Przypomnienie

Twierdzenie Cantora - Heinego

Funkcja ciągła na odcinku domkniętym jest na tym odcinku jednostajnie ciągła.

A na odcinku otwartym?

Twierdzenie: Funkcja $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, ciągła na (a,b), jest na tym odcinku jednostajnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją skończone granice $\lim_{x\to a^+} f(x)$ i $\lim_{x\to b^-} f(x)$.

Dowód

$(\Leftarrow)$ Zakładamy, że f jest ciągła na (a,b) i że istnieją $\lim_{x\to a^+} f(x) = g$ i $\lim_{x\to b^-} f(x) = h$, $g,h \in \mathbb{R}$.

Wówczas funkcja $\tilde{f}:[a,b] \to \mathbb{R}$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a,b) \\ g & x = a \\ h & x = b \end{cases}$$

jest ciągła na $[a,b]$. Z tw. Cantora - Heinego jest więc na $[a,b]$ jednostajnie ciągła:

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x,y\in[a,b]} \quad |x-y|<\delta \Rightarrow |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| < \varepsilon.$$

w szczególności, przy tym samym dobranym δ do ε

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x,y\in(a,b)} \quad |x-y|<\delta \Rightarrow \underbrace{|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)|}_{|f(x)-f(y)|} < \varepsilon$$

bo $x,y \in (a,b)$

A zatem f jest jednost. ciągła na (a,b).

Uwaga: Udowodniliśmy, że skoro $\tilde{f}$ jest jednost. ciągła na $[a,b]$, to jest też jednost. ciągła na (a,b) (a na (a,b) $\tilde{f}$ jest równa f).

Ogólniej zachodzi Fakt: Jeżeli f jest jednost. ciągła na $A \subset \mathbb{R}$ i $B \subset A$, to f jest jednost. ciągła na B.

$(\Rightarrow)$

Załóżmy, że f jest jednost. ciągła na (a,b).
Chcemy wykazać, że dla każdego ciągu (x_n) t.ż. $\forall_n\ x_n \in (a,b)$; $x_n \to a$ istnieje $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ i granica ta nie zależy od wyboru ciągu (x_n).
(to, na mocy def. Heinego, oznacza istnienie $\lim_{x\to a^+} f(x)$).

Najpierw wykażemy, że ciąg $(f(x_n))_n$ jest ciągiem Cauchy'ego, a więc że $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n,m>n_0} |f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$.

Ustalmy $\varepsilon>0$. ① Funkcja f jest jednost. ciągła na (a,b), więc $\exists_{\delta>0} \forall_{x,y\in(a,b)} |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

② Ciąg (x_n) jest zbieżny (do a), spełnia więc warunek Cauchy'ego:

$$\exists_{n_0} \forall_{n,m>n_0} |x_n - x_m| < \delta$$

Wtedy, dla $n,m>n_0$

$$|x_n - x_m| \overset{z②}{<} \delta \overset{z①}{\Rightarrow} |f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$$

Stąd $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n,m>n_0} |f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$.

Wykazaliśmy, że dla dowolnego ciągu (x_n)
t.ż. $(*)$ $\forall_n\, x_n \in (a,b)$, $x_n \to a$ ciąg $(f(x_n))$ spełnia war. Cauchy'ego, jest więc zbieżny.
Czy może się zdarzyć, że dla dwóch różnych ciągów $(x_n), (y_n)$ t.ż. $\forall_n\, x_n, y_n \in (a,b)$, $x_n \to a$, $y_n \to a$
otrzymamy różne granice: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)$?
Niech (z_n): $z_n = \begin{cases} x_n & 2\nmid n \\ y_n & 2 \mid n \end{cases}$
Ciąg (z_n) spełnia warunki $(*)$, więc ciąg $(f(z_n))$ jest zbieżny, choć ma 2 podciągi:
$(f(z_{2n-1})) = (f(x_{2n-1}))$ i $(f(z_{2n})) = (f(y_{2n}))$
o różnych granicach $\lightning$.
Stąd granica $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ nie zależy od wyboru ciągu (x_n) (byle tylko spełniał $(*)$).

