Analiza matematyczna I.1
semestr zimowy 2015/16

Paweł Goldstein
goldie@mimuw.edu.pl
pok. 5160
http:\\ www.mimuw.edu.pl\~goldie

Zasady zaliczania:

	max
2 kolokwia	2 × 35 pkt
Ćwiczenia (prace domowe, aktywność)	30 pkt
	maksymalnie 100 pkt

Kolokwia: 20 XI oraz 15 I, godz. 16-19

Będzie Jawna Pula Zadań, z której będziemy czerpać część (zapewne ok. 1/3) zadań na kolokwia, zastrzegając sobie prawo drobnych modyfikacji. Szczegółowe zasady dot. Jawnej Puli — niebawem

Na kolokwiach nie wolno korzystać z żadnych pomocy, sprzętu elektronicznego, notatek etc.

KAŻDE ROZWIĄZANIE ODDZIELNIE!

Przynieść własny papier.

Ćwiczenia

- zgodnie z regulaminem studiów obowiązkowe, ponad 5 nieobecności bez usprawiedliwienia – możliwe wyrejestrowanie = poważne kłopoty.

5–10 $\overline{\underline{X}}$ i 19–31 $\overline{\underline{X}}$ – możliwa zmiana grup ćwiczeniowych, na podstawie pisemnej, uzasadnionej prośby, popartej przez prowadzących ćwiczenia w obu grupach. Prośbę należy złożyć któremukolwiek z wykładowców, który podejmuje ostateczną decyzję.

Co to jest i czym zajmuje się Analiza Matematyczna?

W pewnym uproszczeniu – badaniem własności funkcji określonych (najczęściej) na podzbiorach przestrzeni wektorowej (pojęcie to poznają Państwo na GALu), o wartościach w (tej samej lub innej) przestrzeni wektorowej. W najprostszym przypadku zajmujemy się funkcjami jednej zmiennej rzeczywistej, o wartościach rzeczywistych – – i na tym głównie upłynie nam ten rok. Analiza zajmuje się również sposobami definiowania takich funkcji, matematycznym opisem rozmaitych ciągłych procesów, a jej źródła leżą w konstrukcji narzędzi do opisu zjawisk fizycznych.

Analiza matematyczna to nie tylko teoria matematyczna, ale i język, bez którego trudno ~~wysłowić~~ (a może i nie sposób) wysłowić większość współczesnej matematyki, ale i nauk przyrodniczych, ekonomii czy nawet socjologii (korzystającej z aparatu i języka statystyki). Celem tego przedmiotu jest nie tylko to, by opanowali Państwo materię analizy, ale by biegle nauczyli się Państwo języka, którym będą do Państwa mówili wykładowcy przez następne x lat (i, co gorsza, będą w nim oczekiwać od Państwa odpowiedzi...).

Budowa teorii matematycznej

Współczesne teorie matematyczne mają postać teorii aksjomatycznej: ustalamy, bez definiowania, pewne podstawowe obiekty teorii, a następnie – pewną listę własności i związków między tymi obiektami, ~~nazywan~~

Własności te nazywamy aksjomatami (pewnikami, postulatami) naszej teorii. Mając obiekty i aksjomaty możemy następnie wywodzić nowe własności – twierdzenia.

Skoro zajmować się będziemy funkcjami określonymi na podzbiorach zbioru liczb rzeczywistych, zaczniemy od aksjomatów liczb rzeczywistych.

Obiekty: Zbiór (nieznanych na razie elementów) $\mathbb{R}$

Uwaga: implicite zakładamy, że rozróżniamy elementy $\mathbb{R}$: mamy więc relację „="

$x = y$ gdy x i y są tym samym elementem $\mathbb{R}$.

Działania

• dodawanie: każdej parze (x, y) elementów $\mathbb{R}$ przypisuje dokładnie jeden element $\mathbb{R}$, oznaczamy $x + y$

• mnożenie: analogicznie, parze (x, y) przypisuje element oznaczamy $x \cdot y$

• relacja $<$ (porządku, nierówności)
każdej parze (x,y) przypisuje wartość logiczną (prawda lub fałsz).
Piszemy $x<y$, gdy parze (x,y) przypisana jest prawda.

Aksjomaty

I Aksjomaty dodawania

1. przemienność dodawania

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} \quad x+y=y+x$$

2. łączność dodawania

$$\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}} \quad (x+y)+z=x+(y+z)$$

kwantyfikatory

$\forall$ „for All" dla każdego / wszystkich

$\exists$ „Exists" istnieje

3. istnienie zera
W $\mathbb{R}$ istnieje element 0 o tej własności, że

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \quad x+0=x$$

4. istnienie elementu przeciwnego

Dla każdego $x\in\mathbb{R}$ istnieje element przeciwny do x, oznaczany $(-x)$, o tej własności, że

$$x+(-x)=0.$$

Uwaga: Każdy zbiór z działaniem spełniającym aksjomaty (1)-(4) nazywamy grupą przemienną.

II aksjomaty mnożenia

5 przemienność mnożenia

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} \quad x\cdot y = y\cdot x$$

6 łączność mnożenia

$$\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}} \quad (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$$

7 istnienie jedynki
w $\mathbb{R}$ istnieje element, oznaczany 1, o tej własności, że $\forall_{x\in\mathbb{R}} \; 1\cdot x = x$, przy czym 1 jest różne od 0.

8 istnienie elementu odwrotnego

Dla dowolnego x-różnego od 0 elementu $\mathbb{R}$ - istnieje element ~~przeciw~~ odwrotny, oznaczany x^{-1}, o tej własności, że $x\cdot x^{-1}=1$.

Uwaga: Aksjomaty 4-8 mówią, że $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ jest grupą przemienną (z działaniem mnożenia).

Aksjomat 9 wiąże mnożenie z dodawaniem
9 Rozdzielność mnożenia względem dodawania:

$$\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}} \quad x\cdot(y+z) = (x\cdot y) + (x\cdot z)$$

Zbiór spełniający aksjomaty 1-9 nazywany ciałem.

