac{1}{(n+1)^{k-(n+1)}}\right) =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \lim_{k\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{n+1}\right)^{k-n} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n\cdot n!}$$

Stąd

$$e_n < e < e_n + \frac{1}{n\cdot n!} \text{, czyli}$$

$$n!e_n < n!e < n!e_n + \frac{1}{n}$$

Załóżmy, że $e \in \mathbb{Q}$, a więc istnieją $p, q \in \mathbb{N}$ t.ż. $e = \frac{p}{q}$. Weźmy $n > q$. Wtedy $n!e \in \mathbb{N}$

Ale równocześnie $n!e_n = n!\cdot\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) \in \mathbb{N}$,

stąd

$$0 < \underbrace{n!(e-e_n)}_{\in \mathbb{N}} < \frac{1}{n} \quad \lightning$$

Wróćmy jeszcze do lematu Stolza.

Przyjrzyjmy się ciągowi $a_n = \frac{n^2+(-1)^n\cdot n}{n^2}$.

Oczywiście $a_n = 1+(-1)^n\cdot\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$; gdy jednak zapiszemy a_n w pierwszej z postaci, tj $\frac{n^2+(-1)^n n}{n^2}$, widzimy, że mianownik dąży do ∞. Możemy zatem, obliczając $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, skorzystać z lematu Stolza.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+(-1)^n n}{n^2} \overset{S}{=} \cancel{\lim_{n\to\infty} (n+1)^2+(-1)^{n+1}(n+1}$$

$$\overset{S}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+(-1)^{n+1}(n+1)-n^2-(-1)^n n}{(n+1)^2-n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1+(-1)^{n+1}(2n+1)}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left[1+(-1)^{n+1}\right].$$

Ta ostatnia granica nie istnieje!

Nie można z tego wywnioskować, że nie istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$! (bo wiemy, że istnieje).