Udowodniliśmy istnienie $\lim_{x\to a^+} f(x)$;
istnienie $\lim_{x\to b^-} f(x)$ dowodzi się dokładnie tak samo.

Uwagi o sklejaniu funkcji ciągłych.

Niech $f_1 : A \to \mathbb{R}$, $f_2 : B \to \mathbb{R}$

Chcemy zdefiniować funkcję $f : A \cup B \to \mathbb{R}$

taką, że $f|_A = f_1$, $f|_B = f_2$.

Żeby to mogło zajść, musimy oczywiście mieć

$$\forall_{x \in A \cap B} \; f_1(x) = f_2(x),$$

wtedy $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in A \\ f_2(x) & x \in B \end{cases}$ jest dobrze zdefiniowana.

Czy jeżeli f_1, f_2 są ciągłe (odp. na A, B), to f jest ciągła na $A \cup B$?

Niekoniecznie: $A = (-1, 0)$ $B = [0, 1)$

$f_1 \equiv 0$ $f_2 \equiv 1$

Wtedy $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$, $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$

jest oczywiście nieciągła w $x = 0$.

W czym problem?

Istnieją ciągi (x_n) t.ż. $\forall_n \; x_n \in A$, ale $x_n \to 0 \in B$

Żeby f była ciągła na $A \cup B$, musimy mieć

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = f_2(0)$$

$$\parallel$$

$$\lim_{n \to \infty} f_1(x_n)$$

A to nie zachodzi.

Twierdzenie:

Niech $A, B \subset \mathbb{R}$, $\left.\begin{array}{l} f_1 : A \to \mathbb{R} \\ f_2 : B \to \mathbb{R} \end{array}\right\}$ ciągłe

$$\forall_{x \in A \cap B} \quad f_1(x) = f_2(x)$$

oraz

$$(*) \begin{cases} \forall_{z \in \operatorname{Acc} A \cap B} \quad \lim_{x \to z} f_1(x) = f_2(z) & (*)_1 \\ \forall_{z \in \operatorname{Acc} B \cap A} \quad \lim_{x \to z} f_2(x) = f_1(z) & (*)_2 \end{cases}$$

Wówczas $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in A \\ f_2(x) & x \in B \end{cases}$ jest ciągła na $A \cup B$.

Dowód:

Mamy wykazać, że $\forall_{z \in A \cup B}$ f jest ciągła w z.

Jeżeli z jest punktem izolowanym $A \cup B$, nic nie trzeba dowodzić; dla pozostałych z wystarczy sprawdzić, że dla każdego ciągu (x_n) t. że $\forall_n x_n \in A \cup B$, $\forall_n x_n \neq z$, $x_n \to z$
$f(x_n) \longrightarrow f(z)$ (czyli że $\lim_{x \to z} f(x) = f(z)$).

~~Jeżeli dddn $x_n \in A$ oraz $z \in A$, to wynika to z ciągłości f_1 na A, analogicznie gdy dddn $x_n \in B$ i $z \in B$.~~

Ciąg (x_n) może być trojakiego rodzaju:

(·) albo dddn $x_n \in A$

(··) albo dddn $x_n \in B$

(∴) albo ciąg (x_n) możemy ~~wydzielić~~ podzielić na 2 podciągi

(u_n) i (v_n) tż. $\forall_n\ u_n \in A$, $\forall_n\ v_n \in B$

$(\cdot)$ niech dddn $x_n \in A$. Jeżeli $z \in A$, to

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f_1(x_n) \underset{\uparrow}{=} f_1(z) = f(z)$$

z ciągłości f_1

~~Przypadek z∈B z rostawmy na potem~~

Jeżeli $z \in B$, to

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f_1(x_n) = \lim_{x\to z} f_1(x) \underset{\uparrow}{=} f_2(z)$$

z $(*)_1$

$(\cdot\cdot)$ gdy dddn $x_n \in B$, rozpatrujemy oddzielnie przypadki $z \in A$ i $z \in B$, tak samo jak w $(\cdot)$.

$(\because)$ $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(z)$ na mocy $(\cdot)$

$\lim_{n\to\infty} f(v_n) = f(z)$ na mocy $(\cdot\cdot)$

i z tw. o scalaniu $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(z)$.