To jeszcze nie koniec aksjomatów (nic jeszcze nie wiemy o relacji $<$), ale udowodnijmy na razie jakieś twierdzenie

<u>Twierdzenie</u>: $\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad x \cdot 0 = 0.$

<u>Dowód</u>: Z aksjomatu 7 $\quad 1 \cdot x = x$

$$
\begin{aligned}
1 \cdot x &= x \cdot 1 && \text{z } 5\\
&= x \cdot (1+0) && \text{z } 3 \quad \text{bo } 1+0=1\\
&= x \cdot 1 + x \cdot 0 && \text{z } 9\\
&= x + x \cdot 0 && \text{z } 7 \quad \text{bo } x \cdot 1 = x
\end{aligned}
$$

zatem $\quad x + x \cdot 0 = x$

z 4 istnieje $(-x)$ tż. $\quad x + (-x) = 0$, więc

$$x + x \cdot 0 + (-x) = x + (-x) = 0$$

$$
\begin{aligned}
x + x \cdot 0 + (-x) &= x + (-x) + x \cdot 0 && \text{z } 1\\
&= 0 + x \cdot 0 && \text{z } 4\\
&= x \cdot 0 && \text{z } 3
\end{aligned}
$$

A więc ostatecznie $\quad x \cdot 0 = 0$

$\square$

W aksjomacie 7 zapostulowaliśmy, że $1 \neq 0$.
Czy możemy udowodnić, że $1+1 \neq 0$?

Otóż nie, a w każdym razie nie przy tak skromnym zestawie aksjomatów!

Ćwiczenie: Zbiór $X = \{0,1\}$ z działaniami

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

spełnia wszystkie 9 aksjomatów!
A w zbiorze tym $1+1=0$...

A zatem potrzebujemy więcej aksjomatów.

III aksjomaty porządku

(10) zasada trichotomii
Dla dowolnych $x,y \in \mathbb{R}$ zachodzi dokładnie jedna z trzech możliwości:

albo $x<y$, albo $x=y$, albo $y<x$

(11) przechodniość nierówności

$\forall_{x,y,z \in \mathbb{R}}$ jeżeli $x<y$ i $y<z$, to $x<z$

Następne dwa aksjomaty wiążą nierówność z działaniami.

(12) $\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}}$ jeżeli $x<y$, to $x+z<y+z$

(13) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}$ jeżeli $0<x$ i $0<y$, to $0<x\cdot y$

Uwaga: Odtąd przestaniemy się wygłupiać i zaczniemy używać standardowej notacji:

$$x>y \iff y<x$$
$$x\leq y \iff x<y \text{ lub } x=y$$
$$x\leq y \iff y\geqslant x \quad \text{itp.}$$

Został nam jeszcze jeden, bardzo ważny aksjomat, zwany aksjomatem ciągłości lub aksjomatem Dedekinda

Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831–1916) niemiecki matematyk, autor wielu prac dotyczących podstaw matematyki, twórca pojęć grupy i pierścienia.

Żeby wysłowić ten aksjomat, potrzebujemy kilku naturalnych definicji.

Definicja: Zbiór $A\subset\mathbb{R}$ jest ograniczony z góry (przez $M\in\mathbb{R}$), jeżeli

$$\forall_{x\in A}\quad x\leq M.$$

Mówimy wówczas, że M jest ograniczeniem górnym zbioru A.

Zbiór liczb z przedziału $(0;5)$ jest ograniczony z góry (~~p~~ na przykład przez 6).

<u>Definicja</u> Liczba $a \in \mathbb{R}$ jest <u>kresem górnym</u> zbioru $A \subset \mathbb{R}$, jeżeli

(·) a jest ograniczeniem górnym zbioru A

(··) jeżeli $b < a$, to b NIE JEST ograniczeniem górnym zbioru A, tj. istnieje $x \in A$ t.ż. $b < x$.

Innymi słowy, kres górny to najmniejsze ograniczenie górne zbioru.
Kres górny zbioru A oznaczamy $\sup A$, co czytamy „supremum A".

(14) aksjomat ciągłości

Każdy niepusty i ograniczony z góry podzbiór zbioru $\mathbb{R}$ ma kres górny

<u>Umowa</u>: Jeżeli A nie jest ograniczony z góry, to piszemy $\sup A = +\infty$,
Jeżeli $A = \emptyset$, to $\sup A = -\infty$.
Nie znaczy to, że zbiory te mają kres górny!

Analogicznie do kresu górnego definiujemy kres dolny, oznaczany $\inf$ (infimum, od łac. infimus - drobny, niewielki)

<u>Definicja</u>: Liczba $b \in \mathbb{R}$ jest <u>kresem dolnym</u> zbioru $A \subset \mathbb{R}$, jeżeli

(·) b jest <u>ograniczeniem dolnym</u> zbioru A, tj $\forall_{x \in A} \; b \leq x$,

(··) jeżeli $a > b$, to a nie jest ograniczeniem dolnym zbioru A, tj $\exists_{x \in A} \; x < a$.

<u>Twierdzenie</u>: Każdy ograniczony z dołu podzbiór $\mathbb{R}$ ma kres dolny.

<u>Dowód</u>: Niech A będzie podzbiorem $\mathbb{R}$, ograniczonym z dołu przez $m \in \mathbb{R}$.

Oznaczmy $B = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$.

Zauważmy, że B jest ograniczony z góry przez liczbę $(-m)$, jeżeli bowiem $y \in B$, to $-y \in A$, a więc

$$
\begin{aligned}
m &\leq -y \qquad /+(-m)\\
m+(-m) &\leq (-y)+(-m)\\
0 &\leq (-y)+(-m) \qquad /+y\\
0+y &\leq (-y)+(-m)+y\\
y &\leq -m
\end{aligned}
$$

Wykazaliśmy powyżej, że $\forall_{y \in B} \; y \leq -m$, a więc B jest ograniczony z góry przez $(-m)$.
Z aksjomatu ciągłości B ma kres górny $\sup B$
Sprawdźmy, że $(-\sup B)$ spełnia warunki na bycie kresem dolnym A.