$\square$.

<u>Def</u>: Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest domknięty, gdy A zawiera wszystkie swoje skończone punkty skupienia.

(prościutkie ćwiczenie: A jest domknięty $\Leftrightarrow$ dla każdego ciągu (x_n) tż. $\forall_n\ x_n \in A$ ~~i $x_n \neq x_0$~~ jeżeli $x_n \to x_0$, to $x_0 \in A$).

Wniosek z twierdzenia (a raczej – z dowodu).

Jeżeli $f_1 : A \to \mathbb{R}$, $f_2 : B \to \mathbb{R}$ ~~są~~ ciągłe,

~~i~~ $\forall_{x \in A \cap B} \; f_1(x) = f_2(x)$ i zbiory A, B są domknięte,

to $$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in A \\ f_2(x) & x \in B \end{cases}$$ jest ciągła na $A \cup B$.

Dowód:

~~Niech~~ Kiedy w poprzednim dowodzie musieliśmy korzystać z $(*)_1$ i $(*)_2$?

Gdy $x_n \to z$, dddn $x_n \in A$, ale $z \in B \setminus A$
(w dowodzie $(\cdot)$) (~~do~~ $z \in A$ wystarczała ciągłość f_1)

oraz gdy dddn $x_n \in B$, ale $z \in A \setminus B$.
(w dowodzie $(\cdot\cdot)$)

Gdy A jest domknięte, ~~i~~ ~~$\exists$~~ $x_n \in A$ i $x_n \to z$,
to $z \in A$; ~~to~~ analogicznie z domkniętości B
$x_n \in B$ i $x_n \to z \Rightarrow z \in B$.

Stąd te 2 przypadki, wymagające $(*)$, nie zachodzą.

No to idźmy za ciosem.

Niech $f_1 : A \to \mathbb{R}$, $f_2 : B \to \mathbb{R}$ będą jednost. ciągłe, A, B domknięte. Czy f (zdef. jak wyżej) jest jednost. ciągła na $A \cup B$?

Niekoniecznie!

Niech $I_n = [n, n + \frac{n-1}{n}]$; $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{2n-1}$, $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{2n}$

~~f1 2A~~ Zbiory A i B są domknięte (zadanie).

Niech $f_1 : A \to \mathbb{R}$, $f_1 \equiv 0$

$f_2 : B \to \mathbb{R}$, $f_2 \equiv 1$

Obie funkcje są w oczywisty sposób jednost. ciągłe.
Załóżmy jednak, że f jest jednost. ciągła na $A \cup B$:

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{\delta>0} \ \forall_{x,y \in A\cup B} \quad |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

w szczególności $\exists_{\delta_1>0} \ \forall_{x,y\in A\cup B} \quad |x-y|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<1.$

Weźmy $n > \frac{1}{2\delta_1}$, $\quad x = 2n+1 \in A$

$$y = 2n + \frac{2n-1}{2n} \in B$$

wtedy $|x-y| = \frac{1}{2n} < \delta_1$, ale $|\underset{0}{\underset{\parallel}{f(x)}} - \underset{1}{\underset{\parallel}{f(y)}}| = 1$ $\lightning$.

Mamy jednak użyteczne twierdzenie

Tw.
Niech A i B będą przedziałami (otw., domkniętymi, otw.-domkniętymi lub odwrotnie, skończonymi lub nie) takimi, że $A \cap B \neq \emptyset$. Jeżeli $f_1 : A \to \mathbb{R}$ i $f_2 : B \to \mathbb{R}$ są jednost. ciągłe, i $\forall_{x\in A\cap B} \ f_1(x) = f_2(x)$ to f (zdef. jak poprzednio) jest jednost. ciągła na $A \cup B$.

Dowód: Mamy wykazać, że $\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{\delta>0} \ \forall_{x,y\in A\cup B}$

$$|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Ustalmy $\varepsilon>0$.
Z jednost. ciągłości f_1 i f_2 możemy dobrać δ_A i δ_B t.ż.

$$\forall_{x,y\in A} \quad |x-y|<\delta_A \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall_{x,y\in B} \quad |x-y|<\delta_B \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Niech $\delta = \min(\delta_A, \delta_B)$.

Weźmy $x, y \in A \cup B$. tż. $|x-y| < \delta$.

Jeżeli $x, y \in A$, to z jedn. ciągłości f_1

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |x-y| < \delta_A \Rightarrow \underbrace{|f_1(x) - f_1(y)|}_{= |f(x) - f(y)|} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Analogicznie gdy $x, y \in B$.

Pozostaje przypadek gdy $x \in A \setminus B$, $y \in B \setminus A$. (lub odwrotnie)

Wtedy między x a y leży $z \in A \cap B$

(ćwiczenie – tu korzystamy z tego, że A i B są przedziałami)

i dzięki temu, że z leży na odcinku o końcach

w x i y $\quad |x-y| = |x-z| + |y-z|$

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |x-z| + |y-z| < \delta \Rightarrow |x-z| < \delta \le \delta_A \wedge |y-z| < \delta \le \delta_B$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$|f(x) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$ bo x i z leżą w A

$|f(y) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$ bo y i z leżą w B

Stąd $|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)|$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

(analogicznie w $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ itd.)

Def: Mówimy, że $A \subset \mathbb{R}^m$ jest zwarty, gdy z każdego ciągu elementów A możemy wybrać podciąg zbieżny (do elementu zbioru A).

(czyli zbiory zwarte to te, w których działa tw. Bolzano-Weierstrassa)

Twierdzenie (Heine-Borela)

Zbiór $A \subset \mathbb{R}^m$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.

Szkic dowodu

(⇒) gdyby A nie był domknięty, to istniałby ciąg (x_n) t.ż. $\forall_n \, x_n \in A$, ale $x_n \to x_0 \notin A$

Z tego ciągu nie można wybrać żadnego podciągu zbieżnego do elementu A (bo wszystkie podciągi dążą do x_0).

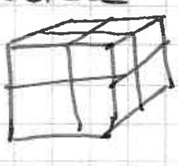
Gdyby A nie był ograniczony, to istniałby ciąg (x_n) t.ż. $\forall_n \, x_n \in A$, $|x_n| \to \infty$.

Taki ciąg nie ma w ogóle podciągów zbieżnych.

(⇐) Skoro A jest ograniczony, to możemy go zamknąć w dużej m-wym. kostce $[-M, M]^m = Q$

~~Dalej, z jak Bolzano, dzielimy~~ Weźmy jakikolwiek ciąg (x_n) elementów A. ~~[illegible]~~ x_1 - dowolny

Jak Bolzano, dzielimy Q na 2^m kostek o 2 razy krótszym ~~[illegible]~~ krawędzi.



W jednej z tych kostek jest ∞-wiele wyrazów ciągu ~~, i tg~~ dzielimy dalej...

(wybieramy w niej 2-gi wyraz podciągu)

W granicy dostajemy zbieżny (w $\mathbb{R}^m$) podciąg ciągu (x_n); domkniętość A daje nam to, że granica podciągu też jest elementem A. ∎

Inna droga: wszystkie współrzędne wyrazów ciągu (x_n) są ograniczone (leżą w $[-M, M]$); wybieramy podciąg ciągu (x_n) tż. pierwsza współrzędna jest zbieżna (w $\mathbb{R}$), z niego – podciąg tż. druga wsp. jest zbieżna itd. ~~kończąc~~ w końcu dostajemy podciąg ciągu (x_n), którego wszystkie wsp. są zbieżne w $\mathbb{R}$ (więc ~~(x_n)~~ podciąg jest zbieżny w $\mathbb{R}^n$).

W twierdzeniach:

- o ciągłości funkcji ~~ciągłej~~ odwrotnej do funkcji ciągłej i różnowartościowej na $[a,b]$
- Weierstrassa o przyjmowaniu kresów
- Cantora-Heinego o jednostajnej ciągłości

jedyna własność odcinka $[a,b]$, z której korzystaliśmy, to tw. Bolzano-Weierstrassa:

<u>Wniosek</u>: Te trzy twierdzenia są prawdziwe nie tylko na odcinku domkniętym $[a,b]$, ale również wtedy, gdy $[a,b]$ zastąpimy dowolnym zbiorem zwartym.