(·) czy $(-\sup B)$ jest ograniczeniem dolnym A?

Jeżeli $x \in A$, to $(-x)$ należy do B,
(bo $-(-x) = x$ — dlaczego?)
więc $(-x) \leq \sup B \quad | +x$

$$0 = x + (-x) \leq x + \sup B \quad / + (-\sup B)$$
$$(-\sup B) \leq x$$

a więc $\forall_{x \in A} \ (-\sup B) \leq x \Rightarrow -\sup B$ jest ograniczeniem dolnym zbioru A.

(••) czy jeżeli $a > -\sup B$, to istnieje $x \in A$ taki, że $x < a$?

$a > -\sup B$ oznacza, że $-a < \sup B$,
a to, z definicji kresu górnego (punkt (••)),
że istnieje $y \in B$ taki, że $-a < y$.
Niech $x = -y$. Oczywiście $x \in A$ (bo $-x = y \in B$),
oraz $-a < y = (-x)$

$$a > x$$
$$x < a.$$

□.

Udowodnimy jeszcze jedną przydatną własność:

<u>Twierdzenie</u>: $0 < 1$.

<u>Dowód</u>: Mamy 3 możliwości: $0<1$, $0=1$ albo $1<0$.
Środkową wyklucza aksjomat o istnieniu jedynki.
~~Jeżeli~~ Gdyby $1 < 0$, to $0 = 1 + (-1) < 0 + (-1) = -1$.
~~Wykorzystamy teraz zie~~
z aksjomatu 13 mielibyśmy $(-1)\cdot(-1) > 0$.

Ale $(-1)\cdot(-1) + (-1) = (-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 = (-1)\cdot((-1)+1) =$
$= (-1)\cdot 0 = 0 \quad / +1$

skąd $(-1)\cdot(-1) = (-1)\cdot(-1) + (-1) + 1 = 0 + 1 = 1$

a więc $1>0$ – sprzeczność z założeniem.
Pozostaje trzecia możliwość: $0<1$ $\square$.

Ważne podzbiory $\mathbb{R}$

- liczby naturalne $\mathbb{N}$

$2 = 1+1$

$3 = 1+1+1 = 2+1$ itd

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Uwaga: teraz już wiemy, że $1+1 \neq 0$, bo

$0<1$.

$1 = 1+0 < 1+1$

$1>0,\ 1+1>1 \Rightarrow 1+1>0$ $\square$.

Powyższa definicja $\mathbb{N}$ jest trochę „szemrana" – co to są te trzy kropki? Czy wypisane tam liczby nie zaczynają się powtarzać?

Na pozór sztuczna, ale przydatna jest następująca definicja, tym razem uczciwa.

Definicja: Niech $\mathcal{A}$ oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów $A \subset \mathbb{R}$ mających poniższe 2 własności:

(•) $1 \in A$

(••) jeżeli $x \in A$, to $x+1 \in A$.

zbiorem liczb naturalnych $\mathbb{N}$ nazywamy część wspólną wszystkich zbiorów z $\mathcal{A}$: $\mathbb{N} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$

<u>liczby całkowite</u> $\mathbb{Z}$ (Zahl)

$$\mathbb{Z} = \{\underbrace{m+(-n)}_{\text{ozn } (m-n)} : m, n \in \mathbb{N}\}$$

<u>liczby wymierne</u> $\mathbb{Q}$ (quotient)

$$\mathbb{Q} = \{\underbrace{p \cdot q^{-1}}_{\text{ozn } \frac{p}{q}} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$$

<u>Uwaga</u>: $\mathbb{N}$ ze standardowymi działaniami $+, \cdot$ spełnia aksjomaty 1, 2, 5-7, 9-14, ale 3, 4, 8 już nie!

Których aksjomatów NIE SPEŁNIAJĄ:

- $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\mathbb{Z}$
- $\mathbb{Q}$?

Na koniec ważna obserwacja:

<u>Twierdzenie</u>: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

<u>„Dowód"</u>: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$: gdyby $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, to istniałyby p, q takie, że $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} = p/q$.

Możemy założyć, że p i q nie mają wspólnych dzielników (w przeciwnym przypadku skracamy ułamek)

$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \iff 2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ jest parzyste

$\Rightarrow p$ jest parzyste $\Rightarrow p = 2k \Rightarrow 2q^2 = (2k)^2 = 4k^2$

$\Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2$ jest parzyste $\Rightarrow q$ jest parzyste.

A więc jednak p i q mają wspólny dzielnik – dwójkę. Sprzeczność. $\square$

Dowód w cudzysłowiu, bo, choć poprawny, korzysta z mnóstwa nieudowodnionych na razie faktów. Na przykład – skąd w ogóle wiemy, że istnieje liczba rzeczywista $\sqrt{2}$ o tej własności, że jej kwadrat jest równy 2?

Ścisły dowód niebawem.

Aby sprawnie prowadzić rachunki, zdefiniujmy i wprowadźmy najważniejsze własności wartości bezwzględnej:

Definicja: Wartością bezwzględną (modułem) liczby rzeczywistej x nazywamy liczbę

$$|x| = \begin{cases} x & \text{gdy } x \geq 0 \\ -x & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$$

Twierdzenie: Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$

1. $|-x| = |x|$
2. $|x| \geq x$
3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
4. $|x+y| \leq |x| + |y|$
5. $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$

} nierówności trójkąta.

Dowód:

Dowody własności 1 – 3 są trywialne, wymagają jedynie sprawdzenia wszystkich przypadków.

4: Rozpatrzymy 2 przypadki

albo $x+y \geq 0$

wtedy $|x+y| = x+y \overset{z\ 2}{\leq} |x|+|y|$

albo $x+y<0$

wtedy $|x+y| = -(x+y) \underset{\text{dlaczego?}}{=} (-x)+(-y) \overset{z\ 2}{\leq} |-x|+|-y| \underset{z\ 1}{=} |x|+|y|$

5 Zauważmy najpierw, że

$|x| = |(x-y)+y| \underset{4}{\leq} |x-y|+|y|$, a więc $|x|-|y| \leq |x-y|$

analogicznie

$|y| = |(y-x)+x| \leq |y-x|+|x|$, a więc $|y|-|x| \leq |y-x| = |x-y|$

Na koniec wystarczy spostrzec, że $||x|-|y||$ jest równe, w zależności od znaku liczby wewnątrz „zewnętrznego" modułu, $|x|-|y|$ lub $|y|-|x|$. Obie te liczby są ~~mniejsze~~ nie większe od $|x-y|$, a zatem $||x|-|y|| \leq |x-y|$.

I jeszcze umowa: zdefiniujemy sup i inf dla

- zbiorów nieograniczonych
- zbioru pustego

To nie znaczy, że zbiory te mają kresy (w sensie podanej przez nas definicji), ale umowa ta jest dość wygodna:

$\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$

jeżeli A nie jest ogr. z góry, to $\sup A = +\infty$

—"— z dołu, to $\inf A = -\infty$.

Własności liczb naturalnych i zasada indukcji

Przypomnijmy definicję liczb naturalnych $\mathbb{N}$:

Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną wszystkich tych podzbiorów A zbioru $\mathbb{R}$, które spełniają poniższe dwa warunki:

(·) $1 \in A$

(··) jeżeli $x \in A$, to $x+1 \in A$.

Przykłady zbiorów należących do $\mathcal{A}$:

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2k+1}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$

$\mathbb{R}_+^* = \{ x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \}$

$\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$

<u>Definicja</u>: $\mathbb{N}$ to część wspólna wszystkich zbiorów z rodziny $\mathcal{A}$. $\mathbb{N} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$

<u>Uwaga</u>: Zbiór $\mathbb{N}$ też należy do $\mathcal{A}$:

~~jeżeli~~ (·) czy $1 \in \mathbb{N}$? Wiemy, że $\forall_{A \in \mathcal{A}} \; 1 \in A$,

więc $1 \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \mathbb{N}$

(··) Niech $x \in \mathbb{N}$. Czy $x+1 \in \mathbb{N}$?

$$x \in \mathbb{N} \iff x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \iff \forall_{A \in \mathcal{A}} \; x \in A \Rightarrow \forall_{A \in \mathcal{A}} \; x+1 \in A$$

$$\Updownarrow$$

$$x+1 \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \mathbb{N}.$$

<u>Twierdzenie</u>: Zbiór $\mathbb{N}$ nie jest ograniczony z góry

<u>Dowód</u>: Załóżmy przeciwnie – wówczas z aksjomatu ciągłości $\mathbb{N}$ ma kres górny $a = \sup \mathbb{N}$.

Stąd $\forall_{n \in \mathbb{N}} \; n \leq a$.

Ale jeżeli $n \in \mathbb{N}$, to $n+1$ też należy do $\mathbb{N}$, więc $\forall_{n \in \mathbb{N}} \; n+1 \leq a \iff \forall_{n \in \mathbb{N}} \; n \leq a-1$

to oznacza, ~~że~~ że $a-1$ jest ograniczeniem górnym zbioru $\mathbb{N}$.

Ale $a-1 < a$ (bo to jest równoważne $0<1$), co jest sprzeczne z tym, że $a = \sup \mathbb{N}$. (więc $\mathbb{N}$ nie ma ograniczeń górnych mniejszych od a). $\lightning$

<u>Wniosek</u>: (pewnik Archimedesa)

Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ takich, że $a>0$ i $b>0$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $an > b$.

<u>Dowód</u>: Załóżmy przeciwnie – dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ mamy
$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \; an \leq b$$
Wtedy $\forall_{n \in \mathbb{N}} \; n \leq a^{-1} \cdot b \quad \left(= \frac{b}{a}\right)$

i $a^{-1}b$ jest ograniczeniem górnym $\mathbb{N}$ (a takiego ograniczenia nie ma). $\lightning$

Twierdzenie

① $\forall_{n \in \mathbb{N}} \; n \geq 1$ („liczby naturalne zaczynają się od 1")

② jeżeli $n \in \mathbb{N}$ i $n > 1$, to $n-1 \in \mathbb{N}$

(„póki $n > 1$, możemy schodzić w dół o 1, pozostając w $\mathbb{N}$")

③ jeżeli $m, n \in \mathbb{N}$ i $m > n$, to $m \geq n+1$

(„liczby naturalne są rozłożone rzadko – – nie ma żadnej między n a $n+1$").

④ W każdym niepustym podzbiorze A zbioru liczb naturalnych znajduje się element najmniejszy, tj. taki element $n_0 \in A$, że $\forall_{n \in A} \; n_0 \leq n$.

(ZASADA MINIMUM) (oczywiście wtedy $n_0 = \inf A$).

Dowody pierwszych trzech punktów będą przebiegały według tego samego schematu:

- rozważymy zbiór A tych liczb naturalnych, które mają pożądaną własność
- wykażemy, że zbiór ten należy do rodziny $\mathcal{A}$ (tj. spełnia warunki $(\cdot)$ i $(\cdot\cdot)$)

z definicji $A \subset \mathbb{N}$, ale skoro $A \in \mathcal{A}$, to $\mathbb{N} \subset A$, a więc $A = \mathbb{N}$ i pożądaną własność mają wszystkie liczby naturalne.

Schemat ten jest znany jako tzw. ZASADA INDUKCJI, sformułujemy ją jako twierdzenie za chwilę.

Dowód twierdzenia:

① Niech $A = \{ n \in \mathbb{N} : n \geq 1 \}$

Oczywiście $A \subset \mathbb{N}$. Czy $A \in \mathcal{A}$?

Trzeba sprawdzić oba warunki, jakie ma spełniać zbiór A, by należeć do $\mathcal{A}$:

(·) czy $1 \in A$? Tak, $1 \geq 1$.

(··) załóżmy, że $n \in A$. Czy $n+1 \in A$?

Skoro $n \in A$, to $n \geq 1$.

Aby $n+1 \in A$, musi być $n+1 \geq 1$, ale to jest prawda, bo $n+1 \geq n$, a $n \geq 1$, z przechodniości $n+1 \geq 1$.

A więc $n+1 \in A$.

Tym samym wykazaliśmy, że $A \in \mathcal{A}$, a więc $\mathbb{N} \subset A$.

To oznacza, że $A = \mathbb{N}$ i $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ n \geq 1$.

② Niech $A = \{ n \in \mathbb{N} : (\text{jeżeli } n > 1, \text{ to } n-1 \in \mathbb{N}) \}$

(zbiór tych $n \in \mathbb{N}$, dla których ta implikacja jest prawdziwa).

Sprawdzamy, jak poprzednio:

(·) czy $1 \in A$?

czyli czy dla $n=1$ implikacja $(n > 1) \Rightarrow (n-1 \in \mathbb{N})$ jest prawdziwa?

Tak, bo dla $n=1$ poprzednik jest fałszywy!

(··) załóżmy, że, dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, $n \in A$.

Czy $n+1 \in A$?

Innymi słowy, czy implikacja

$(n+1 > 1) \Rightarrow (n \in \mathbb{N})$ jest prawdziwa?

~~Poprzednik implikacji jest prawdziwy, bo skoro n∈N~~

Tak! Następnik implikacji jest prawdziwy, bo z założenia $n \in \mathbb{N}$.

(3) Tu będzie troszkę trudniej:

Niech $A = \{n \in \mathbb{N} : (\text{jeżeli } m \in \mathbb{N} \text{ i } m > n, \text{ to } m \geq n+1)\}$

$= \{n \in \mathbb{N} : (m \in \mathbb{N} \wedge m > n) \Rightarrow (m \geq n+1)\}$

(·) Czy $1 \in A$?

Dla $n=1$ mamy implikację $(m \in \mathbb{N} \wedge m > 1) \Rightarrow (m \geq 2)$. Albo poprzednik tej implikacji jest fałszywy (i cała implikacja jest prawdziwa), albo prawdziwy:

$m \in \mathbb{N}$ i $m > 1$.

Wtedy z (2) $m-1 \in \mathbb{N}$, a więc z (1) $m-1 \geq 1$

$m \geq 2$.

zatem również następnik jest prawdziwy, i prawdziwa jest cała implikacja.

(··) Załóżmy, że, dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, $k \in A$.

Czy $k+1 \in A$?

$k \in A$ oznacza, że

(założenie) $(m \in \mathbb{N} \wedge m > k) \overset{(Z)}{\Rightarrow} (m \geq k+1)$

a $(k+1) \in A$, że

(teza) $(m \in \mathbb{N} \wedge m > k+1) \overset{(T)}{\Rightarrow} (m \geq k+2)$.

Jeżeli fałszywy jest poprzednik implikacji (Z) (dla pewnego m), to fałszywy jest też poprzednik (T) i obie implikacje są prawdziwe.

Załóżmy zatem, że (dla pewnego $m \in \mathbb{N}$) $m > k$;
z (Z) oznacza to, że $m \geqslant k+1$
Równocześnie $m > k$ oznacza$^{(z ①)}$ $m > 1$, więc z ②
$m-1 \in \mathbb{N}$.
Jeżeli poprzednik (T) jest fałszywy, to (T) jest prawdziwa; jeżeli zaś jest prawdziwy:
$m > k+1$
to $m-1 > k$, $m-1 \in \mathbb{N}$.
Wiemy, że (Z) zachodzi dla dowolnego m; prawdziwa jest więc implikacja z $m-1$ w miejscem

$$(m-1 \in \mathbb{N} \wedge m-1 > k) \Rightarrow (m-1 \geqslant k+1)$$

(a poprzednik tej implikacji, jak sprawdziliśmy, jest prawdziwy). Stąd $m-1 \geqslant k+1$, czyli
$$m \geqslant k+2$$
co pokazuje, że następnik (T) jest prawdziwy,
a więc cała (T) jest prawdziwa □.

④ Ten punkt udowodnimy nie wprost.
Załóżmy, że $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$ i A nie ma elementu najmniejszego.

Zauważmy najpierw, że $1 \notin A$, bo gdyby $1 \in A$, to 1 byłoby elementem najmniejszym w A.
(z ① $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ n \geqslant 1$).

Niech $B = \{ m \in \mathbb{N} : \forall_{n \in A} \; m < n \}$.

B jest niepusty, bo $1 \in B$.

Załóżmy, że pewne ~~mest~~ $m \in B$, a więc

$\forall_{n \in A} \quad m \leq n$

Liczby m i n są naturalne, więc z ③ mamy

$\forall_{n \in A} \quad m+1 \leq n$. (*)

Gdyby teraz $m+1 \in A$, to $m+1$ byłoby w A elementem najmniejszym; to jest niemożliwe, zatem dla żadnego $n \in A$ w (*) nie ma równości.

To oznacza, że

$\forall_{n \in A} \quad m+1 < n$

czyli $m+1 \in B$.

O zbiorze B udowodniliśmy zatem, że:

$$\begin{cases} 1 \in B \\ \text{jeżeli } m \in B, \text{ to } m+1 \in B \end{cases}$$

a więc, jak w poprzednich punktach, $B = \mathbb{N}$ – i na A nie ma już miejsca...

(każdy element A jest ograniczeniem górnym zbioru B, a jeżeli $B = \mathbb{N}$, to takiego ograniczenia nie ma – sprzeczność z tym, że $A \neq \emptyset$) ↯.

Twierdzenie (ZASADA INDUKCJI)

Niech W będzie pewną własnością pewnych liczb naturalnych (W(n) jest prawdą, gdy n ma własność W, fałszem, gdy jej nie ma).

Jeżeli ~~1 ma własność~~

(·) potrafimy wykazać, że 1 ma własność W
('baza indukcji')

i, przy założeniu, że
(··) liczba m ma własność W
(założenie indukcyjne)

potrafimy wykazać, że
(···) liczba m+1 ma własność W
(teza indukcyjna),

to wszystkie liczby naturalne mają własność W.

Dowód: Dokładnie tak, jak w poprzednim twierdzeniu:

Niech $A = \{ n \in \mathbb{N} \ : \ n \text{ ma własność } W \}$

Metoda opisana w twierdzeniu mówi, że

$$\begin{cases} 1 \in A \\ \text{i jeżeli } m \in A, \text{ to } m+1 \in A, \end{cases}$$

zatem $A \in \mathcal{A}$, co oznacza, że $\mathbb{N} \subset A$.
Oczywiście $A \subset \mathbb{N}$, co dowodzi, że $\mathbb{N} = A$.

Twierdzenie (nierówność Bernoulliego)

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \forall_{\substack{a\in\mathbb{R}\\ a>-1}} \quad (1+a)^n \geq 1+na$$

Jakub Bernoulli (1654 – 1705) pierwszy z wielu wybitnych uczonych o tym nazwisku, profesor Uniwersytetu w Bazylei. Twórca podstaw rachunku prawdopodobieństwa, jako pierwszy użył biegunowego układu współrzędnych, jest autorem pojęcia całki...
Jeden z ojców analizy matematycznej.

Definicja potęgi:
Dla $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ mamy ($n\in\mathbb{N}$).
$a^0 = 1$, $a^{n+1} = a\cdot a^n$,
dodatkowo $0^n = 0$.

Dowód: (indukcyjny).

① Czy twierdzenie zachodzi dla $n=1$?
TAK, bo $(1+a)^1 = 1+a \geq 1+1\cdot a$.

② Załóżmy, że twierdzenie zachodzi dla pewnego $n\in\mathbb{N}$:

$$\forall_{\substack{a\in\mathbb{R}\\ a>-1}} \quad (1+a)^n \geq 1+na.$$

③ Czy z ② wynika, że twierdzenie zachodzi dla $n+1$, tj

$$\forall_{\substack{a\in\mathbb{R}\\ a>-1}} \quad (1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a \quad ?$$

tu korzystamy z faktu, że jeżeli $a\leq b$ i $c>0$, to $ac\leq bc$. Dowód?

$$(1+a)^{n+1} = \underset{\vee\atop 0}{(1+a)}\underset{\vee\atop 0}{(1+a)^n} \overset{z\,②}{\geq} (1+a)(1+na)$$

$$= 1+a+na+na^2 = 1+(n+1)a + \underset{\substack{\mathrel{\vee\!\!\!|} \\ 1}}{n}\underset{\substack{\mathrel{\vee\!\!\!|} \\ 0}}{a^2}$$

$$\geq 1+(n+1)a.$$

A więc TAK.

Na mocy zasady indukcji twierdzenie zachodzi dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Wniosek – istnienie pierwiastków:

<u>Twierdzenie</u>: Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \geq 0$ i dowolnego $k \in \mathbb{N}$ istnieje dokładnie jedna liczba $b \in \mathbb{R}$ taka, że $b \geq 0$ i $b^k = a$.
Piszemy wówczas $b = \sqrt[k]{a}$.

<u>Dowód</u>

Gdy $a = 0$, to oczywiście $b = 0$ spełnia warunki $b \geq 0$, $b^k = a$; to, że to jedyne rozwiązanie, wykażemy później.

Załóżmy, że $a > 0$; niech $B = \{x \in \mathbb{R} : x > 0, \ x^k < a\}$
Zbiór B jest

- niepusty

Łatwo możemy sprawdzić, że $\frac{a}{a+1} \in B$:

$$\frac{a}{a+1} > 0, \quad \left(\frac{a}{a+1}\right)^k \leq \frac{a}{a+1} < a$$

- i ograniczony z góry

np. przez $1+a$: jeżeli $x \geq 1+a$, to $x^k \geq (1+a)^k \geq$
$\geq 1 + ka \geq 1 + a > a$,

a więc $\forall_{y \in B} \ y < 1+a$.

Stąd zbiór B ma kres górny. Oznaczmy $b = \sup B$.
Wykażemy nie wprost, że $b^k = a$.

Jeżeli bowiem $b^k \neq a$, to albo $b^k < a$, albo $b^k > a$.

przypadek $b^k < a$

wykażemy, że istnieje $b_1 > b$ takie, że $b_1^k < a$
(a więc $b_1 \in B$ i $b_1 > b$ — sprzeczność z tym, że $b = \sup B$)

Niech $b_1 = \dfrac{b}{1-\varepsilon}$, gdzie ε jest bardzo małe i >0
(jak małe - za chwilę).

$$b_1^k = \left(\frac{b}{1-\varepsilon}\right)^k = \frac{b^k}{(1-\varepsilon)^k} \leqslant \frac{b^k}{1-k\varepsilon} \overset{?}{<} a$$

tego chcielibyśmy,
jest to równoważne

$$\frac{b^k}{a} \overset{?}{<} 1-k\varepsilon, \text{ czyli } \varepsilon < \frac{1}{k}\left(1-\frac{b^k}{a}\right).$$

Wystarczy zatem wziąć $\varepsilon = \dfrac{1}{2k}\left(1-\underbrace{\dfrac{b^k}{a}}_{\text{to jest } <1}\right) > 0$,

by mieć $b_1^k < a$ ↯.

przypadek $b^k > a$.

wykażemy, że istnieje $b_2 < b$ takie, że b_2 jest ograniczeniem górnym B - znów sprzeczność z tym, że $b = \sup B$. ↯

Niech $b_2 = b(1-\beta)$ dla bardzo małego $\beta > 0$, wtedy oczywiście $b_2 < b$.

$$b_2^k = [b(1-\beta)]^k = b^k(1-\beta)^k \geqslant b^k(1-k\beta) \overset{?}{>} a$$

$$\beta \overset{?}{<} \frac{1}{k}\left(1-\frac{a}{b^k}\right),$$

wystarczy zatem wziąć

$$\beta = \frac{1}{2k}\left(1-\underbrace{\frac{a}{b^k}}_{<1}\right),$$

by mieć $b_2^k > a$ ↯.

Jeżeli teraz $x > b_2$, to $x^k > b_2^k > a$, zatem jeżeli $x \in B$, to $x \leq b_2$, czyli b_2 jest ograniczeniem górnym B ↯.

Pozostało udowodnić, że istnieje tylko jedna taka liczba.
Gdyby $b_1 \neq b_2$, ~~$b_1^k \leq b_2$~~ to albo $b_1 < b_2$, albo $b_1 > b_2$. Jeżeli $b_1 < b_2$, to $b_1^k < b_2^k$, nie może więc być $b_1^k = a = b_2^k$.
Analogicznie gdy $b_1 \cancel{<} > b_2$. □.

<u>Twierdzenie</u>: Niech $n \in \mathbb{N}$, wówczas $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$ lub $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.

<u>Dowód</u> (Dedekind?)

{ $[a] = \sup\{n \in \mathbb{Z} : n \leq a\}$ część całkowita liczby a

Załóżmy, że $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ i $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$
Wówczas $0 < \sqrt{n} - [\sqrt{n}] < 1$
i $\sqrt{n} - [\sqrt{n}]$ jest liczbą wymierną
– zatem istnieje $k \in \mathbb{N}$ t.że. $k(\sqrt{n} - [\sqrt{n}]) \in \mathbb{N}$.
Niech $K = \{k \in \mathbb{N} : k(\sqrt{n} - [\sqrt{n}]) \in \mathbb{N}\}$. Jak wspomniałem, $K \neq \emptyset$, a więc w K jest element najmniejszy k_0.
Z definicji K wiemy, że

$$k_1 = k_0(\sqrt{n} - [\sqrt{n}]) \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy, że

$$0 < k_1(\sqrt{n} - [\sqrt{n}]) = k_0(\sqrt{n} - [\sqrt{n}])^2 = k_0(n - 2\sqrt{n}[\sqrt{n}] + [\sqrt{n}]^2)$$

$$= k_0(n - 2(\sqrt{n} - [\sqrt{n}])[\sqrt{n}] + 3[\sqrt{n}]^2) =$$

$$= \cancel{k_0}\, k_0(n + 3[\sqrt{n}]^2) - 2[\sqrt{n}]\underbrace{k_0(\sqrt{n} - [\sqrt{n}])}_{\in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}$$

a skoro > 0, to $\in \mathbb{N}$

zatem $k_1 \in K$ ↯, bo $k_1 < k_0$, a k_0 jest w K najmniejszy.

Uwagi

1. Umawiamy się, że umiemy wyciągać pierwiastki nieparzystego stopnia z liczb ujemnych:

Dla $a<0$, k nieparzystego

$$\sqrt[k]{a} \stackrel{df}{=} -\sqrt[k]{-a}.$$

(rzeczywiście ma to sens, bo

$$(\sqrt[k]{a})^k = (-\sqrt[k]{-a})^k = (-1)^k(\sqrt[k]{-a})^k = (-1)^k(-a) = (-1)\cdot(-a) = a.)$$

2. W powyższym dowodzie niewymierności $\sqrt{n}$ korzystaliśmy z części całkowitej $x \in \mathbb{R}$, ozn. $[x]$.

Zdefiniowaliśmy $[x] = \sup\{k \in \mathbb{Z} : k \le x\}$.

Skąd wiemy, że:
- te supremum istnieje?
- jest liczbą całkowitą?

Na pierwsze pytanie odpowiedź jest prosta: zbiór $\{k \in \mathbb{Z} : k \le x\}$ jest ograniczony z góry (przez x). Odpowiedź na drugie zawarta jest w poniższym twierdzeniu:

<u>Twierdzenie</u> (zasady maksimum i minimum dla liczb całkowitych)

W każdym niepustym, ograniczonym z góry/dołu podzbiorze A zbioru $\mathbb{Z}$ istnieje element największy/najmniejszy.

Do dowodu tego twierdzenia potrzebny nam będzie lemat (twierdzenie pomocnicze) mówiące, że dodatnie liczby całkowite są liczbami naturalnymi.

<u>Lemat</u>: Jeżeli $k \in \mathbb{Z}$ i $k > 0$, to $k \in \mathbb{N}$.

<u>Dowód Lematu</u>: Z definicji $\mathbb{Z}$ wiemy, że istnieją liczby naturalne $n, m \in \mathbb{N}$ tż. $k = n - m$. Skoro $k > 0$, to $n > m$.

Niech $A = \{ n \in \mathbb{N} : (m \in \mathbb{N} \wedge n > m) \overset{(*)}{\Longrightarrow} n - m \in \mathbb{N} \}$.

(·) $1 \in A$, bo dla $n = 1$ poprzednik implikacji (*) ma postać

$$m \in \mathbb{N} \wedge m < 1$$

a te 2 warunki nigdy nie są razem spełnione – więc poprzednik (*) jest fałszywy (a cała implikacja (*) – prawdziwa).

(••) Załóżmy, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$(m \in \mathbb{N} \wedge n > m) \overset{(Z)}{\Longrightarrow} n - m \in \mathbb{N}$$

(•••) Czy prawdą jest

$$(l \in \mathbb{N} \wedge n+1 > l) \overset{(T)}{\Longrightarrow} n+1-l \in \mathbb{N} \quad ?$$

(specjalnie używam nowego oznaczenia l, bo w (Z) i (T) n jest to samo, zaś m i l niekoniecznie).

Przyjrzyjmy się (T) dla $\boxed{l = 1}$

Następnik (T) ma wtedy postać $\underbrace{n+1-1}_{= n} \in \mathbb{N}$

jest więc prawdziwy (i z nim cała implikacja (T))

A gdy $\boxed{l > 1}$? Wtedy

$l \in \mathbb{N}$ i $l > 1 \Rightarrow l - 1 \in \mathbb{N}$ (z tw. o własnościach $\mathbb{N}$).

Jeżeli ~~zacho~~ prawdziwy jest poprzednik (T):

$$l \in \mathbb{N} \wedge n+1 > l$$
$$\Downarrow$$
$$n > l - 1$$

to dla $m = l - 1$ zachodzi poprzednik (Z).

$m \in \mathbb{N} \wedge n > m$

więc z założenia zachodzi i następnik (Z):

$n - m \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow n - l + 1 \in \mathbb{N}$

A to jest właśnie następnik (T).

Dowód twierdzenia:

Niech $A \subset \mathbb{Z}$, $A \neq \emptyset$

Załóżmy najpierw, że A jest ograniczony z dołu przez $a \in \mathbb{R}$.

Zbiór $\mathbb{N}$ nie jest ograniczony z góry, więc istnieje $n_0 > -a$.

Rozpatrzmy zbiór $A_0 = \{ m \in \mathbb{Z} : m - n_0 \in A \}$

Jeżeli $m \in A_0$, to $m - n_0 \geqslant a$, więc $m \geqslant a + n_0 > 0$. Stąd, na mocy lematu, $m \in \mathbb{N}$ (bo jest dodatnią liczbą całkowitą).

Tym samym $A_0 \subset \mathbb{N}$. Oczywiście $A_0 \neq \emptyset$ (bo $A \neq \emptyset$), zatem w A_0 jest element najmniejszy $m_0 \in \mathbb{N}$.
$m_0 \in A_0$.

$$\forall_{m \in A_0} \quad m_0 \leq m$$

$$m_0 - n_0 \leq \underbrace{m - n_0}_{\in A}$$ i skoro $m_0 \in A_0$, to $m_0 - n_0 \in A$.

I teraz $m_0 - n_0$ jest elementem najmniejszym w A.

Załóżmy teraz, że A jest ograniczony z góry przez $b \in \mathbb{R}$.

Niech $B = \{ m \in \mathbb{Z} : -m \in A \}$

Skoro A jest ogr. z góry przez b, to B – z dołu przez $(-b)$. Tym samym w B jest element najmniejszy $m_0 \in B$; oczywiście $-m_0 \in A$.

$$\forall_{m \in A} \quad -m \geqslant m_0$$

$$m \leq -m_0 \qquad -m_0 \in A$$

więc $-m_0$ jest największy w A. $\square$

Zauważmy, że $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
Gdyby bowiem $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, to $\sqrt{2}$ byłby liczbą naturalną. Załóżmy że rzeczywiście $\sqrt{2} \in \mathbb{N}$, stąd $\sqrt{2} \geqslant 1$. Wiemy, że $\sqrt{2} \neq 1$, bo $1 \cdot 1 = 1 \neq 2$, zatem $\sqrt{2} > 1 \Rightarrow \sqrt{2} \geqslant 2 \Rightarrow 2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \geqslant 2 \cdot 2 = 4$ $\lightning$.

Gęstość $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ w $\mathbb{R}$:

Twierdzenie: Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ istnieje

1. $c \in \mathbb{Q}$ leżąca między a i b, czyli $a < c < b$,
2. $d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ leżąca między a i b, czyli $a < d < b$.

Dowód

1. Zacznijmy od wykazania, że istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $\frac{1}{n} < b - a$. Wynika to z nieograniczoności $\mathbb{N}$ z góry (istnieje $n \in \mathbb{N}$ tż $n > \frac{1}{b-a}$).

Teraz szukamy liczby wymiernej postaci $\frac{m}{n}$ takiej, że $a < \frac{m}{n} < b$.
Niech $A = \{m \in \mathbb{Z} : \frac{m}{n} \geqslant b\}$. A jest niepusty (istnieje $m \in \mathbb{N}$ tż. $m \geqslant n \cdot b$ – z nieograniczoności $\mathbb{N}$ z góry), więc w A istnieje element najmniejszy m_0.
Mamy $\frac{m_0}{n} \geqslant b > \frac{m_0 - 1}{n}$ (bo $m_0 - 1 \notin A$).

i dalej

$$\frac{m_0}{n} \geq b > \frac{m_0-1}{n} = \frac{m_0}{n} - \frac{1}{n} > \frac{m_0}{n} - (b-a) \geq b-(b-a) = a.$$

bo $\frac{m_0}{n} \geq b$

bo $m_0 - 1 \notin A$

bo $\frac{1}{n} < b-a$

A więc $m = m_0 - 1$ spełnia warunek

$$b > \frac{m}{n} > a,$$ wystarczy więc wziąć $c = \frac{m_0-1}{n}$.

2. Z punktu 1 wiemy, że istnieje $c \in \mathbb{Q}$, $a < c < b$.

Z pewnika Archimedesa dla liczb $\sqrt{2}$ i $b-c$ (obu >0) istnieje $n \in \mathbb{N}$ t.ż. $\sqrt{2} < n(b-c)$.

Stąd

$$a < c < c + \frac{\sqrt{2}}{n} < c + (b-c) = b.$$

Liczba $d = c + \frac{\sqrt{2}}{n}$ nie jest wymierna, gdyby bowiem $d \in \mathbb{Q}$, to $n(d-c) = \sqrt{2}$ też byłaby wymierna. (oczywiście suma, różnica, iloczyn i iloraz liczb wymiernych są wymierne).